

信号処理とフーリエ変換 第4回

～直交系による展開, Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/>

2022年10月12日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Fourier 級数 (続き)
 - 直交性 (続き)
 - 内積空間の基本的性質 (続き)
 - 直交系と正規直交系
 - 正規化
 - 直交系による展開の係数の求め方
 - Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似
 - 垂線の足 (直交射影) は最も近い点
 - Bessel の不等式
- 3 おまけ: 一般の周期関数の Fourier 級数

- 講義ノート [1] の §1.3 (続き), 1.4 の部分 (最短距離 \Leftrightarrow 垂直) の内容を講義します。
- レポート課題 1 を出します (締め切りは 11 月 8 日 18:00)。
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/kadai1.pdf>
におくようにします。

1.3 直交性 1.3.6 内積空間の基本的性質 (続き)

$\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$ の内積には慣れていていると思うが、多くのことが内積空間でも成立する。

命題 4.1 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f, g) = 0 \Rightarrow \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

さらに $f_1, f_2, \dots, f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k) = 0$) ならば

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \dots + \|f_n\|^2.$$

証明.

$(f, g) = 0$ ならば $(g, f) = \overline{(f, g)} = \overline{0} = 0$ に注意しよう。

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = (f, f) + (g, g) = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

n 個の場合、 $j \neq k$ である場合は 0 なので、 $j = k$ の項が残り

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^n f_j, \sum_{k=1}^n f_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (f_j, f_k) = \sum_{j=1}^n (f_j, f_j) = \sum_{j=1}^n \|f_j\|^2.$$

□

1.3 直交性 1.3.7 直交系と正規直交系

定義 4.2 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、 (\cdot, \cdot) はその内積、 $\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

① $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の2条件を満たすことをいう：

- $(\forall m, n) \ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
- $(\forall n) \ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

② $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう：

$$(\forall m, n) \ (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} .$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、 $(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求するのは珍しいと思われるが、そう定義しておく、次の命題 4.3 や定理 4.6 が成り立つ。これらは便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

もちろん、**正規直交系は直交系**である ($\because m \neq n$ ならば $\delta_{mn} = 0, \delta_{nn} = 1 \neq 0$)。

1.3 直交性 1.3.8 正規化 (直交系から正規直交系を作る)

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 4.3 (正規化)

$\{\varphi_n\}$ が直交系であるとき、 $\psi_n := \frac{1}{\|\varphi_n\|} \varphi_n$ とおくと、 $\{\psi_n\}$ は正規直交系である。

証明.

$$(\psi_m, \psi_n) = \left(\frac{1}{\|\varphi_m\|} \varphi_m, \frac{1}{\|\varphi_n\|} \varphi_n \right) = \frac{1}{\|\varphi_m\| \|\varphi_n\|} (\varphi_m, \varphi_n).$$

$m \neq n$ ならば $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ であるから $(\psi_m, \psi_n) = 0$.

$m = n$ ならば

$$(\psi_m, \psi_n) = (\psi_n, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} (\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \|\varphi_n\|^2 = 1.$$

□

1.3 直交性 1.3.8 正規化 (直交系から正規直交系を作る 例)

Fourier 級数で用いる個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので (前回スライド 13)、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

思い出し: $X_{2\pi}$ = 周期 2π の区分的 C^1 級の関数全体の集合

例 4.4

$\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

例 4.5

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (1)

定理 4.6 (直交系による展開の係数)

X は内積空間で、 (\cdot, \cdot) はその内積とする。

① $\{\varphi_n\}$ が X の直交系で、 $f \in X$ が

$$(1) \quad f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$(2) \quad c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

② $\{\varphi_n\}$ が X の正規直交系で、 $f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。 (1) を示す。

添字を表す文字を変えて、 $f = \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n ($1 \leq n \leq N$) に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^N c_m (\varphi_m, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

($m \neq n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

□

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

$$(3) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

証明.

任意の n に対して、 $N \geq n$ を満たす N に対して、

$$(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \left(f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right).$$

Schwarz の不等式を用いて

$$|(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n)| = \left| \left(f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) \right| \leq \left\| f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m \right\| \|\varphi_n\|.$$

$N \rightarrow \infty$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに左辺は 0。ゆえに $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$. □

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 4.7 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} \cdot \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$\{\mathbf{1}\} \cup \{\cos nx \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ は直交系である。 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(*) \quad a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\cos nx} dx}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\sin nx} dx}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

また $a_0/2$ は $1 = \cos(0 \cdot x)$ の係数であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, \mathbf{1})}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\mathbf{1}} dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (5) 例 (続き)

(授業では、以下の例は省略した。)

例 4.7 (通常 Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

$$c_n = \frac{(f, e^{inx})}{(e^{inx}, e^{inx})} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (6) 一般の周期

例 4.8 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義して

$$a_n = \frac{(f, \cos \frac{2n\pi}{T}x)}{(\cos \frac{2n\pi}{T}x, \cos \frac{2n\pi}{T}x)}, \quad b_n = \frac{(f, \sin \frac{2n\pi}{T}x)}{(\sin \frac{2n\pi}{T}x, \sin \frac{2n\pi}{T}x)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)}$$

から求まる (やってみよう — おまけ (p. 22) も見てみよう)。これだけでは展開可能なことの“証明”にはならないけれど、係数の式は自信を持って書き下せるだろう。

1.4 Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似

以下次のことが成り立つことを示す。

- Fourier 級数の部分和は直交射影と呼ばれるものになっている。
- (一般の内積空間で) 直交射影は、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ で測って最良近似である。
- (上2つの結果を合わせて) Fourier 級数の部分和は最良近似である。

また、有名な Bessel の不等式を示し、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ についての収束と完全系の概念を定義する。

1.4.1 垂線の足 (直交射影) は最も近い点

- 直線 $l = V$ とその上にない点 F . l 上の動点 G .
- 平面 $\pi = V$ とその上にない点 F . π 上の動点 G .

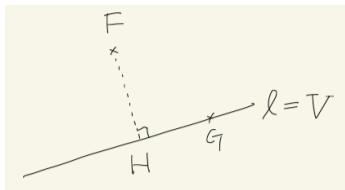


図 1: $V = l$

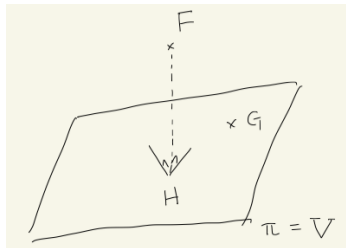


図 2: $V = \pi$

問 V 上の点 G をなるべく F に近くしたい。 FG が最短距離となる G を求められるか？

答 F から V に引いた垂線と V との交点 H (「 F から V に下した垂線の足」) H のことを「 F の V への**直交射影**」という。

論理を(短く)言い切ると「最短 \Leftrightarrow 垂直」

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点 定理にする

x が V の任意の要素と直交することを $x \perp V$ と書くことにする (つまり $(\forall v \in V) (x, v) = 0$)。

h から f に向かうベクトルは、 $f - h$ であることを思い出しておこう。

定理 4.9 (垂直 \Leftrightarrow 最短)

体 \mathbb{K} 上の内積空間 X の部分空間 V と $f \in X, h \in V$ 対して

h は f の V への直交射影 $\Leftrightarrow h$ が最も f に近い

つまり次の2つが成り立つ。ただし $\| \cdot \|$ は内積から定まるノルムである。

- ① $f - h \perp V$ となる $h \in V$ があれば、 $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.
- ② $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$ となる h (最短距離を達成する h) があれば、 $f - h \perp V$.

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点 定理の証明

(1) の証明 (直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く) $\forall g \in V$ に対して

$$\|f - h\|^2 + \|g - h\|^2 = \|f - g\|^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})$$

であるから $\|f - h\| \leq \|f - g\|$. ゆえに $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.

(2) の証明 任意の $v \in V, t \in \mathbb{K}$ に対して、 $g := h + tv$ も V に属する。ゆえに

$$\varphi(t) := \|f - (h + tv)\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}).$$

は $t = 0$ で最小値を取る。これから実は $(f - h, v) = 0$ が導かれる。

ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合のみ証明する ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は講義ノートにある)。

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= ((f - h) - tv, (f - h) - tv) \\ &= \|f - h\|^2 - 2(f - h, v)t + t^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

が $t = 0$ のとき最小値をとるので、1次の項の係数 $-2(f - h, v)$ は0である。ゆえに $(f - h, v) = 0$. □

系 4.10 (直交射影を表す式)

体 \mathbb{K} 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ で張られている、つまり

$$V = \text{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \mid c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、 f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$(4) \quad h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n.$$

これは f の V への直交射影でもある。

V の範囲内で、 f を近似するものを選ぶ、と考えると、(4) の h は、誤差 $\|f - h\|$ を最小にするので、「最良近似」と呼ぶのにふさわしい。

Fourier 級数の部分 and s_N は、(4) の h に他ならない。ゆえに、Fourier 級数の部分 and は (V の範囲内で) 最も f に近い。

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点 直交射影の式

証明 $h \in V$ であるから、ある c_1, \dots, c_N が存在して

$$h = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、 $f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^N c_j (\varphi_j, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

(等号 = は説明済み)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \quad \square$$

例 4.11 (Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似)

(三角関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、 f の $V := \text{span}\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$ への直交射影であり、 f の V における最良近似でもある ($\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。

(複素指数関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

は、 f の $V := \text{span}\langle e^{-iNx}, \dots, e^{-ix}, e^{i0x}, e^{ix}, \dots, e^{iNx} \rangle$ への直交射影であり、 f の V における最良近似でもある (やはり $\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。 \square

1.4.2 Bessel の不等式

有名な Bessel の不等式を紹介する。

命題 4.12 (Bessel の不等式)

内積空間 X の直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と任意の $f \in X$ に対して

$$(5) \quad \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2$$

が成り立つ。無限個の $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の場合は (極限を取って)

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2 \quad (\text{Bessel の不等式}).$$

特に $\{\psi_n\}$ が正規直交系の場合は ($\|\psi_n\| = 1$ なので)

$$(7) \quad \sum_{n=1}^N |(f, \psi_n)|^2 \leq \|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 \leq \|f\|^2.$$

1.4.2 Bessel の不等式

証明 $0, h$ (直交射影), f を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2.$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \leq \|f\|^2.$$

この左辺は、やはりピタゴラスの定理を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\|h\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \left\| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^4} \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2.$$

無限個の場合、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、この不等式が得られる。部分和が上に有界であるから $N \rightarrow \infty$ のとき収束して、(6) が得られる。□

内積空間の不等式は、ほとんどがピタゴラスの定理で解釈できる…

おまけ: 一般の周期関数の Fourier 級数

第 1 回スライドの 12 ページに結果の式を書いておいた。再録しておく

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

「信号処理とフーリエ変換 練習問題」の問 11 も参考になる。特に解答の解法 2を見ると、 $\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ で展開できることが理解できる。

参考文献

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>,
以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。
(2014～).