信号処理とフーリエ変換 第6回

～Fourier 変換と反転公式, マスターすべき Fourier 変換 (1)～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2022/

2022 年 10 月 26 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今回から “フツーの” Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F} f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$ の説明を始めます。講義ノート [1] の §2.1, 2.2, 2.3 の途中まで。(F の筆記体 $\mathscr{F}$ は読めるように)
- 念のため: レポート課題 1 が出ています。締め切りは 11 月 8 日 18:00 です。

時間が余れば、Fourier 級数のやり残しも説明しようと思っていましたが、結局 2 節から始めて、マスターすべき Fourier 変換の (2) まで証明を終えたところで時間切れになりました。

1.5.3 Fourier 係数が速く減衰 ⇔ たくさん微分できる

$n \to \pm\infty$ のときの Fourier 係数の減衰は、たくさんの回数微分可能な関数ほど速いことが示される。たくさん微分できる関数の Fourier 級数は良い収束をする。

(有限回しか微分可能でない関数は) 微分するたびに Fourier 係数の減衰が遅くなり、収束が良くなくなる。

定理 6.1 (関数がたくさん微分できるほど、Fourier 係数の減衰が速い)

$k \in \mathbb{N}$, f が周期 2π かつ C^k 級ならば

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n(f) = \lim_{n\to\infty} n^k b_n(f) = 0,$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n(f) = 0.$$

(Landau の little-o notation を用いると、$a_n = b_n = o(n^{-k})$ $(n \to \infty)$, $c_n = o(n^{-k})$ $(n \to \pm\infty)$ と表せる。)

証明.

($c_n(f)$ のみ証明) $n^k c_n(f) = i^{-k} c_n\left(f^{(k)}\right)(n)$. $f^{(k)}$ は連続なので、Riemann-Lebesgue の定理 (定理 5.7 (1-b)) から、$\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f^{(k)}) = 0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n(f) = 0$. □

1.5.3 Fourier 係数が速く減衰 ⇔ たくさん微分できる

上の定理の大まかな逆のような定理が成り立つ。

定理 6.2 (関数の Fourier 係数の減衰が速ければ、たくさんの回数微分可能)

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 2π かつ連続で、その Fourier 係数 a_n, b_n が、ある自然数 k に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n|+|b_n|\right) < \infty \quad \left(c_n \text{ で書くと } \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k |c_n| < +\infty\right)$$

を満たすとする。このとき f は C^k 級であり、f の Fourier 級数は k 回項別微分可能である。

証明.

Weierstrass の M test と「$\{f_n\}$ が C^1 級の関数列で f に各点収束、$\{f_n'\}$ が g に一様収束するならば、f は C^1 級で $f'=g$」という定理を用いる。詳細は省略する。 □

2 Fourier 変換　2.0 はじめに

いわゆる “フツーの” Fourier 変換の定義式と基本的な性質を述べる。

1

いわゆる“フツーの”Fourier 変換の定義式と基本的な性質を述べる。

Fourier 変換ファミリーは 4 人いるが、どういう性質を持つかの説明としては、この節で紹介する“フツーの”Fourier 変換が代表的であり、良いだろう、と考えている。

1

いわゆる “フツーの” Fourier 変換の定義式と基本的な性質を述べる。

Fourier 変換ファミリーは 4 人いるが、どういう性質を持つかの説明としては、この節で紹介する “フツーの” Fourier 変換が代表的であり、良いだろう、と考えている。

“フツーの” Fourier 変換の定義式には、全空間 $\mathbb{R}$ での積分が出て来る。一般的な状況で積分の存在を論じるのはあきらめる (かなり難しいから [1])。

[1] 定義式が、Lebesgue 積分で意味を持つには、$f \in L^1(\mathbb{R})$ が必要十分である。L^2 理論がよく使われるが、$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ であることに注意する。$f \in L^1(\mathbb{R})$ でない f に対して、Fourier 変換を定義する必要がある、ということにある。超関数として考えるのが必要になることも多い。

2 Fourier 変換　2.0 はじめに

いわゆる “フツーの” Fourier 変換の定義式と基本的な性質を述べる。

Fourier 変換ファミリーは 4 人いるが、どういう性質を持つかの説明としては、この節で紹介する “フツーの” Fourier 変換が代表的であり、良いだろう、と考えている。

“フツーの” Fourier 変換の定義式には、全空間 $\mathbb{R}$ での積分が出て来る。一般的な状況で積分の存在を論じるのはあきらめる (かなり難しいから [1])。

物理的な応用が豊富にあるが、言及できない (時間が足りないから。参考書は小出 [2] がお勧め。)。偏微分方程式の問題への応用例を少し紹介する程度。

[1] 定義式が、Lebesgue 積分で意味を持つには、$f \in L^1(\mathbb{R})$ が必要十分である。L^2 理論がよく使われるが、$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ であることに注意する。$f \in L^1(\mathbb{R})$ でない f に対して、Fourier 変換を定義する必要がある、ということにある。超関数として考えるのが必要になることも多い。

いわゆる “フツーの” Fourier 変換の定義式と基本的な性質を述べる。

Fourier 変換ファミリーは 4 人いるが、どういう性質を持つかの説明としては、この節で紹介する “フツーの” Fourier 変換が代表的であり、良いだろう、と考えている。

“フツーの” Fourier 変換の定義式には、全空間 $\mathbb{R}$ での積分が出て来る。一般的な状況で積分の存在を論じるのはあきらめる (かなり難しいから [1])。

物理的な応用が豊富にあるが、言及できない (時間が足りないから。参考書は小出 [2] がお勧め。)。偏微分方程式の問題への応用例を少し紹介する程度。

cos, sin はやめて、複素指数関数版だけ示す (時間の節約のため)。

[1] 定義式が、Lebesgue 積分で意味を持つには、$f \in L^1(\mathbb{R})$ が必要十分である。L^2 理論がよく使われるが、$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ であることに注意する。$f \in L^1(\mathbb{R})$ でない f に対して、Fourier 変換を定義する必要がある、ということにある。超関数として考えるのが必要になることも多い。

いわゆる “フツーの” Fourier 変換の定義式と基本的な性質を述べる。

Fourier 変換ファミリーは 4 人いるが、どういう性質を持つかの説明としては、この節で紹介する “フツーの” Fourier 変換が代表的であり、良いだろう、と考えている。

“フツーの” Fourier 変換の定義式には、全空間 $\mathbb{R}$ での積分が出て来る。一般的な状況で積分の存在を論じるのはあきらめる (かなり難しいから [1])。

物理的な応用が豊富にあるが、言及できない (時間が足りないから。参考書は小出 [2] がお勧め。)。偏微分方程式の問題への応用例を少し紹介する程度。

cos, sin はやめて、複素指数関数版だけ示す (時間の節約のため)。

F の筆記体 $\mathscr{F}$ や、ギリシャ文字のクシー ξ (Ξ の小文字) に慣れよう。

[1] 定義式が、Lebesgue 積分で意味を持つには、$f \in L^1(\mathbb{R})$ が必要十分である。L^2 理論がよく使われるが、$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ であることに注意する。$f \in L^1(\mathbb{R})$ でない f に対して、Fourier 変換を定義する必要がある、ということにある。超関数として考えるのが必要になることも多い。

2.1.1 Fourier 級数の復習

まず Fourier 級数を復習する。ある程度なめらかな $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 T ならば

$$\widehat{f}(n) = \mathscr{F}f(n) := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

とおくとき

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

が成り立つことが分かった。

まず Fourier 級数を復習する。ある程度なめらかな $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 T ならば

$$(1) \qquad \widehat{f}(n) = \mathscr{F} f(n) := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくとき

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つことが分かった。

注 §1 では、Fourier 係数を c_n と書いたが、ここでは以下の議論で照らし合わせるために $\widehat{f}(n)$, $\mathscr{F} f(n)$ と表している。

まず Fourier 級数を復習する。ある程度なめらかな $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 T ならば

$$(1)\qquad \widehat{f}(n) = \mathscr{F}f(n) := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx \quad (n\in\mathbb{Z})$$

とおくとき

$$(2)\qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x\in\mathbb{R})$$

が成り立つことが分かった。

注 §1 では、Fourier 係数を c_n と書いたが、ここでは以下の議論で照らし合わせるために $\widehat{f}(n)$, $\mathscr{F}f(n)$ と表している。

c_n のことを $\widehat{f}(n)$ や $\mathscr{F}f(n)$ と書くのは、実は最近の流行でもある。

$$(3)\qquad c_n = \widehat{f}(n) = \mathscr{F}f(n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

2.1.2 Fourier 変換の定義と反転公式

次のことが成り立つ。

Fourier 変換の “定義式” と Fourier の反転公式

周期関数でない $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$x \to \pm\infty \text{ のとき } |f(x)| \text{ がある程度速く減衰する}$$

という性質を満たすならば、

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

とおくとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

(f を 周期 T が大きい関数により $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ で近似して Fourier 級数展開し、極限移行する。)

2.1.2 Fourier 変換の定義と反転公式

次のことが成り立つ。

Fourier 変換の "定義式" と Fourier の反転公式

周期関数でない $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が

$x\to\pm\infty$ のとき $|f(x)|$ がある程度速く減衰する

という性質を満たすならば、

$$\widehat{f}(\xi)=\mathscr{F}f(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\quad(\xi\in\mathbb{R}) \tag{4}$$

とおくとき

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\quad(x\in\mathbb{R}). \tag{5}$$

(f を 周期 T が大きい関数により $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ で近似して Fourier 級数展開し、極限移行する。)

(4) で定まる $\widehat{f}$ $(=\mathscr{F}f)$ を**関数 f の Fourier 変換**と呼ぶ。f に $\widehat{f}$ を対応させる写像 $\mathscr{F}\colon f\mapsto\widehat{f}$ のことも **Fourier 変換**と呼ぶ。

2.1.2 Fourier 変換の定義と反転公式

次のことが成り立つ。

Fourier 変換の "定義式" と Fourier の反転公式

周期関数でない $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$x \to \pm\infty \text{ のとき } |f(x)| \text{ がある程度速く減衰する}$$

という性質を満たすならば、

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

とおくとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

(f を 周期 T が大きい関数により $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ で近似して Fourier 級数展開し、極限移行する。)

(4) で定まる $\widehat{f}$ ($= \mathscr{F}f$) を関数 f の **Fourier 変換**と呼ぶ。f に $\widehat{f}$ を対応させる写像 $\mathscr{F}\colon f \mapsto \widehat{f}$ のことも **Fourier 変換**と呼ぶ。

(5) を **Fourier の反転公式** (the Fourier inversion formula, the Fourier inversion theorem) と呼ぶ。

2.1.2 Fourier 変換の定義と反転公式

次のことが成り立つ。

Fourier 変換の "定義式" と Fourier の反転公式

周期関数でない $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$x \to \pm\infty$ のとき $|f(x)|$ がある程度速く減衰する

という性質を満たすならば、

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

とおくとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

(f を 周期 T が大きい関数により $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ で近似して Fourier 級数展開し、極限移行する。)

(4) で定まる $\widehat{f}$ $(= \mathscr{F}f)$ を**関数 f の Fourier 変換**と呼ぶ。f に $\widehat{f}$ を対応させる写像 $\mathscr{F}\colon f \mapsto \widehat{f}$ のことも **Fourier 変換**と呼ぶ。

(5) を **Fourier の反転公式** (the Fourier inversion formula, the Fourier inversion theorem) と呼ぶ。

2.1.3 共役 Fourier 変換

(4), (5) の右辺の類似性に注目しよう。

一般に、関数 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、g の **共役 Fourier 変換** (きょうやく) $\widetilde{g}=\mathscr{F}^*g$ を

(6)
$$\widetilde{g}(x)=\mathscr{F}^*g(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{i\xi x}d\xi \quad (x\in\mathbb{R})$$

で定める。写像 $\mathscr{F}^*\colon g\mapsto\widetilde{g}$ のことも**共役 Fourier 変換**と呼ぶ。

2.1.3 共役 Fourier 変換

(4), (5) の右辺の類似性に注目しよう。

一般に、関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、**g の 共役(きょうやく) Fourier 変換 $\widetilde{g} = \mathscr{F}^* g$** を

(6) $$\widetilde{g}(x) = \mathscr{F}^* g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める。写像 $\mathscr{F}^*\colon g \mapsto \widetilde{g}$ のことも**共役 Fourier 変換**と呼ぶ。

この記号を用いると、Fourier 反転公式 (5) は次のように表せる。

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f.$$

逆順にしても成立。つまり、g の共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^* g$ を Fourier 変換すると元に戻る:

$$\mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g.$$

2.1.3 共役 Fourier 変換

(4), (5) の右辺の類似性に注目しよう。

一般に、関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、**g の共役(きょうやく) Fourier 変換 $\tilde{g} = \mathscr{F}^* g$** を

$$\text{(6)} \qquad \tilde{g}(x) = \mathscr{F}^* g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める。写像 $\mathscr{F}^*\colon g \mapsto \tilde{g}$ のことも**共役 Fourier 変換**と呼ぶ。

この記号を用いると、Fourier 反転公式 (5) は次のように表せる。

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f.$$

逆順にしても成立。つまり、g の共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^* g$ を Fourier 変換すると元に戻る:

$$\mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g.$$

まとめ: 適当な条件下で

$$\text{(7)} \qquad \mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f, \quad \mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g$$

が成り立つ。

2.1.3 共役 Fourier 変換

(4), (5) の右辺の類似性に注目しよう。

一般に、関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、**g の共役 (きょうやく) Fourier 変換 $\widetilde{g} = \mathscr{F}^* g$** を

$$\widetilde{g}(x) = \mathscr{F}^* g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

で定める。写像 $\mathscr{F}^*\colon g \mapsto \widetilde{g}$ のことも**共役 Fourier 変換**と呼ぶ。

この記号を用いると、Fourier 反転公式 (5) は次のように表せる。

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f.$$

逆順にしても成立。つまり、g の共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^* g$ を Fourier 変換すると元に戻る:

$$\mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g.$$

まとめ: 適当な条件下で

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f, \quad \mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g \tag{7}$$

が成り立つ。とりあえず $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^{-1}$ と考えてよい (本当は定義域・終域を決めないと…)。

2.1.3 共役 Fourier 変換

(4), (5) の右辺の類似性に注目しよう。

一般に、関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、**g の共役(きょうやく) Fourier 変換 $\widetilde{g} = \mathscr{F}^* g$** を

(6) $$\widetilde{g}(x) = \mathscr{F}^* g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める。写像 $\mathscr{F}^*\colon g \mapsto \widetilde{g}$ のことも**共役 Fourier 変換**と呼ぶ。

この記号を用いると、Fourier 反転公式 (5) は次のように表せる。

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f.$$

逆順にしても成立。つまり、g の共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^* g$ を Fourier 変換すると元に戻る:

$$\mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g.$$

まとめ: 適当な条件下で

(7) $$\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f, \quad \mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g$$

が成り立つ。とりあえず $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^{-1}$ と考えてよい (本当は定義域・終域を決めないと…)。

共役 Fourier 変換のことを**逆 Fourier 変換**とも呼ぶ。(つねに逆写像とは限らないので、注意が必要である。)

2.1.4 Fourier 級数と Fourier 変換の対応

Fourier 級数と Fourier 変換で言葉遣いが違うので、分かりにくいかもしれないが

Fourier 係数には Fourier 変換が対応し、Fourier 級数展開には反転公式が対応する。

並べてみると

2.1.4 Fourier 級数と Fourier 変換の対応

Fourier 級数と Fourier 変換で言葉遣いが違うので、分かりにくいかもしれないが

Fourier 係数には Fourier 変換が対応し、Fourier 級数展開には反転公式が対応する。

並べてみると

$$\mathscr{F}f(n) = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx},$$

$$\mathscr{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

2.1.4 Fourier 級数と Fourier 変換の対応

Fourier 級数と Fourier 変換で言葉遣いが違うので、分かりにくいかもしれないが

Fourier 係数には Fourier 変換が対応し、Fourier 級数展開には反転公式が対応する。

並べてみると

$$\mathscr{F}f(n) = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx},$$

$$\mathscr{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

「共役」について　線形代数で、正方行列 $U = (u_{ij})$ が unitaty（ユニタリ）行列とは、U の Hermite 共役 $U^* = (\overline{u_{ji}})$ が U^{-1} である、すなわち

$$U^*U = UU^* = I \quad (I \text{ は単位行列})$$

が成り立つということ。$L^2(\mathbb{R})$ で考えると、Fourier 変換は unitary 変換と呼ばれるものになっている。

定理 6.3 (反転公式から得られる便利な公式)

(本当は、Fourier 変換や逆変換が存在するための条件を書くべきであるが…)

1. $g = \mathscr{F} f \Leftrightarrow f = \mathscr{F}^* g$.
2. $\mathscr{F}^* f(x) = \mathscr{F} f(-x)$, $\mathscr{F} f(\xi) = \mathscr{F}^* f(-\xi)$.
   f の Fourier 変換、f の共役 Fourier 変換は、互いに他方を "折り返した" ものに等しい。
3. $g = \mathscr{F} f \Rightarrow \mathscr{F} g(\xi) = f(-\xi)$.

2.2 定義・反転公式から得られる公式

定理 6.3 (反転公式から得られる便利な公式)

(本当は、Fourier 変換や逆変換が存在するための条件を書くべきであるが…)

1. $g = \mathscr{F} f \Leftrightarrow f = \mathscr{F}^* g$.
2. $\mathscr{F}^* f(x) = \mathscr{F} f(-x)$, $\mathscr{F} f(\xi) = \mathscr{F}^* f(-\xi)$.
   f の Fourier 変換、f の共役 Fourier 変換は、互いに他方を “折り返した” ものに等しい。
3. $g = \mathscr{F} f \Rightarrow \mathscr{F} g(\xi) = f(-\xi)$.

証明

1. ($\Rightarrow$) 反転公式 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f$ に $g = \mathscr{F} f$ を代入すると、$f = \mathscr{F}^* g$.

2.2 定義・反転公式から得られる公式

定理 6.3 (反転公式から得られる便利な公式)

(本当は、Fourier 変換や逆変換が存在するための条件を書くべきであるが…)

1. $g = \mathscr{F} f \Leftrightarrow f = \mathscr{F}^* g$.
2. $\mathscr{F}^* f(x) = \mathscr{F} f(-x)$, $\mathscr{F} f(\xi) = \mathscr{F}^* f(-\xi)$.
   f の Fourier 変換、f の共役 Fourier 変換は、互いに他方を "折り返した" ものに等しい。
3. $g = \mathscr{F} f \Rightarrow \mathscr{F} g(\xi) = f(-\xi)$.

証明

1. ($\Rightarrow$) 反転公式 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = f$ に $g = \mathscr{F} f$ を代入すると、$f = \mathscr{F}^* g$.
   ($\Leftarrow$) もう一つの反転公式 $\mathscr{F}(\mathscr{F}^* g) = g$ に $f = \mathscr{F}^* g$ を代入すると、
   $\mathscr{F} f = g$

(次のスライドに続く)

2.2 定義・反転公式から得られる公式

2.2 定義・反転公式から得られる公式

2. 共役 Fourier 変換の定義から (普段 g と書くのを f と書く)

$$\mathscr{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2.2 定義・反転公式から得られる公式

2. 共役 Fourier 変換の定義から (普段 g と書くのを f と書く)

$$\mathscr{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Fourier 変換の定義から (普段、積分の変数を x, 変換の変数を ξ と書くのを入れ替える)

$$\mathscr{F} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2.2 定義・反転公式から得られる公式

(2) 共役 Fourier 変換の定義から (普段 g と書くのを f と書く)

$$\mathscr{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Fourier 変換の定義から (普段、積分の変数を x, 変換の変数を ξ と書くのを入れ替える)

$$\mathscr{F} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

この 2 つの式を見比べると

$$\mathscr{F}^* f(x) = \mathscr{F} f(-x).$$

もう 1 つも同様に示される。あるいは x に $-\xi$ を代入しても良い。

2.2 定義・反転公式から得られる公式

2. 共役 Fourier 変換の定義から (普段 g と書くのを f と書く)

$$\mathscr{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Fourier 変換の定義から (普段、積分の変数を x, 変換の変数を ξ と書くのを入れ替える)

$$\mathscr{F} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

この 2 つの式を見比べると

$$\mathscr{F}^* f(x) = \mathscr{F} f(-x).$$

もう 1 つも同様に示される。あるいは x に $-\xi$ を代入しても良い。

3. $g = \mathscr{F} f$ とすると、(1) より $f = \mathscr{F}^* g$. ゆえに $f(-\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi)$. (2) より $\mathscr{F}^* g(-\xi) = \mathscr{F} g(\xi)$. ゆえに $f(-\xi) = \mathscr{F} g(\xi)$. □

2.3 マスターすべき Fourier 変換

比較的簡単に計算できて、意義ある応用もある、数少ない例を紹介する。

例自体もそれなりに重要であるが、それらの計算に使われるテクニックの修得にも意味がある。

2.3 マスターすべき Fourier 変換

比較的簡単に計算できて、意義ある応用もある、数少ない例を紹介する。

例自体もそれなりに重要であるが、それらの計算に使われるテクニックの修得にも意味がある。

こうする理由は…

2.3 マスターすべき Fourier 変換

比較的簡単に計算できて、意義ある応用もある、数少ない例を紹介する。

例自体もそれなりに重要であるが、それらの計算に使われるテクニックの修得にも意味がある。

こうする理由は…

Fourier 級数の場合は、簡単な例がいくらでもその場で作れたが、Fourier 変換の場合はそうもいかない。

2.3 マスターすべき Fourier 変換

比較的簡単に計算できて、意義ある応用もある、数少ない例を紹介する。

例自体もそれなりに重要であるが、それらの計算に使われるテクニックの修得にも意味がある。

こうする理由は…

Fourier 級数の場合は、簡単な例がいくらでもその場で作れたが、Fourier 変換の場合はそうもいかない。

Fourier 変換は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ での積分である。多項式はおろか、1 という関数すら普通の意味では $\mathbb{R}$ で積分可能ではなく、(超関数解釈でもしないと) Fourier 変換は求まらない。

2.3 マスターすべき Fourier 変換

比較的簡単に計算できて、意義ある応用もある、数少ない例を紹介する。

例自体もそれなりに重要であるが、それらの計算に使われるテクニックの修得にも意味がある。

こうする理由は…

Fourier 級数の場合は、簡単な例がいくらでもその場で作れたが、Fourier 変換の場合はそうもいかない。

Fourier 変換は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ での積分である。多項式はおろか、1 という関数すら普通の意味では $\mathbb{R}$ で積分可能ではなく、(超関数解釈でもしないと) Fourier 変換は求まらない。

応用上で重要な例はたくさんあるが、簡単には Fourier 変換が求められない。公式集 (昔はこれくらいしか手段がなかった) や数式処理系に尋ねるものであろう。

定理 6.4 (マスターすべき Fourier 変換)

以下 $a>0$ とする。

1. $\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2+a^2}.$
2. $\mathscr{F}\left[\dfrac{1}{x^2+a^2}\right](\xi)=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-a|\xi|}.$
3. $f(x):=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (-a<x<a)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$ とおくとき、$\mathscr{F}f(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin(a\xi)}{a\xi}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}(a\xi).$

   ただし $\operatorname{sinc} x:=\dfrac{\sin x}{x}$.
4. $\mathscr{F}\left[\dfrac{\sin(ax)}{ax}\right](\xi)=\sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (|\xi|<a)\\ 0 & (|\xi|>a)\\ \dfrac{1}{4a} & (\xi=\pm a).\end{cases}.$
5. $\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$

指数関数の微積分

補題 6.5 (指数関数の微積分)

1. $a \in \mathbb{C}$ とするとき $(e^{ax})' = ae^{ax}$.
2. $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき
$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$
3. $a > 0,\ b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき
$$\int_{-a}^{a} e^{ibx}\, dx = \frac{2\sin(ab)}{b} = 2a\,\mathrm{sinc}(ab).$$

証明は次のスライドで示す。

指数関数の微積分

補題 6.5 (指数関数の微積分)

1. $a \in \mathbb{C}$ とするとき $(e^{ax})' = ae^{ax}$.
2. $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき
$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$
3. $a > 0,\ b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき
$$\int_{-a}^{a} e^{ibx}\, dx = \frac{2\sin(ab)}{b} = 2a\,\mathrm{sinc}(ab).$$

証明は次のスライドで示す。

注意 6.6

複素指数関数を、実指数関数と三角関数で書き直して計算する人がいるけれど、指数関数のまま計算することを勧める。

指数関数の微積分

補題 6.5 の証明

1. 複素指数関数をどのように定義してあるかにより証明は違ってくる。例えば
$$e^{x+yi}=e^x(\cos y+i\sin y)$$
が定義であれば、$a=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ として
$$e^{ax}=e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x)+i\sin(\beta x)\right]$$
であるから、
$$\begin{aligned}(e^{ax})'&=\alpha e^{\alpha x}\cdot(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))+e^{\alpha x}\cdot(-\beta\sin(\beta x)+i\beta\cos(\beta x))\\&=e^{\alpha x}(\alpha+i\beta)(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))\\&=ae^{(\alpha+i\beta)x}.\end{aligned}$$
2. (1) からすぐ分かる。
3. $$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}e^{ibx}dx&=\left[\frac{e^{ibx}}{ib}\right]_{x=-a}^{x=a}=\frac{2}{b}\cdot\frac{e^{iab}-e^{-iab}}{2i}\\&=\frac{2}{b}\sin(ab)=2a\frac{\sin(ab)}{ab}=2a\,\mathrm{sinc}(ab).\qquad\square\end{aligned}$$

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

定理 6.4 の (1) で書いた

$$\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}$$

は、$f(x):=e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F}f(\xi)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2+a^2}$ であることを主張している。

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

定理 6.4 の (1) で書いた

$$\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}$$

は、$f(x):=e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F}f(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}$ であることを主張している。

つまり $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ で $\mathscr{F}f(\xi)$ を表す。この記法は良く使われるので、慣れておこう。

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

定理 6.4 の (1) で書いた

$$\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2 + a^2}$$

は、$f(x) := e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F}f(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2 + a^2}$ であることを主張している。

つまり $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ で $\mathscr{F}f(\xi)$ を表す。この記法は良く使われるので、慣れておこう。

似たような習慣は、Laplace 変換などにもある。例えば

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{(スルーしても良い)}.$$

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

定理 6.4 の (1) で書いた

$$\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}$$

は、$f(x):=e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F}f(\xi)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2+a^2}$ であることを主張している。

つまり $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ で $\mathscr{F}f(\xi)$ を表す。この記法は良く使われるので、慣れておこう。

似たような習慣は、Laplace 変換などにもある。例えば

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)=\frac{1}{s-a}\quad (\text{スルーしても良い}).$$

(私見)　a は定数であり、[　] 内の関数の変数を表す文字は x や t であることを「明記してなくても分かりなさい」というわけである。筋の通った記号とは言えない。

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

定理 6.4 の (1) で書いた

$$\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}$$

は、$f(x):=e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F}f(\xi)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2+a^2}$ であることを主張している。

つまり $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ で $\mathscr{F}f(\xi)$ を表す。この記法は良く使われるので、慣れておこう。

似たような習慣は、Laplace 変換などにもある。例えば

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)=\frac{1}{s-a}\quad\text{(スルーしても良い)}.$$

(私見)　a は定数であり、[　] 内の関数の変数を表す文字は x や t であることを「明記してなくても分かりなさい」というわけである。筋の通った記号とは言えない。

Mathematica では

```
FourierTransform[Exp[-a Abs[x]],x,xi,FourierParameters->{0,-1}]
FourierTransform[If[-1<x<1,1/2,0], x, xi, FourierParameters->{0,-1}]
```

のように**何が変数であるか指示する** (そうでないとコンピューターが理解できない)。　□

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

この記法に慣れてもらうために一つ問題を解いてみよう。

問　一般に

$$\mathscr{F}[f(-x)](\xi) = \mathscr{F}f(-\xi) \tag{8}$$

が成り立つことを示せ。(この左辺と右辺を混同する人が多い。)

(裏返してから Fourier 変換したものは、Fourier 変換してから裏返したものと一致する)

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

この記法に慣れてもらうために一つ問題を解いてみよう。

問　一般に

$$\mathscr{F}[f(-x)](\xi) = \mathscr{F}f(-\xi) \tag{8}$$

が成り立つことを示せ。(この左辺と右辺を混同する人が多い。)

(裏返してから Fourier 変換したものは、Fourier 変換してから裏返したものと一致する)

(解答) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{F}[f(-x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

記号 $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ の説明

この記法に慣れてもらうために一つ問題を解いてみよう。

問　一般に

$$\mathscr{F}[f(-x)](\xi) = \mathscr{F}f(-\xi) \tag{8}$$

が成り立つことを示せ。(この左辺と右辺を混同する人が多い。)

(裏返してから Fourier 変換したものは、Fourier 変換してから裏返したものと一致する)

(解答) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{F}[f(-x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

$y = -x$ とおくと、$dx = -dy$. $x \to -\infty$ に $y \to \infty$ が、$x \to \infty$ に $y \to -\infty$ が対応するので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ix\xi}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{iy\xi} (-dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{iy\xi}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy(-\xi)}\, dy = \mathscr{F}f(-\xi).
\end{aligned}$$

ゆえに (8) が成り立つ。 □

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

(1) $R > 0$ として $\displaystyle\int_{-R}^{R}$ を計算する。

---

[2] $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき
$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}.$

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

(1) $R>0$ として $\displaystyle\int_{-R}^{R}$ を計算する。正の範囲と負の範囲にわけて計算する。

$$\int_0^R e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx = \int_0^R e^{-(a+i\xi)x}dx = \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right]_0^R = \frac{1-e^{-(a+i\xi)R}}{a+i\xi} \to \frac{1}{a+i\xi} \quad (R\to\infty$$

(ここで、$\left|e^{(-a+i\xi)R}\right| = e^{-aR} \to 0$ $(R\to+\infty)$ となることを使った [2]。)

[2] $z = x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とするとき
$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = \sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2} = e^x = e^{\mathrm{Re}\,z}$.

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

(1) $R>0$ として $\int_{-R}^{R}$ を計算する。正の範囲と負の範囲にわけて計算する。

$$\int_0^R e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx = \int_0^R e^{-(a+i\xi)x}dx = \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right]_0^R = \frac{1-e^{-(a+i\xi)R}}{a+i\xi} \to \frac{1}{a+i\xi} \quad (R\to\infty$$

(ここで、$\left|e^{(-a+i\xi)R}\right| = e^{-aR} \to 0$ $(R\to+\infty)$ となることを使った [2]。)

負の範囲は $x=-y$ と変数変換して (変数変換せずに直接計算しても良いけれど)

$$\int_{-R'}^{0} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx = \int_0^{R'} e^{-ay}e^{iy\xi}dy \to \frac{1}{a-i\xi} \quad (R'\to\infty).$$

---

[2] $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とするとき
$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = \sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2} = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}$.

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

(1) $R>0$ として $\displaystyle\int_{-R}^{R}$ を計算する。正の範囲と負の範囲にわけて計算する。

$$\int_0^R e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx=\int_0^R e^{-(a+i\xi)x}dx=\left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right]_0^R=\frac{1-e^{-(a+i\xi)R}}{a+i\xi}\to\frac{1}{a+i\xi}\quad(R\to\infty$$

(ここで、$\left|e^{(-a+i\xi)R}\right|=e^{-aR}\to 0\ (R\to+\infty)$ となることを使った [2]。)

負の範囲は $x=-y$ と変数変換して (変数変換せずに直接計算しても良いけれど)

$$\int_{-R'}^{0} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx=\int_0^{R'} e^{-ay}e^{iy\xi}dy\to\frac{1}{a-i\xi}\quad(R'\to\infty).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+i\xi}+\frac{1}{a-i\xi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{\xi^2+a^2}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}.\end{aligned}$$

---

[2] $z=x+iy\ (x,y\in\mathbb{R})$ とするとき
$|e^z|=\left|e^{x+iy}\right|=|e^x(\cos y+i\sin y)|=\sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}=e^x=e^{\mathrm{Re}\,z}.$

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

2. 定理 6.3 の (3) を用いる。ここでは、再度証明してから進める。$\mathscr{F}f = g$ であれば、$\mathscr{F}^* g = f$ であるから、一般に成り立つ $\mathscr{F}g(\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi)$ を用いて
$$\mathscr{F}g(\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi) = f(-\xi).$$

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

2. 定理 6.3 の (3) を用いる。ここでは、再度証明してから進める。$\mathscr{F} f = g$ であれば、$\mathscr{F}^* g = f$ であるから、一般に成り立つ $\mathscr{F} g(\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi)$ を用いて

$$\mathscr{F} g(\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi) = f(-\xi).$$

(1) で分かったように、$f(x) = e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F} f(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{\xi^2 + a^2}$.

2. 定理 6.3 の (3) を用いる。ここでは、再度証明してから進める。$\mathscr{F}f = g$ であれば、$\mathscr{F}^* g = f$ であるから、一般に成り立つ $\mathscr{F}g(\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi)$ を用いて

$$\mathscr{F}g(\xi) = \mathscr{F}^* g(-\xi) = f(-\xi).$$

(1) で分かったように、$f(x) = e^{-a|x|}$ とするとき $\mathscr{F}f(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{\xi^2 + a^2}$. ゆえに

$$\mathscr{F}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{x^2 + a^2}\right](\xi) = f(-\xi) = e^{-a|-\xi|} = e^{-a|\xi|}.$$

左辺は $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} a \mathscr{F}\left[\dfrac{1}{x^2 + a^2}\right](\xi)$ であるから

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{x^2 + a^2}\right](\xi) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}.$$

2.3 マスターすべき Fourier 変換　定理 6.4 の証明

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とするとき

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{-i\xi x} dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a} \cdot 2a \operatorname{sinc}(a(-\xi)) = \frac{\operatorname{sinc}(a\xi)}{\sqrt{2\pi}}.$$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とするとき

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{-i\xi x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a} \cdot 2a\,\mathrm{sinc}(a(-\xi)) = \frac{\mathrm{sinc}(a\xi)}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. (3) で分かったように、$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とするとき、
$\mathscr{F}f(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{sinc}(a\xi)$ であるから

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{sinc}(ax)\right](\xi) = f(-\xi) = f(\xi).$$

これも割り算によって

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{sinc}(ax)\right](\xi) = \sqrt{2\pi} f(\xi) = \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \end{cases}$$

($\xi = \pm a$ の値については微妙なところがあるが、そこはぼかす。)

5. これについては次回。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014〜).

[2] 小出昭一郎：物理現象のフーリエ解析, 東京大学出版会 (1981), 2018 年ちくま学芸文庫に入った。