信号処理とフーリエ変換 第12回
～畳み込み～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2022/

2022年12月21日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. 畳み込み (続き)
   - 畳み込みの Fourier 変換
     - $\mathbb{R}$ 上の関数 — 普通の Fourier 変換の場合
     - $\mathbb{R}$ 上の周期関数 — Fourier 係数の場合
     - $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合
     - $\mathbb{Z}$ 上の関数 (数列) — 離散時間 Fourier 変換の場合
   - 微分との関係とその応用
     - 畳み込みと微分の関係
     - メモ　積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)
     - 応用: 熱方程式の初期値問題
     - 熱方程式の基本解の性質

本日の内容・連絡事項

- 本日のテーマは

  「畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積」

  というもの (講義ノート [1] の§7)。その重要さを理解すること自体が重要なのかもしれない。Fourier 解析は、Fourier による熱伝導現象の解析が発端になったとされているが、熱伝導方程式の初期値問題の解法を例として取り上げる。

  実はこれから最後の講義まで、畳み込みの話ということも出来るかもしれない (次回のタイトルは「デジタル・フィルター」であるが)。
- レポート課題 2(〆切 2023/1/13) を忘れないように。メールでの質問は冬休み中も受け付けます。

7.3 畳み込みの Fourier 変換

すでに述べたように、どの Fourier 変換でも、

$$\mathscr{F}[f * g] = 定数\, \mathscr{F} f \mathscr{F} g$$

が成り立つ。

対象となる関数	名前	公式
$\mathbb{R}$ 上の関数	普通の Fourier 変換	$\mathscr{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathscr{F} f \mathscr{F} g$
$\mathbb{R}$ 上の周期関数	Fourier 係数	$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F} f \mathscr{F} g$
$\mathbb{Z}$ 上の周期関数 (周期 N)	離散 Fourier 変換	$\mathscr{F}[f * g] = N\mathscr{F} f \mathscr{F} g$
$\mathbb{Z}$ 上の関数	離散時間 Fourier 変換	$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F} f \mathscr{F} g$

スライドにはすべての場合を載せる。2 つくらい説明してみる。

- 証明は、定義式 (に—を) 代入し、積分 or 和の順序交換をしてから、変数変換する、が基本方針。
- 周期関数の場合、周期性を使うところがある。

普通の Fourier 変換 $\mathscr{F}f(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$ について

(1) $$\mathscr{F}[f*g](\xi) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi).$$

証明 $h := f*g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

(つづく)

右辺の (　) 内の広義積分を lim で表してから、変数変換する。$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x-y)e^{-ix\xi}dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{-R-y}^{R-y} f(u)e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}\,du \\
&= e^{-iy\xi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R-y}^{R-y} f(u)e^{-iu\xi}\,du = e^{-iy\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}\,du.
\end{aligned}$$

(積分の上端、下端に y が現れるけれども、結局は消えてしまう。)

元の式に代入して

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-iy\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi). \quad \square
\end{aligned}$$

7.3.2 $\mathbb{R}$ 上の周期関数 — Fourier 係数の場合

周期 2π の関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$ とは、f の Fourier 係数である:

$$\mathscr{F}f(n)=\widehat{f}(n):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

$\mathscr{F}f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ である。

周期 2π の関数 $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、f と g の畳み込み $f*g$ を

$$f*g(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy \quad (x\in\mathbb{R})$$

で定める。

$f*g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 2π である (チェックは簡単)。

(2) $$\mathscr{F}[f*g](n) = \mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).$$

証明　$h := f*g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dx\right)\,dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)\,dy.
\end{aligned}$$

右辺の ( ) 内を置換積分する。$u = x - y$ とおくと、$x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $dx = du$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-in(u+y)}\,du = e^{-iny}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-inu}\,du.$$

7.3.2 $\mathbb{R}$ 上の周期関数 — Fourier 係数の場合 証明 続き

関数 $u \mapsto f(u)e^{-inu}$ は周期 2π であるから、$[-\pi - y, \pi - y]$ での積分は $[-\pi, \pi]$ での積分に等しい。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = e^{-iny}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-iny}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du\right)g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\,dy \\
&= \mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n). \quad \square
\end{aligned}$$

7.3.3 $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおく。周期 N の周期数列 $f = \{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ に対して、f の Fourier 変換とは、離散 Fourier 変換にほかならない。すなわち

$$\mathscr{F}f(n) = \widehat{f}(n) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $\mathscr{F}f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を、(周期数列) f の “Fourier 変換” と呼ぶ。

これは周期 N の数列である: $\widehat{f}(n+N) = \widehat{f}(n)$.

一方、周期 N の数列 $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ に対して、f と g の畳み込み $f * g$ を

$$f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める。$f * g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ は周期 N の周期数列である。

実は

(3) $$\mathscr{F}[f * g](n) = N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).$$

証明　$h := f * g$ とおくと

$$\mathscr{F}[f*g](n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).$$

右辺の (　) 内の $\sum$ を変数 (添字) 変換する。$\ell = j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell = -k$, $j = N-1$ のとき $\ell = N-1-k$, $j = \ell + k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-in(\ell+k)} = \omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj} = \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk} = \omega^{-nk}\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}.$$

　数列 $\ell \mapsto f(\ell)\omega^{-n\ell}$ は周期 N の周期数列であるから、$\ell = -k, -k+1, \cdots, N-1-k$ に対する和は $\ell = 0, 1, \cdots, N-1$ に対する和に等しい。

$$\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}.$$

7.3.3 $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合 証明続き

ゆえに

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\omega^{-nk}\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\omega^{-nk}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} \\
&= N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n). \quad \square
\end{aligned}$$

7.3.4 $\mathbb{Z}$ 上の関数 (数列) — 離散時間 Fourier 変換の場合

数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して、$X(\omega) := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\omega}$ $(\omega\in\mathbb{R})$ を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の離散時間 Fourier 変換と定義したが、これが数列の "Fourier 変換" である。

すなわち、$f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、

$$\mathscr{F}f(\xi)=\widehat{f}(\xi):=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\xi}\quad(\xi\in\mathbb{R})$$

で定まる $\mathscr{F}f=\widehat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、(数列) f の "Fourier 変換" と呼ぶ。これは周期 2π の周期関数である。

一方、$f,g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、f と g の畳み込み $f*g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f*g(n):=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\quad(n\in\mathbb{Z})$$

実は

$$\mathscr{F}[f*g](\xi)=\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi). \tag{4}$$

証明

$h := f * g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell)e^{-i\ell\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k) \\
&= \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell)e^{-i\ell\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi}\right) \\
&= \mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi). \quad \square
\end{aligned}
$$

7.4 微分との関係とその応用
7.4.1 畳み込みと微分の関係

(普通の Fourier 変換についての話である ($\mathbb{R}$ で定義された周期性を仮定しない関数の場合)。Fouier 係数についても似たことが成り立つが、それについては解説済み。)

微分可能な関数の畳み込みについては、次の公式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}(f*g)=\frac{df}{dx}*g=f*\frac{dg}{dx}. \tag{5}$$

これを示すには、積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換) を正当化すれば良い。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f*g)(x)&=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x-y)g(y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x-y)g(y)\,dy\\&=\frac{df}{dx}*g(x).\end{aligned}$$

(積分記号下の微分を正当化については、次のスライドでコメントする。)

7.4.2 メモ　積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)

$F\colon [a,b]\times[\alpha,\beta]\ni(x,\xi)\mapsto F(x,\xi)\in\mathbb{C}$ が C^1 級ならば

$$\frac{d}{d\xi}\int_a^b F(x,\xi)dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\xi}F(x,\xi)dx\quad(\xi\in[a,b]).$$

これは微積のテキストに載っていることが多い。

広義積分の場合は少し難しい。次の定理は、普通は Lebesgue 積分で教わる。

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}F(x,\xi)\right|\le\varphi(x),\quad\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx<+\infty \tag{6}$$

を満たす φ が存在する場合は

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,\xi)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}F(x,\xi)dx\quad(\xi\in[a,b]).$$

Fourier 変換の場合、$F(x,\xi)=f(x)e^{-ix\xi}$, $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}F(x,\xi)\right|=\left|-ixe^{-ix\xi}f(x)\right|=|xf(x)|$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|dx<+\infty \tag{7}$$

が成り立てば OK. 定理の証明は難しいが、定理を使うこと自体は簡単である。

7.4.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (1)

熱 (伝導) 方程式の初期値問題: f が与えられたとき、次式を満たす u を求めよ。

(8a) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0),$$

(8b) $$u(x,0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

…… 熱的に絶縁された、無限に長い一様な棒の熱伝導のモデルである (単位は適当に選ぶとする)。$u(x,t)$ は時刻 t, 位置 x での棒の温度、f は初期温度分布である。

解法の要点: x について Fourier 変換して、変数 t についての常微分方程式にする。

$u(x,t)$ を x について Fourier 変換したものを $\hat{u}(\xi,t)$ とおく。すなわち

(9) $$\hat{u}(\xi,t) = \mathscr{F}\left[u(x,t)\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R},\ t > 0).$$

(8b) $u(x,0) = f(x)$ の両辺を Fourier 変換すると

(10) $$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi).$$

7.4.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (2)

(8a) $u_t = u_{xx}$ の両辺を Fourier 変換しよう。

$$\mathscr{F}\left[u_{xx}(x,t)\right](\xi) = (i\xi)^2\,\mathscr{F}\left[u(x,t)\right](\xi) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t),$$

$$\mathscr{F}\left[u_t(x,t)\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) \quad \text{(途中の積分記号下の微分は認める)}$$

であるから

(11) $$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t).$$

(10), (11) は、常微分方程式の初期値問題である。これは容易に解ける。

(12) $$\hat{u}(\xi,t) = e^{-t\xi^2}\hat{u}(\xi,0) = e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi).$$

(つまり $\dfrac{dy}{dx} = ay,\ y(0) = y_0 \Rightarrow y = y_0e^{ax}$ ということ。)

7.4.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (3)

$\mathscr{F}[f*g]=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ という公式を思い出そう。Fourier 変換が $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t\xi^2}$ となる関数 $G(x,t)$ があれば、(12) は

$$\hat{u}(\xi,t)=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi)=\sqrt{2\pi}\hat{G}(\xi,t)\hat{f}(\xi)=\mathscr{F}\left[G(\cdot,t)*f\right](\xi)$$

と書き換えられる。両辺を逆 Fourier 変換して $u(\cdot,t)=G(\cdot,t)*f$. すなわち

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)f(y)dy. \tag{13}$$

$G(\cdot,t)$ は逆 Fourier 変換で求められる。

$$G(x,t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}^*\left[e^{-t\xi^2}\right](x).$$

第 7 回に学んだ公式 $\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ より $\mathscr{F}^*\left[e^{-a\xi^2}\right](x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$.
ゆえに

$$G(x,t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{14}$$

7.4.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (4)

以上で解けた。まとめておくと

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\, dy \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \tag{15}$$

$$G(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0). \tag{16}$$

これが熱方程式の初期値問題 (8a), (8b) の解の公式である。

適当な仮定をおいたとき、この u が確かに (8a), (8b) の解であること、また解の一意性が成り立つことが証明できる (有名であるが、この講義では省略する)。

G は熱方程式の初期値問題の**基本解** (the fundamental solution to the heat equation), **Green 関数** (Green function), あるいは**熱核** (heat kernel), **Gauss 核** (Gaussian kernel) と呼ばれる。非常に有名な関数である。

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

(再掲 16) $$G(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0).$$

任意の $t > 0$ に対して

$$G(x,t) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

が成り立つ。

G は、平均 0, 分散 $2t$ の正規分布の確率密度関数に等しい。

$t\ (>0)$ を固定したとき、$x \mapsto G(x,t)$ のグラフは釣鐘状の曲線で、$x = 0$ でピークになっている。

x 軸との間で囲まれた部分の面積が 1 になっている (初期値が持っていた熱量が保存されることを意味する。一般に、熱量の密度が温度で、温度の積分は熱量となる。)。

分散 $2t$ は時間に比例して増加する。時間の経過とともに、裾が広がっていくわけである。

t を固定して、$x \mapsto G(x,t)$ のグラフを描いて、時間の経過とともにそれがどう変化するか、イメージを頭の中に残すと良い。百聞は一見にしかずで自分の手を動かして見ることを勧める。

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

色々なソフトウェアでグラフが描ける。

Mathematica で熱方程式の基本解を見る

```
G[x_, t_] := Exp[-x^2/(4 t)]/(2*Sqrt[Pi*t]);
g=Plot[Table[G[x,t], {t, 0.1, 1.0, 0.1}], {x, -5, 5}, PlotRange->All];
Manipulate[Plot[G[x, t], {x, -5, 5}, PlotRange->{0, 3}], {t, 0.01, 2, 0.01}]
```

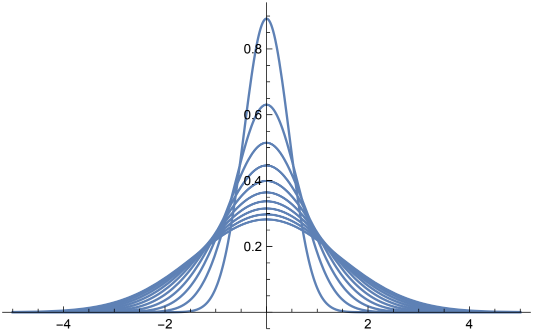

図 1: 熱方程式の基本解 $G(\cdot, t)$ $(t = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0)$

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

gnuplot でアニメーションを作ってみよう。まず

anim.gp

```
plot [-10:10] [0:1] G(x,t)
t=t+dt
if (t<Tmax) reread
```

のようなファイル “anim.gp” を用意しておいて (Visual Studio Code や Atom のようなテキスト・エディターで作れば良い)、gnuplot で

```
gnuplot> G(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
gnuplot> t=0.1
gnuplot> Tmax=5
gnuplot> dt=0.01
gnuplot> load "anim.gp"
```

(アニメーション GIF を作る)

```
gnuplot> set term gif animate delay 10
gnuplot> set output "heatkernel.gif"
gnuplot> load "anim.gp"
```

$t = 0.1$ から 0.01 刻みで $t = 5$ まで、$G(\cdot, t)$ のグラフが簡易アニメーションで描ける。

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

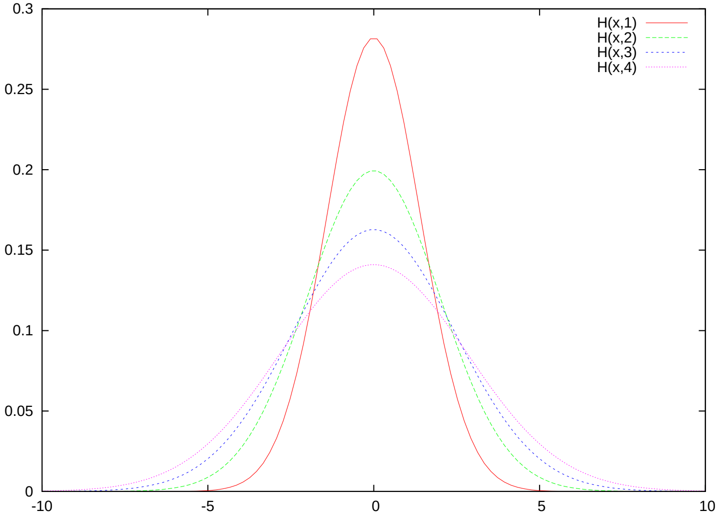

図 2: 熱方程式の基本解 $H(\cdot, t)$ の $t = 1, 2, 3, 4$ でのグラフ

7.4.4 熱方程式の基本解の性質　ほぼ余談

G は、物理的には、時刻 0 で原点に単位熱量が置かれた場合に、その熱が伝導 (拡散) していく状態を表す関数である。

G 自身が熱方程式を満たす: $\dfrac{\partial}{\partial t} G(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t)$.

$t \to +\infty$ のとき $G(x,t) \to 0$ であるが、$t \to +0$ としても 0 以外の点では 0 に収束する。実際、

$$\lim_{t \to +0} G(x,t) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0). \end{cases}$$

(ここからは超関数論を前提にした話)

実は $t \to +0$ のとき、$G(x,t)$ は **Dirac のデルタ関数**に収束する:

$$\lim_{t \to +0} G(x,t) = \delta(x).$$

G は Dirac のデルタ関数を初期値とする熱方程式の初期値問題の解である:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t), \quad G(x,0) = \delta(x).$$

(一番上に書いた物理解釈の数学解釈と言える。)

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014〜).