2014 年度 画像処理とフーリエ変換 期末試験問題

2015 年 1 月 30 日 (金) 16:00〜17:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下、i は虚数単位, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す。

問 1. (1) 周期 2π の区分的に滑らかな関数 f の Fourier 係数 ($f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ を成り立たせる a_n, b_n のこと) を f を用いて表せ (結果だけで良い)。
(2) $f(x) = |x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$ を満たす周期 2π の関数 f の Fourier 級数を求めよ。

問 2. 正数 a に対して、関数 f を $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f(\xi) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$ $(\xi \in \mathbb{R})$ を求めよ。

(2) $g := \mathcal{F}f$ とおくとき、g の Fourier 変換 $\mathcal{F}g$ を求めよ。

問 3. 数列 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ の離散時間 Fourier 変換を $\mathcal{F}f(\omega) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$ $(\omega \in \mathbb{R})$ で、また数列 $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ の畳み込み $f * g$ を $f * g(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)$ $(n \in \mathbb{Z})$ で定めるとき、$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g$ が成り立つことを示せ。

問 4. 次の (**4A**), (**4B**) のいずれか一方を選択して解答せよ。

(**4A**) Fourier 変換 (定義は問 **2** 中に記したもの) に関する公式 $\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ を示せ。ただし f はその導関数 f' とともに遠方で十分速く減衰する滑らかな関数とする。

(**4B**) 離散時間 Fourier 変換の反転公式 ($f(n)$ を $\mathcal{F}f(\omega)$ で表す) を求めよ。公式を書くだけでなく、それが正しいことを示せ。(ただし級数は良い収束をすることを仮定する。具体的には $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$.)

問 5. (以下、時間の単位は秒、周波数の単位は Hz で記述する。) 周期が $T = 10$ の音声信号 $f(t)$ を、サンプリング周波数 $F_s = 44100$ でサンプリングした離散信号 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ があるとする。

(1) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は周期数列であるが、その周期 N を (数値で) 求めよ。

(2) f の Fourier 級数展開 $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$ の係数 c_n を f を用いた式で表せ。また Fourier 級数の第 n 項 $c_n e^{2\pi int/T}$ の周波数を求めよ。

(3) f の Fourier 係数 c_n と離散 Fourier 係数 $C_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}$ $(\omega := e^{2\pi i/N})$ との関係を求めよ。

(4) 「f が $F_{\max}$ 以上の周波数成分を含まないならば、離散 Fourier 係数を用いて、元の信号が完全に復元できる」— これが成り立つための、$F_{\max}$ に関する条件を述べよ。

(3), (4) については結果だけ書いても中間点を与える。

1. (1)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots),\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots).$$

(2) f は偶関数であるから $b_n=0$ はすぐに分かる。$n\neq 0$ であれば

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\sin nx}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\\
&= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & (n \text{ が奇数})\\ 0 & (n\neq 0,\ n \text{ が偶数}).\end{cases}
\end{aligned}$$

また

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(0\cdot x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

これから

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

(f は連続かつ区分的 C^1 級だから、$\mathbb{R}$ 上で一様収束する。) ■

講評

(1) 間違えたら得点なし (いざとなったら、その場で導出できるように教えておいたので、あやふやだと思ったら、それをやって欲しい)。a_n についても $n\in\mathbb{N}$ と書く人がいたけれど、もしそうしたら a_0 の式を別に書くべきである。

(2) 宿題に出したのだけど…

- a_n $(n\in\mathbb{N})$ と a_0 を別に計算することになると思うが、それがはっきり分かるように書くべきだろう。a_n と書くときは、何も書かなくても $n\neq 0$ とみなして欲しい人がいるようだけど、それは無理。まあ、でもあまりうるさいことを言うと、点が低くなるので、そこでは減点しないことにした。
- a_n, b_n の計算は正しくても、$f(x)=$ の式を間違えた人がいて、それは減点。
- 部分積分を間違えた人もいた。
- f が偶関数のとき、$f(x)\cos nx$ は偶関数だから、$a_n = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ として計算することを勧めたはずだけど、$\int_{-\pi}^{0}$ を計算した人が多かった。偶関数・奇関数は頻出するのだから、素直に習得して使って欲しいところだ。

2.

(1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-a}^{x=a}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a}\frac{e^{-ia\xi}-e^{-i(-a)\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ia\xi}-e^{-ia\xi}}{2i}\frac{1}{a\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin a\xi}{a\xi}.
\end{aligned}$$

(Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ から得られる $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$ を用いた。また、$\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{ibx}dx = 2a\frac{\sin(ab)}{ab}$ と言う形で良く出て来るので、準公式と考える方が良い。)

(2) (1) の結果と Fourier の反転公式から、

$$\mathcal{F}^* g(x) = \mathcal{F}^*\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & (x \text{ は } f \text{ の連続点}) \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & (x \text{ は } f \text{ の不連続点}) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \\ \dfrac{1}{4a} & (x = \pm a). \end{cases}$$

公式 $\mathcal{F}g(\xi) = \mathcal{F}^* g(-\xi)$ より

$$\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|-\xi| < a) \\ 0 & (|-\xi| > a) \\ \dfrac{1}{4a} & (-\xi = \pm a) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \\ \dfrac{1}{4a} & (\xi = \pm a).\blacksquare \end{cases}$$

講評

(1)

- 厳密には $\xi \neq 0$ と $\xi = 0$ の場合を分けて考えるべきである。$\xi = 0$ の場合は $\mathcal{F}f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}\cdot 1\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ であるから、$\mathcal{F}f(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin a\xi}{a\xi} & (\xi \neq 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & (\xi = 0). \end{cases}$ $\cdots$ まあ、でもそれはやらないでも良いことにする ($\xi \to 0$ の極限になっているし、(2) でも有限個の例外点は大目に見ている。)。
- 結果が sin にならず、$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2ia\xi}$ のままはさすがに減点する。

(2) 質問の仕方を変えてはいるけれど、もともと宿題とほぼ同じ問題である。ところが混乱した人が少なくなかった。

- 上の解答は不連続点のことを書いておいたが、そういう有限個の例外点を除いてもとの関数 $f(x)$ に等しく、$\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \end{cases}$ だけ書いても構わない。
- $\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \\ \dfrac{1}{4a} & (x = \pm a).\blacksquare \end{cases}$ のようなアンバランスな式を書いた人が多い (右辺と左辺で変数が違うのは変である。両方とも ξ とか、両方共 x とか、文字自体は他と衝突しない限り何でも良いけれど、揃えないとだめ)。得点半分 (本来は 0 点だろう)。
- ξ が書けなくて ε みたいになっている人が多かったけれど、もちろん、たとえ ε にしても構わない (変数を表す文字の選択は自由だ)。でも ξ は書けるようになっておこう。ネットで「ギリシャ文字 書き方」を検索する。$\blacksquare$

3. 離散時間 Fourier 変換の定義式に、畳み込みの定義式を代入し、和の順序を交換すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f*g(n)e^{-in\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)e^{-in\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\omega}\right) g(k).\end{aligned}$$

$m=n-k$ とおくと $e^{-in\omega}=e^{-i(m+k)\omega}=e^{-im\omega}e^{-ik\omega}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\omega}e^{-ik\omega}\right) g(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\omega} \\ &= \mathcal{F}f(\omega)\mathcal{F}g(\omega). \blacksquare\end{aligned}$$

講評

- 間違えた人が多かった。

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)e^{-in\omega}$$

  で機械的に $n-k=\ell$ とおいて

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)e^{-in\omega} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\ell)g(k)e^{-i(\ell+k)\omega}$$

  とするのは無理である。変数 n を ℓ に "置換" しているのに、変数変換の定義式 $n-k=\ell$ に内側の $\sum$ の k が出て来るのはおかしい。解答のように和の順序交換をしてから、$n-k=\ell$ によって、内側の $\sum$ の変数 n を ℓ に "置換" するのが正しい (外側の $\sum$ で k が定まっている。— 和 $\sum$ でなくて、積分 $\int$ だったら、そういうのおかしいと分かるかな？)。

- 変数を書かない人が多かったけれど、書かずに式変形することは難しいので書くべきだろう。左辺に書かないのは目をつぶったけれど、左辺と右辺で変数が違う (左辺で ξ, 右辺で ω とか— 明らかに変) のは減点。$\blacksquare$

4A. 部分積分によって

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f'(x)\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\left(\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\cdot(-i\xi)e^{-ix\xi}\,dx\right) \\ &= i\xi\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\ &= i\xi\mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

ここで $\left|f(x)e^{-ix\xi}\right| = |f(x)|$ であるから、$f(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$ であれば、$\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-R_1}^{R_2}\to 0$ $(R_1,R_2\to\infty)$ であることを用いた。$\blacksquare$

講評　部分積分を間違えた人が複数いた (うっかりすると間違えやすいけれど、だから逆にうっかりしてはいけないと思う。公式を脇に書いて、簡単な関数を代入してチェックするくらいすべきだ。)。

$$\int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = \left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\cdot(-i\xi)e^{-ix\xi}\,dx$$

であるべきを

$$\int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = \left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\cdot\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\,dx$$

としたとか。さすがにこれは一発アウト。

4B.　f の離散時間 Fourier 変換は

$$\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}.$$

内積 (φ, ψ) を

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\overline{\psi(\omega)}d\omega$$

で定めるとき、$(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}) = 2\pi\delta_{nm}$ となるので、

$$(\mathcal{F}f, e^{-im\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\left(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)2\pi\delta_{nm} = 2\pi f(m).$$

ゆえに

$$f(m) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}f, e^{-im\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}f(\omega)\overline{e^{-im\omega}}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}f(\omega)e^{im\omega}d\omega.\blacksquare$$

講評　$\{\varphi_n\}$ が直交系で、$f = \sum_n c_n\varphi_n$ であれば、$c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ というのは、耳にタコが出来るくらい言ったつもりである。それをこのテストでは実は重複して (ひょっとすると三重に) 尋ねている (この問題とどこでしょう？)。

5.

(1) サンプリング周波数が 44100 Hz であるから、j が 44100 増えると、t が 1 増えるので、周期が 1 秒のときはそれで f_j の値が元に戻った。つまり 44100 が数列 $\{f_j\}$ の周期であった。

　周期が 10 秒のときは、その 10 倍、j が 441000 増えると t が 10 増えるので値が元に戻る。つまり $N = 441000$ が周期である。

　数式を用いて一般的に議論してみる。サンプリング周期を T_s とすると、$T_s = 1/F_s$, $f_j = f(jT_s)$. f が周期 T ゆえに $f(t+T) = f(t)$ が成り立つので

$$f_{j+TF_s} = f((j+TF_s)T_s) = f(jT_s + TF_sT_s) = f(jT_s + T) = f(jT_s) = f_j.$$

ゆえに $N := TF_s$ が周期である。

(2) 内積 $(\cdot, \cdot)$ を

$$(\varphi, \psi) = \int_0^T \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt$$

で定義する。$\varphi_n(t) = e^{2\pi int/T}$ とおくと、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は直交系になる。$f = \sum_n c_n\varphi_n$ と表せたとすると、$c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ であった。

$$(\varphi_n,\varphi_n) = \int_0^T \varphi_n(t)\overline{\varphi_n(t)}\,dt = \int_0^T |\varphi_n(t)|^2\ dt = \int_0^T 1\,dt = T.$$

ゆえに

$$c_n = \frac{1}{T}(f,\varphi_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2\pi int/T}\,dt.$$

$e^{2\pi int/T}$ の周期は T/n. なので周波数は $\dfrac{1}{T/n} = n\dfrac{1}{T} = 0.1n$ (Hz). (**補足的な説明** 授業中の実験では、音声データを 1 秒だけ取り出して解析した。これは周期 1 秒と仮定して解析していることになる。その場合は、$c_n\varphi_n$ という項の周波数は n Hz であり、例えばド (261 Hz) の音の離散 Fourier 係数の絶対値 $|C_n|$ をプロットしたとき、$n = 261, N-261$ に一番高いピークが現れた。もしも 10 秒のデータで同じことをやった場合、$n = 2610, N-2610$ 付近に一番高いピークが現れることになる。)

(3) 結果は $C_n = \sum_{k\equiv n} c_k$. ($\sum_{k\equiv n}$ は、$k \equiv n \pmod N$ を満たす全ての整数 k についての和を取ることを意味する。)

(証明) $\omega := e^{2\pi iT_s/T} = e^{2\pi i/(TF_s)} = e^{2\pi i/N}$ とおくと

$$f_j = f(jT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi injT_s/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\omega^{nj}.$$

ゆえに

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} f_j\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\omega^{kj}\omega^{-nj} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\omega^{(k-n)j} = \sum_{k\equiv n} c_k\frac{1}{N}\cdot N = \sum_{k\equiv n} c_k.$$

(4) これは宿題と本質的に同じである。とりあえず結論だけ書いておくと、周波数 $F_{\max}$ がサンプリング周波数 F_s の半分である $F_s/2 = 22050$ (Hz) より小さければ良い。周期 10 秒の信号に含まれるのは 0.1 (Hz) の整数倍の成分であるから、22049.9 以下の信号しか含まないということである。$F_{\max} < 22050$ と書いても、$F_{\max} \le 22049.9$ と書いても、どちらでも良い。■

- サンプリングは分かっていない人が多くて、とても驚いた (もっと基本的な問をやってもらうべきだったのか)。(1) を正しく回答した人は 2,3 人。
- (2) 「周期が T の場合の Fourier 係数の式は書けるようにしておこう」と何度か言いました。
- 半分でなく倍にする人が多かった。

  そもそも音楽 CD のサンプリング周波数に 44100 (Hz) が選ばれた理由は、普通の人が聞き取れる周波数の上限 20 kHz までの周波数成分した含まない信号は復元できるように、20 kHz の 2 倍に少しだけ余裕を持たせたものである、ということだった。