信号処理とフーリエ変換 第 5 回

〜完全系, Fourier 級数と微分との関係〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2023/

2023 年 10 月 18 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の、§1.4後半の完全系と、§1.5 の内容を講義します。
    - §1.4 後半では、Fourier 級数の部分和 s_N が直交射影かつ ($\|\cdot\|$ の意味で) 最良近似であるという事実と、それから完全系という (有限次元空間での基底に代わる) 概念を説明します。
    - §1.5 では、f の Fourier 係数と f' の Fourier 係数の関係 (割と簡単)、f の滑らかさ (≒何回微分できるか) と f の Fourier 級数の収束の "良さ" との関係 (ざっくりとでも分かってくれたら)
- レポート課題 1
    - 課題文は前回 (10 月 11 日) 配布・公開済みです。
      `http://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/fourier-2023/kadai1.pdf`
    - 〆切は 11 月 9 日 18:00。Oh-o! Meiji で提出して下さい。
    - 原則として単一のファイル, フォーマットは A4 サイズの PDF にして下さい。
      やむを得ず複数のファイルとする場合は、表紙で区別できるようにして下さい。

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点　定理にする

x が V の任意の要素と直交することを $x \perp V$ と書くことにする (つまり $(\forall v \in V)\ (x, v) = 0$)。

h から f に向かうベクトルは、$f - h$ であることを思い出しておこう。

定理 5.1 (垂直 ⇔ 最短)

体 $\mathbb{K}$ 上の内積空間 X の部分空間 V と $f \in X$, $h \in V$ 対して

$$h \text{ は } f \text{ の } V \text{ への直交射影} \Leftrightarrow h \text{ が最も } f \text{ に近い}$$

つまり次の 2 つが成り立つ。ただし $\|\ \ \|$ は内積から定まるノルムである。

1. $f - h \perp V$ となる $h \in V$ があれば、$\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.
2. $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$ となる h (最短距離を達成する h) があれば、$f - h \perp V$.

(証明は前回済んでいる。)

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点　直交射影の式

系 5.2 (直交射影を表す式)

体 $\mathbb{K}$ 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ で張られている、つまり

$$V = \operatorname{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \;\middle|\; c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

(1)
$$h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n.$$

これは f の V への直交射影でもある。

V の範囲内で、f を近似するものを選ぶ、と考えると、(1) の h は、誤差 $\|f - h\|$ を最小にするので、「最良近似」と呼ぶのにふさわしい。

Fourier 級数の部分和 s_N は、(1) の h に他ならない。ゆえに、Fourier 級数の部分和は (V の範囲内で) 最も f に近い。

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\varphi_j, \varphi_n \right) = c_n(\varphi_n, \varphi_n).$$

(等号 $=$ は説明済み)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \quad \square$$

例 5.3 (Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似)

(三角関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、f の $V := \mathrm{span}\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$ への直交射影であり、f の V における最良近似でもある ($\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。

(複素指数関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

は、f の $V := \mathrm{span}\langle e^{-iNx}, \cdots, e^{-ix}, e^{i0x}, e^{ix}, \cdots, e^{iNx} \rangle$ への直交射影であり、f の V における最良近似でもある (やはり $\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。 □

1.4.2 Bessel の不等式

有名な Bessel の不等式を紹介する。

命題 5.4 (Bessel の不等式)

内積空間 X の直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 \tag{2}$$

が成り立つ。無限個の $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の場合は (極限を取って)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 \quad (\textbf{Bessel の不等式}). \tag{3}$$

特に $\{\psi_n\}$ が正規直交系の場合は ($\|\psi_n\| = 1$ なので)

$$\sum_{n=1}^{N} |(f,\psi_n)|^2 \le \|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f,\psi_n)|^2 \le \|f\|^2. \tag{4}$$

1.4.2 Bessel の不等式

証明　0, h (直交射影), f を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2 .$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \le \|f\|^2 .$$

この左辺は、やはりピタゴラスの定理を用いて次のように計算できる。

$$\|h\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^4} \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 .$$

無限個の場合、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、この不等式が得られる。部分和が上に有界であるから $N \to \infty$ のとき収束して、(3) が得られる。 $\square$

内積空間の不等式は、ほとんどがピタゴラスの定理で解釈できる…

1.4.3 完全系, Parseval の等式, 内積空間の収束

任意の $f \in X$ に対して Bessel の不等式の不等号が等式となるような、つまり

$$(5) \qquad (\forall f \in X) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} = \|f\|^2$$

が成り立つような直交系 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するとき、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**完全系 (完全直交系)** であるという。

またこの等式 (5) を **Parsevalの等式**（パーセバル）と呼ぶ (「完全直交系に対して Parseval の等式が成り立つ」)。

N 項までの部分和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}\varphi_n$ を s_N と表すことにすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_n)|}{\|\varphi_n\|^2} = \|f\|^2 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \|s_N\|^2 = \|f\|^2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \|f - s_N\| = 0.$$

であるから ($\Leftrightarrow$ については、$\|s_N\|^2 + \|f - s_N\|^2 = \|f\|^2$ を思い出す)、

$$(6) \qquad \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が完全系} \Leftrightarrow (\forall f \in X) \quad \lim_{N\to\infty} \|f - s_N\| = 0.$$

(この条件 (6) が成り立つことを完全系の定義としてあるテキストも多い。)

1.4.3 完全系, Parseval の等式, 内積空間の収束

内積空間 X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

(7) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に収束する $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|f - x_n\| = 0$

と定義すると

$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が完全系 $\Leftrightarrow$ 任意の f に対して $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は f に収束する。

ゆえに、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が X の完全系のとき、任意の $f\in X$ に対して

(8)
$$f = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}\varphi_n$$

が成り立つことになる。

おおまかにまとめると

「完全系があれば、それを用いて任意の要素が展開できる。」
(完全系は有限次元ベクトル空間での基底の代わりになるようなもの。)

例 5.5 (普通の Fourier 級数の場合)

$X_{2\pi}$ に $(f,g) := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ という内積を与えた内積空間において、$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $\{\cos mx\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \cup \{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ は共に完全直交系である。

証明は手間がかかるので省略する (「数学とメディア」でやってある？)。

三角関数系の場合、具体的に書くと、任意の $f \in X_{2\pi}$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right)\right\| = 0$$

を意味する。ただし $\|\cdot\|$ は内積から定まるノルム (L^2 ノルム) である:

$$\|\varphi\| := \sqrt{(\varphi,\varphi)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

$\|\cdot\|$ についての収束は、L^2 収束ということもある (既に紹介ずみ)。 □

(ありがたいお話)

今回の話は、実は Fourier 級数の L^2 理論のさわりである [1]。

普通は、Lebesgue（ルベーグ）積分を学んでから、$L^2(-\pi,\pi)$ という完備な内積空間 (Hilbert 空間) を定義して、そこで議論を展開するが、内積空間 $(X_{2\pi})$ に完備性がなくても (or あいまいにしたままでも)、この程度はやれる、ということである。

機会があれば、Lebesgue 積分、Hilbert 空間を学んで、フルバージョンを学ぶことを勧めたい。

積分は、簡単な図形の面積・体積レベルの話だと、定義が曖昧なままでもなんとかなるが、Fourier 級数をきちんと取り扱おうとすると突き詰めて考える必要が生じる。Riemann が Riemann 積分, Lebesgue が Lebesgue 積分を考え出したきっかけは、ともに Fourier 級数であった、ということである。

[1]「さわり」は、辞書によると、義太夫節や浄瑠璃で一曲のうち一番よい聴かせどころ。

言いたいこと (A の Fourier 級数が B であることを $A \sim B$ と書くことにして)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

とするとき

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}.$$

右辺は項別微分して出来る式なので、覚える苦労はない (定理 5.6, 5.8)。

以下の定理には、f の Fourier 級数、f' の Fourier 級数が出て来るので、次のような記号 (関数の名前をつけた記号) を用いる。

(9a) $$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

(9b) $$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{inx}}\,dx \quad (\text{注: } \overline{e^{inx}} = e^{-inx}).$$

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

定理 5.6 (微分と Fourier 係数の関係)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 2π かつ C^1 級ならば

(10a) $$a_n(f') = \begin{cases} nb_n(f) & (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n = 0), \end{cases} \qquad b_n(f') = -na_n(f) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(10b) $$c_n(f') = inc_n(f) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

関数 f の複素 Fourier 係数 c_n を $\mathscr{F}[f](n)$ と書くことにすると、(10b) は

$(\star)$ $$\mathscr{F}[f'](n) = in\mathscr{F}[f](n).$$

この $(\star)$ は、普通の Fourier 変換の公式 $\mathscr{F}[f'](\xi) = i\xi\mathscr{F}[f](\xi)$ (後述) と対応する。

これらは Fourier 級数、Fourier 変換の微分方程式への応用において重要である。(微分が掛け算になって、微分方程式が代数方程式になって問題が解けることがある。)

$(\star)$ を利用して、連続かつ区分的 C^1 級の関数の Fourier 級数が一様収束することが証明できる (すでに証明抜きで述べてあるが、改めて定理 5.11 として解説する)。

定理 5.6 の証明　アイディア一発「部分積分」

$f(x)\cos nx$ が周期 2π であるから、$x=\pm\pi$ での値が同じなので $[f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi}=0$.
これを用いると

$$a_n(f')=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[[f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(-n\sin nx)dx\right]$$
$$=n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\begin{cases}nb_n(f) & (n\geq 1)\\ 0 & (n=0).\end{cases}$$

同様に

$$b_n(f')=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[[f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(n\cos nx)dx\right]$$
$$=-n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=-na_n(f).$$

さらに

$$c_n(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\left[f(x)e^{inx}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot(-ine^{-inx})dx\right]$$
$$=-in\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=-inc_n(f).\quad\square$$

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係　例

Fourier 級数は、不連続な関数にも適用できることが重要である。

上の定理は関数が C^1 級でない場合にも拡張できる。次の例をみてみよう。

例 5.7 (連続かつ区分的に C^1 級の関数とその導関数の Fourier 級数)

第 2 回の授業で、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π で

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x \quad (-\pi \le x < \pi)$$

を満たすとき、f と g の Fourier 級数展開が

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right), \tag{11}$$

$$g(x) \sim 4\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right) \tag{12}$$

であることを示した。

f は C^1 級ではない (グラフはところどころトンガっているので、$f'(x)$ が存在しない x が存在する) が、(11) の右辺を項別微分すると、(12) の右辺になる。これは偶然ではない。少し複雑にはなるが、この例にも適用できるような定理を述べよう。

例 5.7 に適用できる定理を述べよう。

定理 5.8 (微分と Fourier 係数の関係 (拡張版))

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π, 連続かつ区分的に C^1 級ならば

$$a_n(f') = \begin{cases} nb_n(f) & (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n = 0), \end{cases} \qquad b_n(f') = -na_n(f) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$c_n(f') = inc_n(f) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

話が少し細かすぎるように感じられるかもしれないが、Fourier 級数には微妙な議論が必要になる場合があるので、本質的なことと考えられる。

定理の仮定から f の連続性を除くと、これらの公式は導かれなくなる。

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係　区分的 C^1 級の定義

区分的に C^1 級とはどういうことか、これまでも使って来たが、(証明をするので、あらためて) 定義をきちんと述べる。

- $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ が**区分的に C^1 級**とは、ある有限数列 $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して、
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$
かつ各 $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ に対して、f は開区間 (x_{j-1}, x_j) で C^1 級で、極限
$$\lim_{x\to x_{j-1}+0} f(x),\quad \lim_{x\to x_j-0} f(x),\quad \lim_{x\to x_{j-1}+0} f'(x),\quad \lim_{x\to x_j-0} f'(x) \tag{13}$$
が存在することをいう。
- 周期関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が**区分的に C^1 級**とは、1 周期区間 $[a,b]$ に対して、f (の $[a,b]$ への制限) が $[a,b]$ で区分的に C^1 級であることをいう。

$f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ が連続な場合は、区分的に C^1 級とは、ある有限数列 $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

かつ各 $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ に対して、f を $[x_{j-1}, x_j]$ に制限すると C^1 級であることと同値である。特に区間の端点 x_{j-1}, x_j において片側微分係数

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(x_{j-1}+h) - f(x_{j-1})}{h}, \quad \lim_{h\to-0} \frac{f(x_j+h) - f(x_j)}{h} \tag{14}$$

が存在する、ということである。

f は $[a,b] \setminus \{x_j \mid j = 1, \ldots, N\}$ で微分できる。x_j では f' は定義できない (かもしれない) が、それ以外の点では f' は定義できて、f' は $[a,b]$ で (広義) 積分可能である。

f が定理 5.8 の仮定を満たすとき、ある $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi,$$

各 $j = 1, \cdots, N$ に対して f を $[x_{j-1}, x_j]$ に制限すると C^1 級であり、f' は x_j 以外では定義され、$f'(x)\cos nx$, $f'(x)\sin nx$, $f'(x)e^{-inx}$ は $[-\pi,\pi]$ で広義積分可能であり、$a_n(f')$, $b_n(f')$, $c_n(f')$ が定まる。

定理 5.8 の証明　f は連続かつ区分的に C^1 級であるから

$$(\exists\{x_j\}_{j=0}^n)\quad -\pi=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi,\quad \text{各小区間 } [x_{j-1},x_j] \text{ で } f \text{ は } C^1 \text{ 級.}$$

一般に次式が成り立つことに注意せよ。

$$\text{(15a)}\qquad \sum_{j=1}^n [F(x)]_{x_{j-1}}^{x_j}=\sum_{j=1}^n\left(F(x_j)-F(x_{j-1})\right)=F(x_n)-F(x_0)=F(\pi)-F(-\pi)=[F(x)]_{-\pi}^{\pi},$$

$$\text{(15b)}\qquad \sum_{j=1}^n\int_{x_{j-1}}^{x_j}F(x)dx=\int_{x_0}^{x_n}F(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx.$$

積分を $[x_{j-1},x_j]$ での積分に分けてから部分積分し、それから $\sum$ を求める。どれでも同様なので、複素 Fourier 級数の場合のみ示す。

$$\begin{aligned}
c_n(f')&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^n\int_{x_{j-1}}^{x_j}f'(x)e^{-inx}\,dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^n\left(\left[f(x)e^{-inx}\right]_{x_{j-1}}^{x_j}-\int_{x_{j-1}}^{x_j}f(x)\cdot(-ine^{-inx})dx\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}+in\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\right\}=\frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=inc_n(f).
\end{aligned}$$

(f が微分可能でない点が存在し、積分は広義積分であるが、部分積分の式が成立。)　□

系 5.9 (C^k 級の場合 (高階導関数の Fourier 係数))

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π かつ C^k 級のとき $c_n(f^{(k)})=(in)^k c_n(f)$.
(f が C^{k-1} 級で、$f^{(k-1)}$ が区分的に C^1 級のときも成り立つ。)

以下は細かい話 (授業では省略)。

余談 1 (超関数の観点から)

(例 5.7 の f のような) 連続かつ区分的に C^1 級な関数 f は、微積分の意味では、微分可能でない点を持ちうる。ある意味で不完全な (値が未定義の点がある) f' の Fourier 係数を用いるのは心配かもしれないが、超関数論を学ぶと、f の定める超関数の導関数は、ここで用いた f' の定める超関数と一致することがわかる。

このことに限らず、Fourier 解析は超関数論を用いると見通しが良い。超関数論では、例 5.7 の g のような区分的 C^1 級であるが、不連続な関数に対しても、導関数を考えることができる (詳しいことは省略するがデルタ超関数 δ が現れる)。

1.5.2 Fourier 係数の減衰

定理 5.10 (Fourier 係数の有界性, 減衰性, Parseval の等式)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π とする。

1. f が積分可能ならば
   - (a) $$|a_n|, |b_n| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx, \quad |c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx.$$
     特に $|f(x)| \le M$ ならば
     $$|a_0|, |a_n|, |b_n| \le 2M \quad (n \in \mathbb{N}), \quad |c_n| \le M \quad (n \in \mathbb{Z}).$$
   - (b) (**Riemann-Lebesgue の定理**)
     $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.$$
2. (**Parseval の等式**) f が L^2 ならば
   $$\pi\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\right) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

証明 $\left|e^{inx}\right| = 1$, $|\cos nx| \le 1$, $|\sin nx| \le 1$ に注意しよう。
(1-a) は簡単。例えば複素 Fourier 係数ならば

$$\begin{aligned}|c_n| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)e^{-inx}\right|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi M = M.\end{aligned}$$

(1-b) は「数学とメディア」で証明した (？)。ここでは一般の場合の証明は省略するが、仮定を少し弱くして $|f|^2$ が積分可能とした場合は、(2) から (級数が収束するので)

$$一般項 = |a_n|^2 + |b_n|^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が分かるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$

(f が積分可能でも、$|f|^2$ が積分可能とは限らないので、(1-b) の証明になるわけではないが、実際上は十分であろう。)

証明 (続き) (2) (これは既に一度やってある。)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

と、直交性から導かれる次の “ピタゴラスの等式”

$$\|f\|^2=\left|\frac{a_0}{2}\right|^2\|1\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2\|\cos nx\|^2+|b_n|^2\|\sin nx\|^2\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\left\|e^{inx}\right\|^2.$$

に

$$\|\cos nx\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|^2\,dx=\begin{cases}\pi & (n\in\mathbb{N})\\ 2\pi & (n=0),\end{cases}$$

$$\|\sin nx\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nx|^2\,dx=\pi\quad(n\in\mathbb{N}),$$

$$\left\|e^{inx}\right\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{inx}\right|^2dx=2\pi\quad(n\in\mathbb{Z})$$

を代入すれば良い。 □

(次の定理は、第 2 回の授業で紹介済み。以下の証明は今回の授業でも省略。)

定理 5.11 (連続かつ区分的に C^1 級の関数の Fourier 級数は一様収束する)

f が連続かつ区分的に C^1 級ならば f の Fourier 級数は一様収束して和は f に等しい。

証明　複素 Fourier 級数の場合に、Fourier 級数が一様収束することを示す。

$c_n(f)$, $c_n(f')$ をそれぞれ c_n, c_n' と表す。定理 5.8 により $inc_n = c_n'$. 定理 5.10 より

$$(16)\quad \left\|f'\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(x)\right|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n'\right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|inc_n\right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left|c_n\right|^2 .$$

Schwarz の不等式 $\left(\left|\sum_n a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_n |a_n|^2}\sqrt{\sum_n |b_n|^2}\right)$ と (16) と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を使って

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} |c_n| = \sum_{n\neq 0} n|c_n| \cdot \frac{1}{n} \le \sqrt{\sum_{n\neq 0} n^2 |c_n|^2}\sqrt{\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left\|f'\right\|^2}\sqrt{2\cdot\frac{\pi^2}{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\left\|f'\right\| < \infty.$$

$\left|c_n e^{inx}\right| = |c_n|$ であるから、Weierstrass の M test により、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ は一様収束する。

Fourier 級数が一様収束するとき、その和は元の関数に等しい (その証明は講義ノート [1] 付録 C に書いてある。)。 □

(このスライドは授業では省略した。)
関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

複素関数　定理 10.5　(Weierstrass の M-test)

Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は一様収束するし (項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は絶対収束する (和の順序が変えられる)。

1.5.3 Fourier 係数が速く減衰 ⇔ たくさん微分できる

$n \to \pm\infty$ のときの Fourier 係数の減衰は、たくさんの回数微分可能な関数ほど速いことが示される。たくさん微分できる関数の Fourier 級数は良い収束をする。

(有限回しか微分可能でない関数は) 微分するたびに Fourier 係数の減衰が遅くなり、収束が良くなくなる。

定理 5.12 (関数がたくさん微分できるほど、Fourier 係数の減衰が速い)

$k \in \mathbb{N}$, f が周期 2π かつ C^k 級ならば

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n(f) = \lim_{n\to\infty} n^k b_n(f) = 0,$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n(f) = 0.$$

(Landau の little-o notation を用いると、$a_n = b_n = o(n^{-k})$ $(n \to \infty)$, $c_n = o(n^{-k})$ $(n \to \pm\infty)$ と表せる。)

証明.

$n^k c_n(f) = i^{-k} c_n\left(f^{(k)}\right)(n)$. また $f^{(k)}$ は連続なので、Riemann-Lebesgue の定理 (定理 5.10 (1-b)) から、$\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f^{(k)}) = 0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n(f) = 0$. □

1.5.3 Fourier 係数が速く減衰 ⇔ たくさん微分できる

上の定理の大まかな逆のような定理が成り立つ。

定理 5.13 (関数の Fourier 係数の減衰が速ければ、たくさんの回数微分可能)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π かつ連続で、その Fourier 係数 a_n, b_n が、ある自然数 k に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty \quad \left(c_n \text{ で書くと } \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k |c_n| < +\infty\right)$$

を満たすとする。このとき f は C^k 級であり、f の Fourier 級数は k 回項別微分可能である。

証明.

Weierstrass の M test と「$\{f_n\}$ が C^1 級の関数列で f に各点収束、$\{f_n'\}$ が g に一様収束するならば、f は C^1 級で $f' = g$」という定理を用いる。詳細は省略する。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014〜).