# 信号処理とフーリエ変換 練習問題

桂田 祐史
katurada AT meiji.ac.jp
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier2023/fourier2023-ex.pdf

2016 年 9 月 21 日, 2023 年 9 月 26 日

この文書では、$i$ は虚数単位を表すとする。

## Fourier 級数

これまであまり Fourier 級数の計算をしたことがない人は、早目に問 4, 5, 6 を解いてみること。解答は WWW においてある PDF には書いてある。

**問 1.** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とするとき、関数 $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$, $e^{i\alpha x}$ の周期を求めよ。

**問 2.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 $T$ の連続関数とするとき ($T > 0$ とする)、$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して次式が成り立つことを確かめよ。

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx.$$

(難しくないけれど、証明は結構面倒。事実を知っているだけで十分かもしれない。)

**問 3.** 三角関数の加法定理を既知として、以下の等式を示せ。

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \\
\sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right), \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right).
\end{aligned}$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \quad \sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2},$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \quad \cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

**問 4.** 次の定積分の値を求めよ (注意: 場合分けが必要である)。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, \dots), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, \dots), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(もちろん計算すれば分かるけれど、図形的にも納得して欲しい。結果を覚えてしまうべき。)

**問 5.** 周期 $2\pi$ の複素数値関数 $f$, $g$ に対して、内積 $(f, g)$ を $(f, g) := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ で定めるとき (ただし $\overline{g(x)}$ は $g(x)$ の共役複素数を表す)、以下の関数系が直交系であることを示せ。

(1) $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (2) $\{\cos kx\}_{k\ge 0} \cup \{\sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$

((2) は $\cos kx$ と $\sin jx$, $\cos kx$ と $\cos jx$ $(j \ne k)$, $\sin kx$ と $\sin jx$ $(j \ne k)$ という 3 つの内積を計算する。)

**問 6.** (非常に重要) 以下の関数 $f$ を区間 $[-\pi,\pi]$ で Fourier 級数展開せよ (必要ならば $[-\pi,\pi]$ の外で適当に拡張して、周期 $2\pi$ の関数と考えて Fourier 級数展開せよ)。

(1) $f(x)=x\ (-\pi\le x\le\pi)$. (2) $f(x)=x^2\ (-\pi\le x\le\pi)$. (一般に $x^k$ はどうか？)

(3) $f(x)=|x|\ (-\pi\le x\le\pi)$. (4) $f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}1 & (0<x<\pi)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (-\pi<x<0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\cos^2 x$. (6) $f(x)=\sin^3 x$.

(もっと練習したければ、期末試験の問 1 は大抵この種類の問題なので、それにチャレンジすると良い。)

**問 7.** $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 $2\pi$ の周期関数で滑らかとする。

(1) $f$ が偶関数ならば次式が成り立つことを示せ。

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad a_n:=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

(2) $f$ が奇関数ならば次式が成り立つことを示せ。

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\quad b_n:=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

**問 8.** 周期 $T$ の関数の Fourier 級数展開の式を求めよ。

**問 9.** 関数の偶関数拡張、奇関数拡張を考えることにより、以下の問に答えよ。ただし $L$ は正の数とする。

(1) $f\colon[0,L]\to\mathbb{C}$ が滑らかな関数とするとき、$f(x)$ を $\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ $(n=0,1,\cdots)$ を用いて表せ。

(2) $f\colon[0,L]\to\mathbb{C}$ が滑らかな関数とするとき、$f(x)$ を $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ $(n=1,2,\cdots)$ を用いて表せ。その式が任意の $x\in[0,L]$ について成り立つためには、$f$ に追加の条件が必要になる。それを求めよ。

**問 10.** $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を周期 $2\pi$ の連続関数として、

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,\dots),\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\dots),$$
$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx\quad(n\in\mathbb{Z})$$

とおくとき、$c_n=\begin{cases}(a_n-ib_n)/2 & (n>0)\\ a_0/2 & (n=0)\\ (a_{-n}+ib_{-n})/2 & (n<0)\end{cases}$ が成り立つことを確かめよ。

**問 11.** $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 $T$ $(T>0)$ の周期関数とするとき、$a_n$, $b_n$ をどのように定めると

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

が期待できるか？

(ヒント: $f$ を直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f=\sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき、$c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$.)

## 内積の基本

内積について慣れるため、出来る限り以下の問題を解いてみること。見慣れないタイプの問題だけれど、やってみると簡単、と感じられると思う。アイディアを知らないと解けない、というタイプの問題もあるので、ちょっと考えて分からなければ、解答を読んで構わない (それでアイディアを覚える、という考え方をしよう)。ほとんどが式の計算により解決する問題なので、時間さえかければ勉強はしやすいと思う。

複素数についての 1 行復習: $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、$\bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。$X$ が体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であり、$X$ の任意の 2 元 $x$, $y$ に対して、$(x, y) \in \mathbb{K}$ が定まっていて[1]、以下の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(x, y)$ を $x$ と $y$ の**内積**と呼び、写像 $(\cdot, \cdot)$ のことも $X$ 上の**内積**という。また、$X$ と内積 $(\cdot, \cdot)$ の組 $(X, (\cdot, \cdot))$ を**内積空間**という。

$(\cdot, \cdot)$ を書くことをサボって、単に $X$ 自身を内積空間ということも多い。

(i) $(\forall x \in X)$ $(x, x) \geq 0$. 等号が成立するのは $x = 0$ のとき、そのときに限る[2]。

(ii) $(\forall x, y \in X)$ $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

(iii) $(\forall x_1, x_2, y \in X)$ $(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})$ $(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 (x_1, y) + c_2 (x_2, y)$.

(i), (ii), (iii) を**内積の公理**と呼ぶ。書けるようにしておくこと。

**問 12.** 次の (1), (2) を確かめよ (内積の公理を満たすことを確かめる)。

(1) $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{R}^n$ に対して、$(x, y) := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ とおくと、$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積である。

(2) $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{C}^n$ に対して、$(x, y) := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ とおくと、$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の内積である。

**問 13.** $\mathbb{R}$ で連続で、周期 $2\pi$ の、複素数値の周期関数全体の集合を $X$ とする。関数の和や複素数倍を自然に定義して、$X$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる (これは証明しなくて良い)。さらに $f, g \in X$ に対して

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

と定めると、$(\cdot, \cdot)$ は $X$ 上の内積であることを示せ。

次の 2 問は $\mathbb{C}$ 上の内積に慣れてもらうためのものである (どちらも内積の条件 (ii), (iii) を使う)。

**問 14.** $\mathbb{C}$ 上の内積空間 $X$ では、任意の $f, g_1, g_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \overline{\lambda_1}\, (f, g_1) + \overline{\lambda_2}\, (f, g_2)\,.$$

**問 15.** $\mathbb{C}$ 上の内積空間 $X$ では、任意の $f, g \in X$ に対して

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2\,\mathrm{Re}(f, g) + (g, g)$$

が成り立つことを示せ。($\mathrm{Re}(f, g)$ は、複素数 $(f, g)$ の実部という意味である。)

(注: $\mathbb{R}$ 上の内積空間の場合は、$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g)$ という見慣れた式が得られる。)

問 16 はアイディア一発で難しくない (自力で思いつかなくても、解答を一度見れば覚えられるだろう)。

[1] $(x, y)$ という記号は、$x$ と $y$ の順序対を表す場合が多いが、ここでは内積を表すために用いている。記号の使い回しを嫌ってか、内積を表すために $\langle x, y \rangle$ という記号を使っている本も多い。

[2] これは $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ということを意味する。

**問 16.** 任意の内積空間 $X$ について、

$$(\sharp) \qquad (\forall f, g \in X) \quad |(f,g)|^2 \le (f,f)\,(g,g) \quad (\text{等号} \Leftrightarrow f,\ g \text{ が 1 次従属})$$

が成り立つ (この不等式を Schwarz(シュワルツ) の不等式と呼ぶ)。ここでは簡単のため、$\mathbb{R}$ 上の内積空間数を考えることにする。任意の実数 $t$ に対して、内積の公理 (i) より

$$(tf+g, tf+g) \ge 0.$$

左辺を $t$ についての 2 次式とみて、($\sharp$) を導け。(注意: 2 次の係数が 0 かもしれないので慎重に。)

**問 17.** $\mathbb{C}$ 上の内積空間の場合に Schwarz の不等式を証明せよ。(工夫が必要で、少し難しい。)

**問 18.** 内積空間の条件 (i) のかわりに

(i′) 任意の $f \in X$ に対して $(f,f) \ge 0$.

が成り立つが、$(f,f)=0$ であっても $f=0$ とは限らない場合がときどき現れる。そのとき Schwarz の不等式は成り立つか。

**問 19.** $X$ が $\mathbb{C}$ 上の内積空間であるとき、

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} \quad (f \in X)$$

とおくと、以下の (a), (b), (c) が成り立つことを確かめよ。
(a) 任意の $f \in X$ に対して $\|f\| \ge 0$. 等号が成立するためには $f=0$ が必要十分である。
(b) 任意の $f \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\|\lambda f\| = |\lambda|\ \|f\|$. (c) 任意の $f, g \in X$ に対して $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

**注** (a), (b), (c) を満たす関数 $\|\cdot\|$ のことを、$X$ 上の**ノルム**と呼ぶ。ベクトル空間 $X$ が、ノルム $\|\cdot\|$ を備えているとき、$X$ を**ノルム空間**と呼ぶ。任意の内積空間はノルム空間になっているわけである。

**問 20.** $X$ を内積空間とするとき、任意の $f, g \in X$ に対して

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

が成り立つことを示せ。(注: これ自身は簡単な計算問題だが、図形的に解釈すると有名な「パップスの中線定理」になる。有名な「射影定理」の証明でも鍵となる。)

## 直交性と直交射影

最初に記号と用語の確認をしておく。
次式で定義される $\delta_{nm}$ を **Kronecker のデルタ**と呼ぶ。

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1 & (n=m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \ne m \text{ のとき}). \end{cases}$$

内積空間 $X$ の 2 元 $x$, $y$ が**直交する**とは、$(x,y)=0$ が成り立つことをいう。
この講義では、内積空間 $X$ 内の列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**直交系**であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことと定義する。
(i) $(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \ne m \Rightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = 0.$ (ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\varphi_n, \varphi_n) \ne 0.$

内積空間 $X$ 内の列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**正規直交系**であるとは、次が成り立つことと定義する[3]。

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

[3]注: 直交系、正規直交系などの言葉は、添字の範囲が $\mathbb{N}$ でなく、有限集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ や $\mathbb{Z}$ などの場合にも用いる。そういう場合に定義をどう修正すれば良いかは明らかでしょう。

**問 21.** $X$ は内積空間で、$a_1, \cdots, a_n \in X$ が互いに直交するとき、

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_n\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_n\|^2$$

が成り立つことを示せ (**ピタゴラスの定理**の一般化)。

**問 22.** 次のことを確認せよ。
(1) 正規直交系は直交系である。　(2) 直交系は 1 次独立である。

今回は用いないが、線形代数で学んだ**グラム・シュミットの直交化法**はマスターしておくと良い。

**問 23.** グラム・シュミットの直交化法 (単にシュミットの直交化法とも呼ぶ) を説明せよ。

直交系を "正規化" すれば正規直交系になる。これを確かめておこう。

**問 24.** $X$ を内積空間、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $X$ の直交系とするとき、

$$\psi_n := \frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n$$

で定めた $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $X$ の正規直交系であることを確かめよ。

次は (証明できなくても、内容は) ぜひ理解して欲しい。

**問 25.** $X$ は内積空間、$V$ は $X$ の線型部分空間、$f \in X$, $h \in V$ とする。このとき次の (i), (ii) は同値であることを示せ。

(i) $(\forall v \in V)\ (f - h, v) = 0.$

(ii) $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|.$

($h$ を $f$ の $V$ への**直交射影**と呼ぶ。)

**問 26.** (Bessel の不等式の証明) $X$ を内積空間、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ を $X$ の正規直交系とするとき、任意の $f \in X$ に対して次式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{j=1}^N |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$$

(これから $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交系である場合に、Bessel の不等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$ が成り立つ。)

**問 27.** 内積空間の Bessel の不等式を用いて、次の不等式を示せ (ただし $a_n$, $b_n$ は実 Fourier 係数とする)。

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx.$$

(ヒント: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が正規直交系であることを用いる。実は不等式でなく、等式が成り立つ (Parseval の等式)。

「数学とメディア」で似たような問題が出たみたいなので、一つくらい。

**問 28.** 関数 $f(x) = |x|$ $(|x| \le \pi)$ の Fourier 級数は

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

であった。

(1) $x = 0$ での値を考察して、$S_{奇} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots$ の値を求めよ。　(結果: $S_{奇} = \dfrac{\pi^2}{8}$.)

(2) Parseval の等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\ dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

を用いて、$Q_{奇} = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \cdots$ の値を求めよ。　(結果: $Q_{奇} = \dfrac{\pi^4}{96}$.)

**余談:** $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $S_{偶} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ とおくと、$S_{偶} = \dfrac{S}{4}$, $S = S_{奇} + S_{偶}$ であるから、$S_{奇} = \dfrac{3}{4}S$.

## Fourier 級数の収束, 微分との関係

**問 29.** 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2$ が収束するならば、次式が成り立つことを示せ。

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}$$

($N$ 項までの和についてはどこか (線形代数？) で習ったはず。後は極限を取る議論をきちんとするだけ。)

**問 30.** 複素数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のうち、絶対値の二乗和が収束するもの全体を $\ell^2$ とおく:

$$\ell^2 := \left\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ \middle|\ x_n \in \mathbb{C}\ (n \in \mathbb{N}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\right\}.$$

$\ell^2$ は、$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ に自然に和とスカラー倍を定義したベクル空間の部分ベクトル空間である。また、$\ell^2$ の要素同士の内積を次式で定めるとき、$\ell^2$ は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である (内積の公理を満たす) ことを示せ。

$$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

**問 31.** 周期 $2\pi$ の関数 $g$ を、$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (0,\pi)), \\ 0 & (x = 0, \pm\pi), \\ -1 & (x \in (-\pi, 0)) \end{cases}$ で定める。

(1) $g$ の不連続点を求めよ。(2) $g$ の不連続点 $x$ に対して $g(x-0)$, $g(x+0)$ を求めよ。(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$g$ の Fourier 級数は、 $g(x)$ に収束することを示せ。

**問 32.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $C^1$ 級, 周期 $2\pi$ の関数のとき、

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\ dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\ dx$$

とおくと (要するに $f'$ の Fourier 係数)

$$A_0 = 0, \quad a_n = -\frac{1}{n}B_n, \quad b_n = \frac{1}{n}A_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

であることを示せ。ただし $a_n, b_n$ は $f$ の Fourier 係数とする。複素 Fourier 係数についてはどうなるか。

**問 33.** (Weierstrass の M-test を知っている人向け) 複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ が収束するならば、

$$f(x) := \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (x\in\mathbb{R})$$

とおくとき、以下のことが成り立つことを示せ。

(1) $f$ は連続関数である。

(2) 任意の連続関数 $\varphi$ に対して、

$$(f,\varphi)=\frac{a_0}{2}(1,\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(\cos nx,\varphi)+b_n(\sin nx,\varphi)\} \quad \text{(いわゆる項別積分)}.$$

(4 つの ( , ) はいずれも関数の内積です。)

**問 34.** 次の 3 つの関数の Fourier 級数を求め、コンピューターを用いて部分和のグラフを描け (何項取るかは、いくつか試してから自分で決めて)。$f$, $g$, $h$ の関係について気づいたことがあれば説明せよ。$h$ については、Dirac のデルタ関数を良く知っている人だけ解答せよ。

$$f(x)=|x| \quad (x\in[-\pi,\pi]), \quad (f \text{ は周期 } 2\pi),$$

$$g(x)=\begin{cases} 1 & (x\in(0,\pi)), \\ 0 & (x=0,\pm\pi), \\ -1 & (x\in(-\pi,0)) \end{cases} \qquad (g \text{ は周期 } 2\pi),$$

$$h(x)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(x-n\pi) \quad (\delta \text{ は Dirac のデルタ関数}).$$

## Fourier 変換の基本

ごく限られた関数を除き、具体的な関数の Fourier 変換を求めよ、という問題はあまり出さない (出せない)。それよりは、色々な公式を必要に応じて自力で導出できるようになっておくのが良い。

**問 35.** (1) Fourier 変換、共役 Fourier 変換の定義式を書け。 (2) Fourier 変換の反転公式とは何か。Fourier 級数の場合に反転公式に相当する式を書け。

**問 36.** 都合の良い仮定 (関数の微分可能性、出て来る積分の収束や、微分と積分の順序交換、部分積分など) をおいて、以下の性質を示せ。

(1) $\mathscr{F}[f_1+f_2]=\mathscr{F}f_1+\mathscr{F}f_2$, $\mathscr{F}[\lambda f]=\lambda\mathscr{F}f$.

(2) $\mathscr{F}f(\xi)=\mathscr{F}^*f(-\xi)$, $\mathscr{F}^*f(x)=\mathscr{F}f(-x)$.

(3) $a\neq 0$ とするとき $\mathscr{F}\left[f(ax)\right](\xi)=\dfrac{1}{|a|}\mathscr{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right)$.

(4) $a\in\mathbb{R}$ とするとき $\mathscr{F}\left[f(x-a)\right](\xi)=e^{-ia\xi}\mathscr{F}f(\xi)$.

(5) $\mathscr{F}\left[f(x)e^{iax}\right](\xi)=\mathscr{F}f(\xi-a)$.

(6) $\mathscr{F}\left[f'(x)\right](\xi)=(i\xi)\mathscr{F}f(\xi)$.

(7) $\dfrac{d}{d\xi}\mathscr{F}f(\xi)=-i\mathscr{F}\left[xf(x)\right](\xi)$.

**問 37.** (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx$ の値と、$e^{-3x^2}$ の Fourier 変換を求めよ。

(2) Fourier 変換を求めよ。(i) $e^{-3|x|}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2+9}$ (iii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (|x|<3)\\ 0 & (|x|>3)\end{cases}$ (iv) $\dfrac{\sin(3x)}{3x}$

(以上は、一般的な形の公式を授業で与えたが、それを覚えて、期末試験でそれに当てはめて解答しても、評価しない。自分で式を導出できるようになっておくこと。(2) は順に解答すると、それほど難しくないはず。$\mathscr{F}f(\xi)=\mathscr{F}^*f(-\xi)$ は使って良い。)

**問 38.** 一般に関数 $f$ の Fourier 変換を $\mathscr{F}f$ と表すとき、$\mathscr{F}^2f=\mathscr{F}[\mathscr{F}f]$, $\mathscr{F}^4f=\mathscr{F}[\mathscr{F}[\mathscr{F}[\mathscr{F}f]]]$ はどういう関数か、なるべく簡潔に答えよ。

**問 39.** (熱伝導方程式の初期値問題を半分解く。) $u\colon\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対して、$\hat{u}$ を

$$\hat{u}(\xi,t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}dx \quad ((\xi,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty))$$

で定める ($x$ についてのみ Fourier 変換をしたもの)。

(1) $u$ が次の偏微分方程式を満たすとき、$\hat{u}$ が満たす微分方程式を求めよ。

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)).$$

(2) $u$ が $u(x,0)=f(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ を満たすとき、$\hat{u}(\xi,0)$ を $f$ を用いて表せ。

(3) $\hat{u}$ を求めよ (積分を用いずに表せる)。

(4) $u$ を求めよ (Fourier 変換, 共役 Fourier 変換を使っても良いことにする)。

## 離散 Fourier 変換

**問 40.** $N\in\mathbb{N}$ に対して、$\omega:=e^{2\pi i/N}$ とおくとき、以下の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) $m\in\mathbb{N}$, $1\le m\le N-1$ ならば $\omega^m\ne 1$. また $\omega^N=1$.

(2) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}=\begin{cases}N & (m\equiv 0 \pmod{N})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$

**問 41.** $N\in\mathbb{N}$ に対して、

$$\omega:=e^{2\pi i/N},\quad W:=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}\omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-0\cdot 1} & \cdots & \omega^{-0\cdot(N-1)}\\ \omega^{-1\cdot 0} & \omega^{-1\cdot 1} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)}\\ \omega^{-2\cdot 0} & \omega^{-2\cdot 1} & \cdots & \omega^{-2\cdot(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \omega^{-(N-1)\cdot 0} & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)}\end{pmatrix},\quad U:=\sqrt{N}W$$

とおくと、$U$ は対称なユニタリ行列であることを示せ。また $W^{-1}$ の成分を求めよ。

(行列の行番号、列番号を 0 から数えることにすると、$W$ の $(n,j)$ 要素は $\dfrac{1}{N}\omega^{-nj}$ である。)

**問 42.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 $2\pi$ の周期関数であるとき、$N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$h := \frac{2\pi}{N}, \quad \omega := e^{ih} = e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

とおく。$n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

を $F(x) := \dfrac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx}$ に関する台形則

$$\left( \frac{1}{2} F(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1} F(x_j) + \frac{1}{2} F(x_N) \right) h$$

で近似すると

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}$$

となることを示せ。

**問 43.** 周期 $T$ の関数 $f$ が有限 Fourier 級数で定義できる、つまり $\{c_n\}_{n=-m}^{m} \in \mathbb{C}^{2m+1}$ があって

$$f(t) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

とする。このとき、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、$N$ 項離散 Fourier 変換 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は

$$C_n = c_n \quad (0 \le n \le m), \quad C_{N-n} = c_{-n} \quad (1 \le n \le m), \quad C_n = 0 \quad (m < n < N - m)$$

を満たすことを示せ。(つまり有限 Fourier 級数に対しては、もとの関数が完全に再生できる。)

# 離散時間 Fourier 変換

結果が周期 $2\pi$ の関数になることと、反転公式くらいは押さえておこう。

**問 44.** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

を満たすとき

$$\widehat{f}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

が収束し、$\omega$ について周期 $2\pi$ の関数となることを示せ。さらに次式が成り立つことを示せ。

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega) e^{inw} d\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

# 畳み込み

**問 45.** $\mathbb{R}$ 上定義された関数の畳み込み $f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$ $(x\in\mathbb{R})$ について、適当な仮定をおいて (あるいは積分の収束の条件などはとりあえず放置して)、以下の公式を示せ。

(1) $(f_1+f_2)*g=(f_1*g)+(f_2*g)$, $(\lambda f)*g=\lambda(f*g)$.

(2) $f*g=g*f$.  (3) $(f*g)*h=f*(g*h)$.  (4) $(f*g)'=f'*g$.

**問 46.** 次の各場合に $\mathscr{F}[f*g]$ を計算して、$\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ の定数倍であることを示せ。

(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \quad (x\in\mathbb{R}),\quad \mathscr{F}f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx \quad (\xi\in\mathbb{R}).$$

(2) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 $2\pi$ の周期関数で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \quad (x\in\mathbb{R}),\quad \mathscr{F}f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

(3) $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ が周期 $N$ の周期数列で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(n)=\sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n\in\mathbb{Z}),\quad \mathscr{F}f(n)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj} \quad (n\in\mathbb{Z}),\quad \omega=e^{2\pi i/N}.$$

(4) $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ が数列で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n\in\mathbb{Z}),\quad \mathscr{F}f(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega\in\mathbb{R}).$$

**問 47.** 連続関数 $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)),$$

(2) $$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

を満たす $u$ を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) $u$ の $x$ に関する Fourier 変換 $\hat{u}(\xi,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。

(2) $\hat{u}$ を逆 Fourier 変換することによって、$u$ を求めよ。(この問題の解の公式は有名であり (講義ノート付録 G.1 に書いておいた)、それによると $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy$ となる。検算のために用いると良い。)

# 解答

ほとんどは講義ノートに書いてあるけれど、サービス精神である程度までここに再録。

**解答 1.** $\alpha \neq 0$ とする。($\alpha = 0$ のときは定数関数なので、周期関数と考えない方が良い。) こういう問では、正の最小の周期 (それを基本周期と呼んだりする) を答えるものなので、$\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ が周期である。

$f(x) = \cos\alpha x, \sin\alpha x, e^{i\alpha x}$ のいずれも $f\left(x + \dfrac{2\pi}{\alpha}\right) = f(x)$ を満たす。$\dfrac{2\pi}{\alpha}$ が周期と言っても良いが、普通は絶対値を取った $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ を答える。■

**解答 3.** cos の加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

から

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a\cos b,\\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= -2\sin a\sin b.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),\\ \sin a\sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right).\end{aligned}$$

同様に sin の加法定理

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

から

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a\sin b.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right),\\ \cos a\sin b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).\end{aligned}$$

任意の実数 $A$, $B$ が与えられたとき、

$$a + b = A, \quad a - b = B$$

を満たす $a$, $b$ は一意的に存在して、$a = \dfrac{A+B}{2}$, $b = \dfrac{A-B}{2}$. ゆえに

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},\\ \cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\ \cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.\blacksquare\end{aligned}$$

**解答 4.** $k=0$ のとき ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $e^0 = 1$ であるから)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\;dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0x\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\;dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin 0x\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 0\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0\;dx = 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} e^{kx}\;dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{0x}\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\;dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.
\end{aligned}$$

$k \neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\;dx = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

($\sin k\pi = 0$, $\sin(-k\pi) = 0$ であるからと言っても良いし、$\sin kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 $2\pi$ の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\;dx = -\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

($\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos(-k\pi) = (-1)^{-k} = (-1)^k$ であるからと言っても良いし、$\cos kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 $2\pi$ の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{kx}\;dx = \left[\frac{e^{ikx}}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

($e^{ik\pi} = (-1)^k$, $e^{-ik\pi} = (-1)^{-k}$ であるからと言っても良いし、$e^{ikx}$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 $2\pi$ の周期関数であるからと言っても良い。)

以上、計算して確かめたが、sin, cos は 1 周期の間に山と谷が同じだけあるので、積分すると 0 になるのは、当たり前ではある。■

**復習** $k$ を整数とするとき、$\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$, $e^{ik\pi} = (-1)^k$.

**解答 6.** 「$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 $2\pi$ の周期関数で、区分的に $C^1$ 級であれば、

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\;dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\;dx$$

とおくとき、$f$ の任意の連続点 $x$ で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

が成り立つ。」という定理が基本である。

(1) 積分を計算すると $a_k = 0$, $b_k = \dfrac{2(-1)^{k-1}}{k}$ となるので、

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin kx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right) \quad (x \in (-\pi,\pi)).$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$(-\pi,\pi)$ で $f$ と一致し、$\widetilde{f}(\pi) = 0$, 後は周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に $C^1$ 級で、$\widetilde{f}$ は $(2m-1)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。

(2) $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で $f$ と一致し、周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に $C^1$ 級であるから、いたるところ収束する。

(3) $a_0 = \pi$, $a_k = \dfrac{2\left(-1+(-1)^k\right)}{k^2\pi}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(-1+(-1)^k\right)}{k^2\pi} \cos kx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]). \end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で $f$ と一致し、周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に $C^1$ 級であるから、いたるところ収束する。

(4) $a_k = 0$, $b_k = -\dfrac{2\left(1+(-1)^{k-1}\right)}{k\pi}$ となるので、

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} x &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\left(1+(-1)^{k-1}\right)}{k\pi} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right) \quad (x \in (-\pi, \pi)). \end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$(-\pi, \pi)$ で $f$ と一致し、$\widetilde{f}(\pi) = 0$, 後は周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に $C^1$ 級で、$\widetilde{f}$ は $m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。$\widetilde{f}(0+0) = 1$, $\widetilde{f}(0-0) = -1$ であるから、$\dfrac{\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)}{2} = 0 = \widetilde{f}(0)$ であるから、0 でも収束して $\widetilde{f}(0)$ に等しい。

(5) $a_0 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N},\ k \neq 2)$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ であるから

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

これは倍角の公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ から導かれる $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ からも得られる。

(6) $a_k = 0$, $b_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_3 = -\dfrac{1}{4}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N},\ k \neq 1, 3)$ であるから、

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \quad (x \in (-\pi, \pi)).$$

これは 3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ から導かれる $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ からも得られる。 ■

**解答 7.**

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

とおくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

(1) $f$ が偶関数であれば、$f(x)\cos nx$ は偶関数、$f(x)\sin nx$ は奇関数であるので、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (n\in\mathbb{N}),\\ a_n &= 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots). \end{aligned}$$

(2) $f$ が奇関数であれば、$f(x)\cos nx$ は奇関数、$f(x)\sin nx$ は偶関数であるので、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots),\\ b_n &= 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots).\blacksquare \end{aligned}$$

**解答 8.** まず結果の式を書こう。cos, sin で表す場合が

(3a) $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

(3b) $$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx \quad (n=0,1,\cdots),\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx \quad (n=1,2,\cdots).$$

複素指数関数で表す場合が

(4) $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}} \quad (x\in\mathbb{R}),\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}\,dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

**(6a), (6b) の証明** $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 $T$ であるとき、

$$F(X):=f\left(\frac{T}{2\pi}X\right) \quad (X\in\mathbb{R})$$

とおくと $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ であり、$F$ は周期 $2\pi$ である。実際、

$$F(X+2\pi)=f\left(\frac{T}{2\pi}(X+2\pi)\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}X+\frac{T}{2\pi}\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}X+T\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}X\right)=F(X).$$

ゆえに周期 $2\pi$ の関数に対する Fourier 級数の定理から

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(X)\cos nX\,dX,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(X)\sin nX\,dX$$

とおくとき

$$F(X)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nX+B_n\sin nX\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(x) &= F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\\ &= \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\frac{2\pi}{T}x+B_n\sin n\frac{2\pi}{T}x\right)\\ &= \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+B_n\cos\frac{2n\pi x}{T}\right). \end{aligned}$$

係数については、変数変換 $x = \frac{T}{2\pi}X$ によって、$dX = \frac{2\pi}{T}dx$ であるから

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(X)\cos nX\, dX = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}X\right)\cos nX\, dX = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}dx \\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx.
\end{aligned}$$

$B_n$ についても同様にして

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx. \blacksquare$$

(7) の証明も同様である (省略します)。

なお、$\cos\frac{2n\pi x}{T}$, $\sin\frac{2n\pi x}{T}$ や $e^{\frac{2n\pi i x}{T}}$ の完全性を仮定して、係数を表す式を導くこともできる。$\blacksquare$

**解答 9.** (1) まず $\widetilde{f}\colon[-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定めると、これは連続かつ区分的に滑らかな偶関数であり、$\widetilde{f}(L) = \widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L} = \cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L} = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問題 7 で $T = 2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}), \\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f} = \widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は偶関数であり、$[0,L]$ で $f$ に等しいので

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad b_n = 0.$$

以上から

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]), \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

(2) まず $\widetilde{f}\colon[-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ -f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定める。連続であるためには、$f(0) = 0$ であることが必要十分である。以下 $f(0) = 0$ と仮定する。すると $\widetilde{f}$ は区分的に滑らかな奇関数であり、$\widetilde{f}(L) = -\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。$\widetilde{f}(L) = \widetilde{f}(-L)$ が成り立つためには、$f(L) = 0$ であることが必要十分である。以下 $f(L) = 0$ と仮定する。$\widetilde{f}$ を周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L} = \cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L} = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問 7 で $T = 2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}), \\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は奇関数であり、$[0,L]$ で $f$ に等しいので

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

以上から

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\quad (x\in[0,L]),\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$f(0)=f(L)=0$ を仮定した (この必要性は、$x=0,L$ で展開が成り立つことからも分かる)。■

**解答 10.** $n>0$ のとき、$n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx}=\cos(-nx)+i\sin(-nx)=\cos nx-i\sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx-i\sin nx\right)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx-i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(a_n-ib_n\right).
\end{aligned}$$

$n=0$ のとき、$e^{-inx}=e^0=1=\cos nx$ であるから、

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx=\frac{1}{2}a_0.$$

$n<0$ のとき、$-n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx}=\cos(-nx)+i\sin(-nx)$ であるから

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,dx+i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,dx\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(a_{-n}+ib_{-n}\right).■
\end{aligned}$$

**解答 11.** (**解法 1**) 直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f=\displaystyle\sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ という結果を用いて解答する。

$\varphi_n(x)=\cos\frac{2n\pi x}{T}$ $(n=0,1,\cdots)$, $\psi_n(x)=\sin\frac{2n\pi x}{T}$ $(n=0,1,\cdots)$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくとき $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}\cup\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は直交系である。$n\neq 0$ のとき

$$(\varphi_n,\varphi_n)=\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1+\cos(4n\pi x/T)}{2}dx=\frac{T}{2},$$

$$(\psi_n,\psi_n)=\int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos(4n\pi x/T)}{2}dx=\frac{T}{2}$$

であるから

$$a_n=\frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,$$

$$b_n=\frac{(f,\psi_n)}{(\psi_n,\psi_n)}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.$$

一方

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-T/2}^{T/2} 1dx=T$$

であるから

$$\frac{a_0}{2}=\frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx.$$

すなわち

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx.$$

まとめると

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

(**解法 2**) $f$ が周期 $T$ であることから、

$$F(\xi) := f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right) \quad (\xi\in\mathbb{R})$$

とおくと、$F$ は周期 $2\pi$ である。ゆえに

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\,d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$

とおくと

$$F(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi\right).$$

ゆえに

$$f(x) = F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

$\xi = \frac{2\pi}{T}x$ であるから、$\xi = -\pi, \pi$ のとき、$x = -T/2,\, T/2$ であるから

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx.\blacksquare$$

**解答 12.** (準備中)

**解答 13.** (ii), (iii) はやれば出来るはず。(i) をきちんとやるのは難しいので、書いておく。

**(i) の証明**　$f\in X$ とするとき、任意の $x$ に対して $|f(x)|^2 \ge 0$ であるから、

$$(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \ge 0.$$

$f=0$ つまり $(\forall x\in\mathbb{R})$ のとき $f(x)=0$ であれば、$(f,f)=0$ である。逆に $(f,f)=0$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 0.$$

$|f(x)|^2$ は連続関数であるから、$(\forall x\in[-\pi,\pi])$ $|f(x)|^2 = 0$ (もしそうでないとすると、$(\exists x_0\in[-\pi,\pi])$ $|f(x_0)|^2 \ne 0$. $|f(x_0)|^2 > 0$ であるが、$|f|^2$ の連続性から、$x_0$ の十分近くでは $|f(x)|^2 \ge |f(x_0)|^2/2 > 0$. すると $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx > 0$ となり矛盾する)。ゆえに $f(x)=0$ $(x\in[-\pi,\pi])$. $f$ は周期 $2\pi$ の関数だから $f(x)=0$ $(x\in\mathbb{R})$. すなわち $f=0$. $\blacksquare$

**解答 14.**

$$(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \overline{(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, f)} = \overline{\lambda_1 (f_1, g) + \lambda_2 (f_2, g)} = \overline{\lambda_1}\, \overline{(g_1, f)} + \overline{\lambda_2}\, \overline{(g_2, f)}$$
$$= \overline{\lambda_1} (f, g_1) + \overline{\lambda_2} (f, g_2) .\blacksquare$$

**解答 15.** 任意の複素数 $z$ に対して、$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ が成り立つことに注意すると、

$$(f+g, f+g) = (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) = (f,f) + (f,g) + \overline{(f,g)} + (g,g)$$
$$= (f,f) + 2\operatorname{Re}(f,g) + (g,g).\blacksquare$$

**解答 16.** $(tf+g, tf+g)$ を内積の公理 (ii), (iii) を使って変形すると

$$t^2(f,f) + 2t(f,g) + (g,g) \geq 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

一般に $(f,f) \geq 0$ であるが、$(f,f) > 0$ か、$(f,f) = 0$ かで場合分けする。

(a) $(f,f) > 0$ の場合、2次関数の符号が0以上ということから、判別式$\leq 0$. ゆえに $(2(f,g))^2 - 4(f,f)(g,g) \leq 0$. 整理すると $(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g)$. ゆえに ($\sharp$) の不等式が成り立つ。

(b) $(f,f) = 0$ の場合、$(\forall t \in \mathbb{R})$ $2t(f,g) + (g,g) \geq 0$ より $(f,g) = 0$ でなければならない ($(f,g) \neq 0$ ならば矛盾が導かれる)。ゆえに ($\sharp$) の不等式の両辺とも 0 で、不等式は成立する。

等号の成立条件を考える。

$f$ と $g$ が1次従属のとき、等号が成り立つことは簡単に分かるので省略する。

$f$ と $g$ が1次独立のときは、上の議論をていねいにたどると、$(f,g)^2 < (f,f)(g,g)$ が導かれる。(実際、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $tf + g \neq 0$ であるので、$(tf+g, tf+g) > 0$ であり、2次関数の符号が正であるから、判別式は負である。) ゆえに ($\sharp$) で等号が成り立つならば、$f$ と $g$ は1次独立ではない。 $\blacksquare$

(少し書き方を変えて) $f$ と $g$ が1次従属のとき、$(\exists t \in \mathbb{R})$ $f = tg$ または $(\exists s \in \mathbb{R})$ $g = sf$. 前者の場合、($\sharp$) の不等式の両辺はともに $t^2 (g,g)^2$. 後者の場合、($\sharp$) の不等式の両辺はともに $s^2 (f,f)^2$. ゆえに ($\sharp$) の不等式で等号が成立する。

$f$ と $g$ が1次独立のとき (このとき $f \neq 0$ であることに注意)、$(\forall t \in \mathbb{C})$ $tf + g \neq 0$. 特に、$(f,g) = |(f,g)|\, e^{i\theta}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ を取って、$t = se^{-i\theta}$ $(s \in \mathbb{R})$ とおくと、$t(f,g) = s\,|(f,g)|$ であるから、

$$(tf+g, tf+g) = (tf, tf) + 2\operatorname{Re}(tf, g) + (g,g) = |t|^2 (f,f) + 2\operatorname{Re}[t(f,g)] + (g,g)$$
$$= s^2(f,f) + 2s\,|(f,g)| + (g,g).$$

ゆえに任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して、

$$s^2(f,f) + 2s\,|(f,g)| + (g,g) > 0.$$

判別式は負でなければならないので、$|(f,g)|^2 < (f,f)(g,g)$. $\blacksquare$

**解答 17.** $f, g \in X$ とする。任意の複素数 $\lambda$ に対して、

$$0 \leq (\lambda f + g, \lambda f + g) = |\lambda|^2 (f,f) + 2\operatorname{Re}(f,g) + (g,g) \tag{5}$$

が成り立つ。複素数 $(f,g)$ の指数形式を $(f,g) = \rho e^{i\phi}$ $(\rho \geq 0,\ \phi \in \mathbb{R})$ とする。$\rho = |(f,g)|$ である。任意の実数 $t$ に対して、$\lambda := te^{-i\phi}$ とおいて、(8) に代入すると、$\lambda(f,g) = te^{-i\phi} \cdot |(f,g)|\, e^{i\phi} = t\,|(f,g)|$ であるから

$$t^2 (f,f) + 2t\,|(f,g)| + (g,g) \geq 0.$$

ここから後は、問 17 と同様である。 $\blacksquare$

**解答 18.** (準備中) 不等式自体は成り立つ。■

**解答 19.** 任意の $f \in X$ に対して、$(f,f) \ge 0$ であるから、$\sqrt{(f,f)}$ は意味を持ち、$\|f\|$ が定義できる。

(a) 任意の $f \in X$ に対して、$(f,f) \ge 0$ であるから、$\|f\| = \sqrt{(f,f)} \ge 0$. また $\|f\| = 0 \Leftrightarrow (f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(b) 任意の $f \in X$, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\|\lambda f\| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\,(f,f)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(f,f)} = |\lambda|\sqrt{(f,f)} = |\lambda|\,\|f\|\,.$$

(c) 任意の $f, g \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) = \|f\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}(f,g) + \|g\|^2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\|f\| + \|g\|)^2 - \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 - \left(\|f\|^2 + 2\operatorname{Re}(f,g) + \|g\|^2\right) \\ &= 2\,(\|f\|\,\|g\| - \operatorname{Re}(f,g)) \\ &\ge 2\,(\|f\|\,\|g\| - |(f,g)|) \ge 0.\end{aligned}$$

最後のところで Schwarz の不等式 $|(f,g)|^2 \le (f,f)(g,g)$ を用いた。これから

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|\,.■$$

**解答 20.** 条件 (ii) と問 14 で示したこと、それと $a \in \mathbb{C}$ に対して $a + \overline{a} = 2\operatorname{Re} a$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(f+g, f+g) &= (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) \\ &= (f,f) + (f,g) + \overline{(f,g)} + (g,g) = (f,f) + 2\operatorname{Re}(f,g) + (g,g).■\end{aligned}$$

**解答 21.**

$$\begin{aligned}\|a_1 + \cdots + a_n\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j, a_j) + \sum_{1\le j<k\le n} (a_j, a_k) + \sum_{1\le k<j\le n} (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 + \sum_{1\le j<k\le n} 0 + \sum_{1\le k<j\le n} 0 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2\,.■\end{aligned}$$

**解答 22.**

(1) $\{\varphi_n\} \in \mathbb{N}$ を正規直交系とする。$n \ne m$ のとき $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = 0$. また $(\varphi_n, \varphi_n) = \delta_{nn} = 1 \ne 0$.

(2) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を直交系とする。$N \in \mathbb{N}$, $c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K}$ が

$$\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j = 0$$

を満たすとするとき、$1 \le n \le N$ を満たす $n$ に対して、

$$0 = (0, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^N c_j\,(\varphi_j, \varphi_n) = \sum_{j=1}^N c_j\delta_{jn} = c_n\delta_{nn} = c_n \cdot 1 = c_n.$$

すなわち $c_1 = \cdots = c_N = 0$. ゆえに $\{\varphi_n\}$ は 1 次独立である。■

**解答 23.** (少し雑だけど、とりあえず) $u_1, u_2, \cdots \in X$ は 1 次独立とするとき、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ で、

$$\mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle$$

が成り立つようなものを求める。

$n = 1, 2, \cdots$ の順に $\varphi_n$ を定める。まず

$$\varphi_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \tag{GS1}$$

とおくと、$\{\varphi_1\}$ は正規直交系であり ($\because \|\varphi_1\| = 1$)、$\mathrm{Span}\langle u_1\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1\rangle$.

$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ まで求まった (正規直交系であり、$\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ が成り立つ) とする。

$$\psi_{k+1} := u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j \tag{GS2}$$

とおく。$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ は正規直交系だから、

$$\begin{aligned}
(\psi_{k+1}, \varphi_j) &= \left(u_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)\varphi_\ell, \varphi_j\right) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)(\varphi_\ell, \varphi_j) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - (u_{k+1}, \varphi_j) \cdot 1 = 0 \quad (j = 1, \cdots, k).
\end{aligned}$$

また $\psi_{k+1} \neq 0$ である (もしも $\psi_{k+1} = 0$ とすると、$u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j \in \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ となり、$u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}$ が 1 次独立であることに反する)。

$$\varphi_{k+1} := \frac{1}{\|\psi_{k+1}\|} \psi_{k+1} \tag{GS3}$$

とおくと、$(\varphi_{k+1}, \varphi_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$, $(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}) = 1$. ゆえに $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}$ は正規直交系である。また $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_{k+1}\rangle$ が成り立つ。■

**解答 24.**

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n, \frac{1}{\|\varphi_m\|}\varphi_m, \right) = \frac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} (\varphi_n, \varphi_m) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_n\|} (\varphi_n, \varphi_n) = 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} \cdot 0 = 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \\
&= \delta_{nm}. ■
\end{aligned}$$

**解答 25.** (準備中。講義ノートには書いてあります。) ■

**解答 26.** (講義では、$s_n = \sum_{j=1}^{N} (f, \varphi_n)\varphi_n$ が $f$ の $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_N\rangle$ への直交射影である (つまり $s_n = h$) と言って証明したけれど、この不等式を証明するだけならば、以下のような手短な証明が書ける。)

$N \in \mathbb{N}$ とする。$h_N := \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k$ とおくと、$1 \le j \le N$ なる $j$ に対して

$$\begin{aligned}
(f - h_N, \varphi_j) &= \left(f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_j\right) = (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) \\
&= (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\delta_{kj} = (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに[4]

$$(f-h_N,h_N)=\left(f-h_N,\sum_{j=1}^N (f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N \overline{(f,\varphi_j)}(f-h_N,\varphi_j)=0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\|f-h_N+h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+2\operatorname{Re}(f-h_N,h_N)+\|h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+\|h_N\|^2\\&\ge \|h_N\|^2.\end{aligned}$$

$\varphi_j$ $(j=1,\cdots,N)$ は互いに直交しているので (ピタゴラスの定理から)

$$\sum_{k=1}^N |(f,\varphi_k)|^2=\left\|\sum_{k=1}^N (f,\varphi_j)\varphi_j\right\|^2=\|h_N\|^2\le\|f\|^2.$$

これが任意の $N\in\mathbb{N}$ について成り立つことから

$$\sum_{k=1}^\infty |(f,\varphi_k)|^2\le\|f\|^2.\blacksquare$$

(テキストによっては、$\|f\|^2$ から始めて、一気に $\|f-h_N\|^N+\|h_N\|^2$ に等しいことを導いているものもある。)

**解答 27.** まず (念のため) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ は正規直交系であることを確かめよう。$\{\cos nx\}_{n\ge 0}\cup\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ が直交系であることは分かっているので、長さが 1 であることを確かめれば良い。

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2dx&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right|^2dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right|^2dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,;dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1.\end{aligned}$$

$a_0'$, $a_n'$, $b_n'$ をこの正規直交系に関する係数とする。すなわち

$$\begin{aligned}a_0'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f,1),\\ a_n'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\cos nx),\\ b_n'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\sin nx).\end{aligned}$$

Bessel の不等式は

$$(\star)\qquad |a_0'|^2+\sum_{n=1}^\infty |a_n'|^2+\sum_{n=1}^\infty |b_n'|^2\le\|f\|^2.$$

ところで

$$a_0=\frac{1}{\pi}(f,1),\quad a_n=\frac{1}{\pi}(f,\cos nx),\quad b_n=\frac{1}{\pi}(f,\sin nx)\quad (n\in\mathbb{N})$$

[4]最初から一気に証明出来なくもない。$(f-h_N,h_N)=\left(f-\sum_{k=1}^N (f,\varphi_k)\varphi_k,\sum_{j=1}^N (f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N\overline{(f,\varphi_j)}(f,\varphi_j)-\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N (f,\varphi_k)\overline{(f,\varphi_j)}(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{j=1}^N|(f,\varphi_j)|^2-\sum_{k=1}^N|(f,\varphi_k)|^2=0.$

であるから、

$$a'_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \quad a'_n = \sqrt{\pi} a_n, \quad b'_n = \sqrt{\pi} b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$(\star)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |a_n|^2 + + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |b_n|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

両辺を $\pi$ で割って

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( |a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx. \blacksquare$$

**解答 28.**

(1) $f$ は連続で区分的に $C^1$ 級なので、$f$ の Fourier 級数は一様収束して、和は $f$ に等しい。特に任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right).$$

$x = 0$ を代入して

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} S_{奇}.$$

ゆえに

$$S_{奇} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(余談になるが、$S = \dfrac{4}{3} S_{奇} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$.)

(2) $a_0 = \pi$, $a_n = \dfrac{4}{n^2 \pi}$ ($n$ が奇数), $a_n = 0$ ($n$ が正の偶数), $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) であるので、

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( |a_n|^2 + |b_n|^2 \right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \right).$$

一方

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Parseval の不等式に代入して

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} Q_{奇} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$Q_{奇} = \frac{\pi^2}{16} \left( \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{96}. \blacksquare$$

**余談** (余談になるが、$Q_{偶} = \dfrac{1}{2^4} Q = \dfrac{Q}{16}$ であるから、$Q_{奇} = Q - Q_{偶} = \dfrac{15}{16} Q$ であるので、$Q = \dfrac{16}{15} Q_{奇} = \dfrac{16}{15} \cdot \dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$. 一つの Fourier 級数展開から $S$ と $Q$ が求まるのはちょっと面白い。)
(参考: Mathematica で `Sum[1/n^4,{n,1,Infinity,2}]` とすると、$\pi^4/96$ と答えてくれる。)

**解答 29.** $\mathbb{R}^n$ の内積に関する Schwarz の不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} b_n^2} \quad ((a_1,\dots,a_N),(b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^N)$$

を思い出そう。

$|x_n|$, $|y_n|$ をこの Schwarz の不等式の $a_n$, $b_n$ とみなすことによって

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{N} |x_n|\,|y_n| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2}.$$

0 以上のものはたくさん足した方が大きいので

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}.$$

この右辺を $M$ とおくと、

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \le M.$$

これは級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ の部分和の作る数列が上に有界ということを示している。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ は収束する。すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ は絶対収束する。したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ は収束し、

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le M = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}.\blacksquare$$

**(余談)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ であるような複素数列 $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の全体を $\ell^2$ と表す。$a,b\in\ell^2$ とするとき

$$(a,b) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

により $(a,b)\in\mathbb{C}$ が定義できることがこの問題から分かる。$\ell^2$ はこの $(a,b)$ を内積として内積空間になる。

**解答 30.** 複素数列全体の集合が問題文に定義した和と複素数倍について、$\mathbb{C}$ 上の線形空間をなすことは認めることにする。零ベクトルは $\mathbf{0} := \{0,0,0,\cdots\}$.

$\{x_n\}\in\ell^2$, $\lambda\in\mathbb{C}$ であれば、$\{\lambda x_n\}\in\ell^2$ は容易に分かる。

$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \le 2\left(|x|^2 + \|y\|^2\right)$ に注意すると、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n| \le 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right) < \infty.$$

ゆえに $\{x_n\}+\{y_n\}\in\ell^2$.

$|x|\,|\bar{y}| \le |x|^2 + |y|^2$ であるから、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ は収束するので、$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ が定義できる。

以上から、$\ell^2$ は、問題文中の和、複素数倍、$(\cdot,\cdot)$ が定義できる。

$(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことの確認をしよう。

$$(\{x_n\},\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \ge 0.$$

また

$$(\{x_n\},\{x_n\})=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad |x_n|^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad x_n=0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\}=\mathbf{0}.$$

線形性 $(\lambda\{x_n\}+\mu\{y_n\},\{z_n\})=\lambda(\{x_n\},\{z_n\})+\mu(\{y_n\},\{z_n\})$, 対称性 $(\{y_n\},\{x_n\})=\overline{(\{x_n\},\{y_n\})}$ も容易に確かめられる (サボる)。

以上より $\ell^2$ は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。■

**解答 31.**

(1) ( グラフを描くのが良い。) 一周期区間 $[-\pi,\pi]$ に制限すると、$x=0,\pm\pi$ で不連続、$(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ で連続である。周期 $2\pi$ の周期関数であるから、$n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ で不連続で、$x\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}$ では連続である。ゆえに不連続点は $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(2) $x=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0)=g(0+0)=1$, $g(x-0)=g(0-0)=-1$. $x=(2k-1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0)=g(-\pi+0)=-1$, $g(x-0)=g(\pi-0)=1$.

(3) $g$ は周期 $2\pi$、 区分的に $C^1$ 級であるので、$g$ の Fourier 級数は各点で収束し、和 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\begin{cases} g(x) & (x \text{ が } g \text{ の連続点}) \\ \dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2} & (x \text{ が } g \text{ の不連続}). \end{cases}$$

(2) より $x$ が $g$ の不連続点のとき、$g(x+0)+g(x-0)=\pm1+\mp1=0=g(x)$ であるから、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x).$$

(任意の $x$ で $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ となるのは、最初に $g(x)=0$ $(x=0,\pm\pi)$ と定義したからで、もともとそうする必然性はあまりないけれど (どうせ、どうやっても $g$ は不連続なので)、そうしておけば、最後に全部の点で極限が $g$ に等しくなって気持ち良いかな、と思ったくらいの理由しかありません。Fourier 級数の方は積分で定まるので，$x=0,\pm\pi$ での値をどう定義しても変化しないことに注意。) ■

**解答 32.** $f$ は周期 $2\pi$ であるから $f(\pi)=f(-\pi)$ であることに注意する。

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(0x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(f(\pi)-f(-\pi)\right)=0.$$

$n\in\mathbb{N}$ とするとき、部分積分によって

$$\begin{aligned} A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)dx\right)\\ &=\frac{1}{\pi}\left(0+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)=n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=nb_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(n\cos nx)dx\right)\\ &=\frac{1}{\pi}\left(0-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)=-n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=-na_n. \end{aligned}$$

複素 Fourier 係数については、(準備中) ■

**解答 33.**

(1) 仮定より、$M_n := |a_n| + |b_n|$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束し、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n|\,|\cos nx| + |b_n|\,|\sin nx| \le |a_n| \cdot 1 + |b_n| \cdot 1 = M_n.$$

Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は一様に絶対収束する。各項 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は連続関数であるから、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ は連続であり、その一様収束の極限である $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は連続である。

(2) 連続関数 $|\varphi|$ は $[-\pi, \pi]$ で最大値 $M$ を取ることから、

$$f(x)\overline{\varphi(x)} = \frac{a_0}{2}\,\overline{\varphi(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\overline{\varphi(x)}$$

も一様収束する。このことは、(1) と同様に Weierstrass の M-test をしても良いし ($M_n := M\left(|a_n| + \|b_n\|\right)$ とする)、

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x)\overline{\varphi(x)} - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)\overline{\varphi(x)} \right| \\
&\quad \le M \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \right|
\end{aligned}$$

という不等式からも分かる ($N \to \infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、左辺も 0 に収束する)。従って項別積分が可能で

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\varphi(x)}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\overline{\varphi(x)}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\overline{\varphi(x)}dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\overline{\varphi(x)}dx\right) \\
&= \frac{a_0}{2}(1, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (\cos nx, \varphi) + b_n (\sin nx, \varphi)\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 34.** (これは授業中にやったので省略する。有限個の点を除いて $g(x) = \operatorname{sign} x$ であるから、実は $f$ と $g$ の Fourier 級数は、実質的に (No. 1 の) 問 6 で求めてある。Fourier 級数展開の結果は

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \\
g(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right), \\
h(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k-1)x = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots\right).
\end{aligned}$$

コンピューターを用いて部分和を描く方法は「宿題 1 のグラフ描き」[5]) を見よ。$f$ は $(2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 以外では微分可能で、微分可能なところでは

$$f'(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

[5] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2014/toi1-drawing.pdf

実は超関数の意味で $f' = g,\ g' = h$ が成り立つ。$f$ の Fourier 級数展開を項別に微分したものが $g$ の Fourier 級数展開に等しく、$g$ の Fourier 級数展開を項別に微分したものが $h$ の Fourier 級数展開に等しくなっている。 ■

**解答 35.** (1) $f$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$ は次式で定義される。

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

$g$ の共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^* g$ は次式で定義される。

$$\mathscr{F}^* g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(2) 適当な条件の下で、$\mathscr{F}^*[\mathscr{F}f] = f,\ \mathscr{F}[\mathscr{F}^a stg] = g$ が成り立つ。これらを Fourier の反転公式と呼ぶ。Fourier 級数の場合は、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

という式が反転公式に相当する。 ■

**解答 36.** 講義ノートの **2.3「Fourier 変換の簡単な性質」** に書いてある。 ■

**解答 37.**

(1) 前半は $\sqrt{3}x = y$ と変数変換して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dy = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$

後半は、まず定義から

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-3x^2}e^{-ix\xi}dx.$$

平方完成して

$$-3x^2 - ix\xi = -3\left(x + \frac{i\xi}{6}\right)^2 - \frac{\xi^2}{12}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] &= e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x+i\xi/6)^2}dx = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/12} = \frac{e^{-\xi^2/12}}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

(2 つめの等号は、複素関数論の積分路の変形を用いる。詳細は省略。なお、授業では別解も紹介した。講義ノートの 1.4.5 に載せてある。)

(2) (i) 積分区間を、負の範囲と正の範囲で分けて、負の範囲の方は $y = -x$ と変数変換すると[6]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-3|x|}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-ix\xi}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_0^{\infty} e^{-3x}e^{ix\xi}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(3+i\xi)x}}{-(3+i\xi)} + \frac{e^{-(3-i\xi)x}}{-(3-i\xi)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3+i\xi} + \frac{1}{3-i\xi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{6}{\xi^2+9} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^2+9}.\end{aligned}$$

[6] この辺は好みの問題で、変数変換しなくても計算できる。

(ii) 反転公式を用いると、(i) の結果から

$$\mathcal{F}^*\left[\frac{1}{\xi^2+9}\right](x)=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|x|}.$$

公式 $\mathcal{F}f(\xi)=\mathcal{F}^*f(-\xi)$ を用いて

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+9}\right](\xi)=\mathcal{F}^*\left[\frac{1}{x^2+9}\right](-\xi)=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|-\xi|}=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|\xi|}.$$

(iii) これも単純な計算で

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\frac{1}{6}e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-3}^{x=3}\\&=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i3\xi}-e^{i3\xi}}{-i\xi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{3\xi}\frac{e^{i3\xi}-e^{-i3\xi}}{2i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin 3\xi}{3\xi}.\end{aligned}$$

(iv) はこれを反転させて

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right](\xi)=\sqrt{2\pi}f(-\xi)=\sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (|\xi|<3)\\ 0 & (|\xi|>3).\end{cases}$$

細かいことを言うと、(不連続点では、片側極限の平均値に収束するので) $\xi=\pm3$ では $\sqrt{2\pi}\times\dfrac{1}{12}$ という値を取る (試験ではここまで書かなくても良いことにする)。 ■

最後の結果は

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{sign}\ (3-y)+\mathrm{sign}\ (3+y)\right)$$

となるが、

$$=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\mathrm{sign}\ (3-y)+\mathrm{sign}\ (y+3)}{2}$$

であるから、OK.

**解答 38.** (結果のみ) $\mathscr{F}^2f(x)=\mathscr{F}(\mathscr{F}f)(x)=\mathscr{F}^*(\mathscr{F}f)(-x)=f(x)\ (x\in\mathbb{R})$. ゆえに $\mathscr{F}^4f=f$. ■

**解答 39.** (準備中)

**解答 40.**

(1) 一般に $(e^z)^n=e^{nz}$ であるので、

$$\omega^N=\left(e^{2\pi i/N}\right)^N=e^{2\pi i}=1.$$

(2) $m\in\mathbb{N},\ 1\le m\le N-1$ とするとき、$0<m/N<N$ であるから、$0<2\pi m/N<2\pi$, $\cos\dfrac{2\pi m}{N}\ne1$. ゆえに

$$\omega^m=\left(e^{2\pi i/N}\right)^m=e^{2\pi im/N}=\cos\frac{2\pi m}{N}+i\sin\frac{2\pi m}{N}\ne1.$$

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}$ は公比 $\omega^m$ の等比数列であるが、(1), (2) から、$m\equiv0\pmod N$ のとき $\omega^m=1$, そうでないとき $\omega^m\ne1$ である。

$$\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}=\begin{cases}\dfrac{(\omega^m)^N-1}{\omega^m-1}=\dfrac{1-1}{\omega^{m-1}}=0 & (m\not\equiv0\pmod N)\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}1=N & (m\equiv0\pmod N).\blacksquare\end{cases}$$

**解答 41.** 講義ノートの **3.2** の命題3.3 (p. 47) は、$W=\left(\dfrac{1}{N}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$W^{-1}=\left(\omega^{(j-1)(n-1)}\right)$ という内容である。この証明を真似すれば良い。

命題 3.3 を使って良いならば、$\overline{\omega}=\omega^{-1}$ であるので、$U=\sqrt{N}W=\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$U^*=\overline{U^T}=\overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(j-1)(n-1)}\right)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{(j-1)(n-1)}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1}$. ゆえに $UU^*=\sqrt{N}W\dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1}=I$. ■

**解答 42.** 講義ノートの 1.1「離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか」に書いてある。 ■

**解答 43.** 今年度は、定理 3.2.4 とした。$N>2m$ となるように $N$ を取れば良い。命題 3.1.2「離散フーリエ係数の性質」、特に $C_n=\displaystyle\sum_{m\equiv n}c_m$ という式を理解せよ、という問題である。詳しいことは省略する。 ■

**解答 44.** 離散時間 Fourier 変換については、講義ノートの 5 節に書いてあるわけだが、収束については $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2<\infty$ の場合に軽く言及しているだけだった。(注意: 繰り返しになるけれど、この講義では、級数や積分の収束の証明を出来ることを要求しない。) 反転公式についても、Fourier 級数の話と同じだよね、で済ませてあった。以下は講義内容の補足として。

**収束について**　$M_n:=|f(n)|$ とおくと、$\left|f(n)e^{-in\omega}\right|=|f(n)|=M_n$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}M_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|<\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}$ は一様に絶対収束するので、特に収束する。

**周期性について**　(これは講義ノートに書いてあるけれど、ついでだから) $n\in\mathbb{Z}$ に対して、$e^{-i2n\pi i}=1$ であるから

$$\widehat{f}(\omega+2\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in(\omega+2\pi)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}e^{-i2n\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}=\widehat{f}(\omega).$$

ゆえに $\widehat{f}$ は周期 $2\pi$ である。

**反転公式について**　これは Fourier 級数の Fourier 係数がどうなるか、という話である。$\left\{e^{-inx}\right\}$ は直交系で

$$\left(e^{-inx},e^{-inx}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}\overline{e^{-inx}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$$

であるから、$e^{inx}$ の係数 $f(n)$ は

$$f(n)=\frac{\left(f,e^{-inx}\right)}{\left(e^{-inx},e^{-inx}\right)}=\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{e^{-inx}}\,dx}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}\,dx.■$$

**解答 45.** (4) 以外は講義ノート **7.4「畳み込みの基本的な性質の証明」**(pp. 60–60) に書いてある。(4) は **7.3.2「静電場からの例」** に書いてある。 ■

**解答 46.**

(1) $h := f * g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}
$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi).\blacksquare
\end{aligned}
$$

(2) $h := f * g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}
$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}e^{-iny}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy \\
&= \mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).\blacksquare
\end{aligned}
$$

(3) $h := f * g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\omega^{-nj}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).
\end{aligned}
$$

$\ell = j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell=-k$, $j=N-1$ のとき $\ell=N-1-k$, $j=\ell+k$, $\omega^{-nj}=\omega^{-in(\ell+k)}=\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}\right)g(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk}\\
&= N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).\blacksquare
\end{aligned}$$

(4) $h := f*g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi}\\
&= \sum_{k=-\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k)\\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi}\right)\\
&= \mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi).\blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 47.** (準備中。2016 年度のレポート課題 2 の一部なので、講義では説明してある。)

Mathematica で検算

```
ft[f_,x_,y_]:=FourierTransform[f, x, y, FourierParameters -> {0, -1}]

ft[Exp[-3 x^2], x, y]
ft[Exp[-3 Abs[x]],x,y]
ft[1/(x^2+9),x,y]

f[x_] := If[Abs[x] < 3, 1/6, 0]
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
ft[f[x], x, y]

ft[Sin[3x]/(3x),x,y]
```

## 解答

**解答 1.** $\alpha \neq 0$ とする。($\alpha=0$ のときは定数関数なので、周期関数と考えない方が良い。) こういう問では、正の最小の周期 (それを基本周期と呼んだりする) を答えるものなので、$\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ が周期である。

$f(x)=\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $e^{i\alpha x}$ のいずれも $f\left(x+\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)=f(x)$ を満たす。$\dfrac{2\pi}{\alpha}$ が周期と言っても良いが、普通は絶対値を取った $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ を答える。■

**解答 3.** cos の加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

から

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b, \\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= -2\sin a \sin b.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \\
\sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right).
\end{aligned}$$

同様に sin の加法定理

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

から

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b, \\
\sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a \sin b.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right), \\
\cos a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).
\end{aligned}$$

任意の実数 $A$, $B$ が与えられたとき、

$$a+b = A, \quad a-b = B$$

を満たす $a$, $b$ は一意的に存在して、$a = \dfrac{A+B}{2}$, $b = \dfrac{A-B}{2}$. ゆえに

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \\
\sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}, \\
\cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 4.** $k=0$ のとき ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $e^0 = 1$ であるから)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin 0x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 0\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0\, dx = 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} e^{kx}\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{0x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.
\end{aligned}$$

$k \neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$(\sin k\pi = 0, \sin(-k\pi) = 0$ であるからと言っても良いし、$\sin kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 $2\pi$ の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = -\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$(\cos k\pi = (-1)^k, \cos(-k\pi) = (-1)^{-k} = (-1)^k$ であるからと言っても良いし、$\cos kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 $2\pi$ の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{kx} \, dx = \left[\frac{e^{ikx}}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$(e^{ik\pi} = (-1)^k, e^{-ik\pi} = (-1)^{-k}$ であるからと言っても良いし、$e^{ikx}$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 $2\pi$ の周期関数であるからと言っても良い。)

以上、計算して確かめたが、sin, cos は 1 周期の間に山と谷が同じだけあるので、積分すると 0 になるのは、当たり前ではある。■

**復習** $k$ を整数とするとき、$\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$, $e^{ik\pi} = (-1)^k$.

**解答 6.** 「$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 $2\pi$ の周期関数で、区分的に $C^1$ 級であれば、

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \, dx$$

とおくとき、$f$ の任意の連続点 $x$ で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

が成り立つ。」という定理が基本である。

(1) 積分を計算すると $a_k = 0$, $b_k = \dfrac{2(-1)^{k-1}}{k}$ となるので、

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin kx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right) \quad (x \in (-\pi, \pi)).$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$(-\pi, \pi)$ で $f$ と一致し、$\widetilde{f}(\pi) = 0$, 後は周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に $C^1$ 級で、$\widetilde{f}$ は $(2m-1)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。

(2) $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で $f$ と一致し、周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に $C^1$ 級であるから、いたるところ収束する。

(3) $a_0=\pi,\ a_k=\dfrac{2\left(-1+(-1)^k\right)}{k^2\pi},\ b_k=0\ (k\in\mathbb{N})$ となるので、

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(-1+(-1)^k\right)}{k^2\pi}\cos kx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)\quad (x\in[-\pi,\pi]).$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$[-\pi,\pi]$ で $f$ と一致し、周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に $C^1$ 級であるから、いたるところ収束する。

(4) $a_k=0,\ b_k=-\dfrac{2\left(1+(-1)^{k-1}\right)}{k\pi}$ となるので、

$$\operatorname{sign} x=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\left(1+(-1)^{k-1}\right)}{k\pi}\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$
$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)\quad (x\in(-\pi,\pi)).$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$(-\pi,\pi)$ で $f$ と一致し、$\widetilde{f}(\pi)=0$, 後は周期 $2\pi$ である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に $C^1$ 級で、$\widetilde{f}$ は $m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。$\widetilde{f}(0+0)=1$, $\widetilde{f}(0-0)=-1$ であるから、$\dfrac{\widetilde{f}(0+0)+\widetilde{f}(0-0)}{2}=0=\widetilde{f}(0)$ であるから、0 でも収束して $\widetilde{f}(0)$ に等しい。

(5) $a_0=1,\ a_2=\dfrac{1}{2},\ a_k=0\ (k\in\mathbb{N},\ k\neq 2),\ b_k=0\ (k\in\mathbb{N})$ であるから

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\quad (x\in[-\pi,\pi]).$$

これは倍角の公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ から導かれる $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ からも得られる。

(6) $a_k=0,\ b_1=\dfrac{3}{4},\ b_3=-\dfrac{1}{4},\ b_k=0\ (k\in\mathbb{N},\ k\neq 1,3)$ であるから、

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\quad (x\in(-\pi,\pi)).$$

これは 3 倍角の公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ から導かれる $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$ からも得られる。 ■

**解答 7.**

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

とおくと

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

(1) $f$ が偶関数であれば、$f(x)\cos nx$ は偶関数、$f(x)\sin nx$ は奇関数であるので、

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0\quad (n\in\mathbb{N}),$$
$$a_n=2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(2) $f$ が奇関数であれば、$f(x)\cos nx$ は奇関数、$f(x)\sin nx$ は偶関数であるので、

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n=2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\cdots).\blacksquare$$

**解答 8.** まず結果の式を書こう。cos, sin で表す場合が

(6a) $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)\quad(x\in\mathbb{R}),$$

(6b) $$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx\quad(n=0,1,\cdots),\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx\quad(n=1,2,\cdots).$$

複素指数関数で表す場合が

(7) $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{2n\pi x}{T}}\quad(x\in\mathbb{R}),\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}\,dx\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

**(6a), (6b) の証明** $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 $T$ であるとき、

$$F(X):=f\left(\frac{T}{2\pi}X\right)\quad(X\in\mathbb{R})$$

とおくと $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ であり、$F$ は周期 $2\pi$ である。実際、

$$F(X+2\pi)=f\left(\frac{T}{2\pi}(X+2\pi)\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}X+\frac{T}{2\pi}\cdot2\pi\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}X+T\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}X\right)=F(X).$$

ゆえに周期 $2\pi$ の関数に対する Fourier 級数の定理から

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(X)\cos nX\,dX,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(X)\sin nX\,dX$$

とおくとき

$$F(X)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nX+B_n\sin nX\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}f(x)&=F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\\&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\frac{2\pi}{T}x+B_n\sin n\frac{2\pi}{T}x\right)\\&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+B_n\cos\frac{2n\pi x}{T}\right).\end{aligned}$$

係数については、変数変換 $x=\frac{T}{2\pi}X$ によって、$dX=\frac{2\pi}{T}dx$ であるから

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(X)\cos nX\,dX=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}X\right)\cos nX\,dX=\frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}dx\\&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx.\end{aligned}$$

$B_n$ についても同様にして

$$B_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.\blacksquare$$

(7) の証明も同様である (省略します)。

なお、$\cos\frac{2n\pi x}{T}$, $\sin\frac{2n\pi x}{T}$ や $e^{\frac{2n\pi i x}{T}}$ の完全性を仮定して、係数を表す式を導くこともできる。■

**解答 9.** (1) まず $\widetilde{f}\colon [-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定めると、これは連続かつ区分的に滑らかな偶関数であり、$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L}=\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L}=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問題 7 で $T=2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),\\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は偶関数であり、$[0,L]$ で $f$ に等しいので

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\quad b_n=0.$$

以上から

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\quad (x\in[0,L]),\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

(2) まず $\widetilde{f}\colon [-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ -f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定める。連続であるためには、$f(0)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(0)=0$ と仮定する。すると $\widetilde{f}$ は区分的に滑らかな奇関数であり、$\widetilde{f}(L)=-\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ が成り立つためには、$f(L)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(L)=0$ と仮定する。$\widetilde{f}$ を周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L}=\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L}=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問 7 で $T=2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),\\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は奇関数であり、$[0,L]$ で $f$ に等しいので

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

以上から

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\quad (x\in[0,L]),\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$f(0)=f(L)=0$ を仮定した (この必要性は、$x=0,L$ で展開が成り立つことからも分かる)。■

**解答 10.** $n>0$ のとき、$n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx}=\cos(-nx)+i\sin(-nx)=\cos nx-i\sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx - i\sin nx\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right). \end{aligned}$$

$n=0$ のとき、$e^{-inx}=e^0=1=\cos nx$ であるから、

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx = \frac{1}{2}a_0.$$

$n<0$ のとき、$-n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx}=\cos(-nx)+i\sin(-nx)$ であるから

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,dx + i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right).\blacksquare \end{aligned}$$

**解答 11.** (**解法 1**) 直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f=\sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ という結果を用いて解答する。

$\varphi_n(x)=\cos\frac{2n\pi x}{T}$ $(n=0,1,\cdots)$, $\psi_n(x)=\sin\frac{2n\pi x}{T}$ $(n=0,1,\cdots)$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくとき $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}\cup\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は直交系である。$n\neq 0$ のとき

$$(\varphi_n,\varphi_n)=\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1+\cos(4n\pi x/T)}{2}dx=\frac{T}{2},$$

$$(\psi_n,\psi_n)=\int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos(4n\pi x/T)}{2}dx=\frac{T}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx, \\ b_n &= \frac{(f,\psi_n)}{(\psi_n,\psi_n)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx. \end{aligned}$$

一方

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-T/2}^{T/2}1dx=T$$

であるから

$$\frac{a_0}{2}=\frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\,dx.$$

すなわち

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\,dx.$$

まとめると

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

(**解法 2**) $f$ が周期 $T$ であることから、

$$F(\xi) := f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right) \quad (\xi\in\mathbb{R})$$

とおくと、$F$ は周期 $2\pi$ である。ゆえに

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\, d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\, d\xi$$

とおくと

$$F(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi\right).$$

ゆえに

$$f(x) = F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

$\xi = \frac{2\pi}{T}x$ であるから、$\xi = -\pi, \pi$ のとき、$x = -T/2,\ T/2$ であるから

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\ dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\ dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\ dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\ dx.\blacksquare$$

**解答 12.** (準備中)

**解答 13.** (ii), (iii) はやれば出来るはず。(i) をきちんとやるのは難しいので、書いておく。

**(i) の証明**　$f\in X$ とするとき、任意の $x$ に対して $|f(x)|^2\geq 0$ であるから、

$$(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\ dx \geq 0.$$

$f=0$ つまり $(\forall x\in\mathbb{R})$ のとき $f(x)=0$ であれば、$(f,f)=0$ である。逆に $(f,f)=0$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\ dx = 0.$$

$|f(x)|^2$ は連続関数であるから、$(\forall x\in[-\pi,\pi])$ $|f(x)|^2 = 0$ (もしそうでないとすると、$(\exists x_0\in[-\pi,\pi])$ $|f(x_0)|^2\neq 0$. $|f(x_0)|^2>0$ であるが、$|f|^2$ の連続性から、$x_0$ の十分近くでは $|f(x)|^2\geq|f(x_0)|^2/2>0$. すると $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx>0$ となり矛盾する)。ゆえに $f(x)=0$ $(x\in[-\pi,\pi])$. $f$ は周期 $2\pi$ の関数だから $f(x)=0$ $(x\in\mathbb{R})$. すなわち $f=0$. ■

**解答 14.**

$$(f,\lambda_1g_1+\lambda_2g_2) = \overline{(\lambda_1g_1+\lambda_2g_2,f)} = \overline{\lambda_1(f_1,g)+\lambda_2(f_2,g)} = \overline{\lambda_1}\ \overline{(g_1,f)} + \overline{\lambda_2}\ \overline{(g_2,f)}$$
$$= \overline{\lambda_1}(f,g_1) + \overline{\lambda_2}(f,g_2).\blacksquare$$

**解答 15.** 任意の複素数 $z$ に対して、$z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$ が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned}(f+g,f+g)&=(f,f+g)+(g,f+g)=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)=(f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g)\\&=(f,f)+2\,\mathrm{Re}(f,g)+(g,g).\blacksquare\end{aligned}$$

**解答 16.** $(tf+g,tf+g)$ を内積の公理 (ii), (iii) を使って変形すると

$$t^2(f,f)+2t(f,g)+(g,g)\ge 0\quad (t\in\mathbb{R}).$$

一般に $(f,f)\ge 0$ であるが、$(f,f)>0$ か、$(f,f)=0$ かで場合分けする。

(a) $(f,f)>0$ の場合、2 次関数の符号が 0 以上ということから、判別式 $\le 0$. ゆえに $(2(f,g))^2-4(f,f)(g,g)\le 0$. 整理すると $(f,g)^2\le(f,f)(g,g)$. ゆえに ($\sharp$) の不等式が成り立つ。

(b) $(f,f)=0$ の場合、$(\forall t\in\mathbb{R})\ 2t(f,g)+(g,g)\ge 0$ より $(f,g)=0$ でなければならない ($(f,g)\ne 0$ ならば矛盾が導かれる)。ゆえに ($\sharp$) の不等式の両辺とも 0 で、不等式は成立する。

等号の成立条件を考える。

$f$ と $g$ が 1 次従属のとき、等号が成り立つことは簡単に分かるので省略する。

$f$ と $g$ が 1 次独立のときは、上の議論をていねいにたどると、$(f,g)^2<(f,f)(g,g)$ が導かれる。(実際、任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $tf+g\ne 0$ であるので、$(tf+g,tf+g)>0$ であり、2 次関数の符号が正であるから、判別式は負である。) ゆえに ($\sharp$) で等号が成り立つならば、$f$ と $g$ は 1 次独立ではない。 $\blacksquare$

(少し書き方を変えて) $f$ と $g$ が 1 次従属のとき、$(\exists t\in\mathbb{R})\ f=tg$ または $(\exists s\in\mathbb{R})\ g=sf$. 前者の場合、($\sharp$) の不等式の両辺はともに $t^2\,(g,g)^2$. 後者の場合、($\sharp$) の不等式の両辺はともに $s^2\,(f,f)^2$. ゆえに ($\sharp$) の不等式で等号が成立する。

$f$ と $g$ が 1 次独立のとき (このとき $f\ne 0$ であることに注意)、$(\forall t\in\mathbb{C})\ tf+g\ne 0$. 特に、$(f,g)=|(f,g)|\,e^{i\theta}$ となる $\theta\in\mathbb{R}$ を取って、$t=se^{-i\theta}$ $(s\in\mathbb{R})$ とおくと、$t(f,g)=s\,|(f,g)|$ であるから、

$$\begin{aligned}(tf+g,tf+g)&=(tf,tf)+2\,\mathrm{Re}(tf,g)+(g,g)=|t|^2\,(f,f)+2\,\mathrm{Re}\,[t(f,g)]+(g,g)\\&=s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g).\end{aligned}$$

ゆえに任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して、

$$s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g)>0.$$

判別式は負でなければならないので、$|(f,g)|^2<(f,f)(g,g)$. $\blacksquare$

**解答 17.** $f,g\in X$ とする。任意の複素数 $\lambda$ に対して、

$$0\le(\lambda f+g,\lambda f+g)=|\lambda|^2\,(f,f)+2\,\mathrm{Re}\,(f,g)+(g,g)\tag{8}$$

が成り立つ。複素数 $(f,g)$ の指数形式を $(f,g)=\rho e^{i\phi}$ $(\rho\ge 0,\ \phi\in\mathbb{R})$ とする。$\rho=|(f,g)|$ である。任意の実数 $t$ に対して、$\lambda:=te^{-i\phi}$ とおいて、(8) に代入すると、$\lambda(f,g)=te^{-i\phi}\cdot|(f,g)|\,e^{i\phi}=t\,|(f,g)|$ であるから

$$t^2\,(f,f)+2t\,|(f,g)|+(g,g)\ge 0.$$

ここから後は、問 17 と同様である。 $\blacksquare$

**解答 18.** (準備中) 不等式自体は成り立つ。 $\blacksquare$

**解答 19.** 任意の $f \in X$ に対して、$(f,f) \geq 0$ であるから、$\sqrt{(f,f)}$ は意味を持ち、$\|f\|$ が定義できる。

(a) 任意の $f \in X$ に対して、$(f,f) \geq 0$ であるから、$\|f\| = \sqrt{(f,f)} \geq 0$. また $\|f\| = 0 \Leftrightarrow (f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(b) 任意の $f \in X$, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\|\lambda f\| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\,(f,f)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(f,f)} = |\lambda|\sqrt{(f,f)} = |\lambda|\,\|f\|\,.$$

(c) 任意の $f, g \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) = \|f\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}(f,g) + \|g\|^2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\|f\| + \|g\|)^2 - \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 - \left(\|f\|^2 + 2\operatorname{Re}(f,g) + \|g\|^2\right) \\ &= 2\left(\|f\|\,\|g\| - \operatorname{Re}(f,g)\right) \\ &\geq 2\left(\|f\|\,\|g\| - |(f,g)|\right) \geq 0.\end{aligned}$$

最後のところで Schwarz の不等式 $|(f,g)|^2 \leq (f,f)(g,g)$ を用いた。これから

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|\,.\blacksquare$$

**解答 20.** 条件 (ii) と問 14 で示したこと、それと $a \in \mathbb{C}$ に対して $a + \overline{a} = 2\operatorname{Re} a$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(f+g, f+g) &= (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) \\ &= (f,f) + (f,g) + \overline{(f,g)} + (g,g) = (f,f) + 2\operatorname{Re}(f,g) + (g,g).\blacksquare\end{aligned}$$

**解答 21.**

$$\begin{aligned}\|a_1 + \cdots + a_n\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j, a_j) + \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j, a_k) + \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 0 + \sum_{1 \leq k < j \leq n} 0 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2\,.\blacksquare\end{aligned}$$

**解答 22.**

(1) $\{\varphi_n\} \in \mathbb{N}$ を正規直交系とする。$n \neq m$ のとき $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = 0$. また $(\varphi_n, \varphi_n) = \delta_{nn} = 1 \neq 0$.

(2) $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を直交系とする。$N \in \mathbb{N}$, $c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K}$ が

$$\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j = 0$$

を満たすとするとき、$1 \leq n \leq N$ を満たす $n$ に対して、

$$0 = (0, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^N c_j\,(\varphi_j, \varphi_n) = \sum_{j=1}^N c_j \delta_{jn} = c_n \delta_{nn} = c_n \cdot 1 = c_n.$$

すなわち $c_1 = \cdots = c_N = 0$. ゆえに $\{\varphi_n\}$ は 1 次独立である。 $\blacksquare$

**解答 23.** (少し雑だけど、とりあえず) $u_1, u_2, \cdots \in X$ は1次独立とするとき、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ で、

$$\mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle$$

が成り立つようなものを求める。

$n = 1, 2, \cdots$ の順に $\varphi_n$ を定める。まず

$$\varphi_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \tag{GS1}$$

とおくと、$\{\varphi_1\}$ は正規直交系であり ($\because \|\varphi_1\| = 1$)、$\mathrm{Span}\langle u_1\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1\rangle$.

$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ まで求まった (正規直交系であり、$\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ が成り立つ) とする。

$$\psi_{k+1} := u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j \tag{GS2}$$

とおく。$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ は正規直交系だから、

$$\begin{aligned}
(\psi_{k+1}, \varphi_j) &= \left(u_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)\varphi_\ell, \varphi_j\right) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)(\varphi_\ell, \varphi_j) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - (u_{k+1}, \varphi_j) \cdot 1 = 0 \quad (j = 1, \cdots, k).
\end{aligned}$$

また $\psi_{k+1} \neq 0$ である (もしも $\psi_{k+1} = 0$ とすると、$u_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j \in \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ となり、$u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}$ が1次独立であることに反する)。

$$\varphi_{k+1} := \frac{1}{\|\psi_{k+1}\|} \psi_{k+1} \tag{GS3}$$

とおくと、$(\varphi_{k+1}, \varphi_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$, $(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}) = 1$. ゆえに $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}$ は正規直交系である。また $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_{k+1}\rangle$ が成り立つ。 ■

**解答 24.**

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n, \frac{1}{\|\varphi_m\|}\varphi_m,\right) = \frac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|}(\varphi_n, \varphi_m) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_n\|}(\varphi_n, \varphi_n) = 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} \cdot 0 = 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \\
&= \delta_{nm}. \blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 25.** (準備中。講義ノートには書いてあります。) ■

**解答 26.** (講義では、$s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} (f, \varphi_n)\varphi_n$ が $f$ の $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_N\rangle$ への直交射影である (つまり $s_n = h$) と言って証明したけれど、この不等式を証明するだけならば、以下のような手短な証明が書ける。)

$N \in \mathbb{N}$ とする。$h_N := \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k$ とおくと、$1 \leq j \leq N$ なる $j$ に対して

$$\begin{aligned}
(f - h_N, \varphi_j) &= \left(f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_j\right) = (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) \\
&= (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\delta_{kj} = (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに[7]

$$(f-h_N,h_N)=\left(f-h_N,\sum_{j=1}^N (f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N \overline{(f,\varphi_j)}(f-h_N,\varphi_j)=0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\|f-h_N+h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+2\,\mathrm{Re}\,(f-h_N,h_N)+\|h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+\|h_N\|^2\\&\ge\|h_N\|^2.\end{aligned}$$

$\varphi_j$ $(j=1,\cdots,N)$ は互いに直交しているので (ピタゴラスの定理から)

$$\sum_{k=1}^N |(f,\varphi_k)|^2=\left\|\sum_{k=1}^N (f,\varphi_j)\varphi_j\right\|^2=\|h_N\|^2\le\|f\|^2.$$

これが任意の $N\in\mathbb{N}$ について成り立つことから

$$\sum_{k=1}^\infty |(f,\varphi_k)|^2\le\|f\|^2.\blacksquare$$

(テキストによっては、$\|f\|^2$ から始めて、一気に $\|f-h_N\|^N+\|h_N\|^2$ に等しいことを導いているものもある。)

**解答 27.** まず (念のため) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ は正規直交系であることを確かめよう。$\{\cos nx\}_{n\ge 0}\cup\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ が直交系であることは分かっているので、長さが 1 であることを確かめれば良い。

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 dx&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right|^2 dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right|^2 dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,;dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1.\end{aligned}$$

$a_0'$, $a_n'$, $b_n'$ をこの正規直交系に関する係数とする。すなわち

$$\begin{aligned}a_0'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f,1),\\ a_n'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\cos nx),\\ b_n'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\sin nx).\end{aligned}$$

Bessel の不等式は

$$(\star)\qquad |a_0'|^2+\sum_{n=1}^\infty |a_n'|^2+\sum_{n=1}^\infty |b_n'|^2\le\|f\|^2.$$

ところで

$$a_0=\frac{1}{\pi}(f,1),\quad a_n=\frac{1}{\pi}(f,\cos nx),\quad b_n=\frac{1}{\pi}(f,\sin nx)\quad(n\in\mathbb{N})$$

---

[7]最初から一気に証明出来なくもない。$(f-h_N,h_N)=\left(f-\sum_{k=1}^N (f,\varphi_k)\varphi_k,\sum_{j=1}^N (f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N \overline{(f,\varphi_j)}(f,\varphi_j)-\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N (f,\varphi_k)\overline{(f,\varphi_j)}(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{j=1}^N |(f,\varphi_j)|^2-\sum_{k=1}^N |(f,\varphi_k)|^2=0.$

であるから、

$$a_0' = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0, \quad a_n' = \sqrt{\pi}a_n, \quad b_n' = \sqrt{\pi}b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$(\star)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\pi|a_n|^2 + + \sum_{n=1}^{\infty}\pi|b_n|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

両辺を $\pi$ で割って

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx.\blacksquare$$

**解答 28.**

(1) $f$ は連続で区分的に $C^1$ 級なので、$f$ の Fourier 級数は一様収束して、和は $f$ に等しい。特に任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

$x = 0$ を代入して

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}S_{奇}.$$

ゆえに

$$S_{奇} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(余談になるが、$S = \dfrac{4}{3}S_{奇} = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$.)

(2) $a_0 = \pi$, $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi}$ ($n$ が奇数), $a_n = 0$ ($n$ が正の偶数), $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) であるので、

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right).$$

一方

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Parseval の不等式に代入して

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}Q_{奇} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$Q_{奇} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{96}.\blacksquare$$

**余談** (余談になるが、$Q_{偶} = \dfrac{1}{2^4}Q = \dfrac{Q}{16}$ であるから、$Q_{奇} = Q - Q_{偶} = \dfrac{15}{16}Q$ であるので、$Q = \dfrac{16}{15}Q_{奇} = \dfrac{16}{15}\cdot\dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$. 一つの Fourier 級数展開から $S$ と $Q$ が求まるのはちょっと面白い。)
(参考: Mathematica で `Sum[1/n^4,{n,1,Infinity,2}]` とすると、$\pi^4/96$ と答えてくれる。)

**解答 29.** $\mathbb{R}^n$ の内積に関する Schwarz の不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} b_n^2} \quad ((a_1,\ldots,a_N),(b_1,\ldots,b_N)\in\mathbb{R}^N)$$

を思い出そう。

$|x_n|$, $|y_n|$ をこの Schwarz の不等式の $a_n$, $b_n$ とみなすことによって

$$\sum_{n=1}^{N}|x_n y_n| = \sum_{n=1}^{N}|x_n|\,|y_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2}.$$

0 以上のものはたくさん足した方が大きいので

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}.$$

この右辺を $M$ とおくと、

$$\sum_{n=1}^{N}|x_n y_n| \leq M.$$

これは級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|$ の部分和の作る数列が上に有界ということを示している。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|$ は収束する。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n$ は絶対収束する。したがって $\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n$ は収束し、

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq M = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}.\blacksquare$$

**(余談)** $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$ であるような複素数列 $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の全体を $\ell^2$ と表す。$a,b\in\ell^2$ とするとき

$$(a,b) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

により $(a,b)\in\mathbb{C}$ が定義できることがこの問題から分かる。$\ell^2$ はこの $(a,b)$ を内積として内積空間になる。

**解答 30.** 複素数列全体の集合が問題文に定義した和と複素数倍について、$\mathbb{C}$ 上の線形空間をなすことは認めることにする。零ベクトルは $\mathbf{0} := \{0,0,0,\cdots\}$.

$\{x_n\}\in\ell^2$, $\lambda\in\mathbb{C}$ であれば、$\{\lambda x_n\}\in\ell^2$ は容易に分かる。

$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 = |x|^2+2|x||y|+|y|^2 \leq 2\left(|x|^2+\|y\|^2\right)$ に注意すると、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n| \leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right) < \infty.$$

ゆえに $\{x_n\}+\{y_n\}\in\ell^2$.

$|x|\,|\bar{y}| \leq |x|^2+|y|^2$ であるから、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、$\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$ は収束するので、$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ が定義できる。

以上から、$\ell^2$ は、問題文中の和、複素数倍、$(\cdot,\cdot)$ が定義できる。

$(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことの確認をしよう。

$$(\{x_n\},\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \geq 0.$$

また

$$(\{x_n\}, \{x_n\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\} = \mathbf{0}.$$

線形性 $(\lambda\{x_n\} + \mu\{y_n\}, \{z_n\}) = \lambda(\{x_n\}, \{z_n\}) + \mu(\{y_n\}, \{z_n\})$, 対称性 $(\{y_n\}, \{x_n\}) = \overline{(\{x_n\}, \{y_n\})}$ も容易に確かめられる (サボる)。

以上より $\ell^2$ は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。 ■

**解答 31.**

(1) ( グラフを描くのが良い。) 一周期区間 $[-\pi, \pi]$ に制限すると、$x = 0, \pm\pi$ で不連続、$(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ で連続である。周期 $2\pi$ の周期関数であるから、$n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ で不連続で、$x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ では連続である。ゆえに不連続点は $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0) = g(0+0) = 1$, $g(x-0) = g(0-0) = -1$. $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0) = g(-\pi+0) = -1$, $g(x-0) = g(\pi-0) = 1$.

(3) $g$ は周期 $2\pi$、 区分的に $C^1$ 級であるので、$g$ の Fourier 級数は各点で収束し、和 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} g(x) & (x \text{ が } g \text{ の連続点}) \\ \dfrac{g(x+0) + g(x-0)}{2} & (x \text{ が } g \text{ の不連続}). \end{cases}$$

(2) より $x$ が $g$ の不連続点のとき、$g(x+0) + g(x-0) = \pm 1 + \mp 1 = 0 = g(x)$ であるから、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

(任意の $x$ で $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ となるのは、最初に $g(x) = 0$ $(x = 0, \pm\pi)$ と定義したからで、もともとそうする必然性はあまりないけれど (どうせ、どうやっても $g$ は不連続なので)、そうしておけば、最後に全部の点で極限が $g$ に等しくなって気持ち良いかな、と思ったくらいの理由しかありません。Fourier 級数の方は積分で定まるので，$x = 0, \pm\pi$ での値をどう定義しても変化しないことに注意。) ■

**解答 32.** $f$ は周期 $2\pi$ であるから $f(\pi) = f(-\pi)$ であることに注意する。

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(0x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0.$$

$n \in \mathbb{N}$ とするとき、部分積分によって

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) = n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(n\cos nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right) = -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n. \end{aligned}$$

複素 Fourier 係数については、(準備中) ■

**解答 33.**

(1) 仮定より、$M_n := |a_n| + |b_n|$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束し、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n|\,|\cos nx| + |b_n|\,|\sin nx| \le |a_n| \cdot 1 + |b_n| \cdot 1 = M_n.$$

Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は一様に絶対収束する。各項 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は連続関数であるから、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ は連続であり、その一様収束の極限である $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は連続である。

(2) 連続関数 $|\varphi|$ は $[-\pi, \pi]$ で最大値 $M$ を取ることから、

$$f(x)\overline{\varphi(x)} = \frac{a_0}{2}\,\overline{\varphi(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\overline{\varphi(x)}$$

も一様収束する。このことは、(1) と同様に Weierstrass の M-test をしても良いし ($M_n := M\,(|a_n| + \|b_n\|)$ とする)、

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x)\overline{\varphi(x)} - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)\overline{\varphi(x)} \right| \\
&\qquad \le M \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \right|
\end{aligned}$$

という不等式からも分かる ($N \to \infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、左辺も 0 に収束する)。従って項別積分が可能で

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\varphi(x)}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\overline{\varphi(x)}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\overline{\varphi(x)}dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\overline{\varphi(x)}dx\right) \\
&= \frac{a_0}{2}(1, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (\cos nx, \varphi) + b_n (\sin nx, \varphi))\,. \blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 34.** (これは授業中にやったので省略する。有限個の点を除いて $g(x) = \operatorname{sign} x$ であるから、実は $f$ と $g$ の Fourier 級数は、実質的に (No. 1 の) 問 6 で求めてある。Fourier 級数展開の結果は

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \\
g(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right), \\
h(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k-1)x = \frac{4}{\pi}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots).
\end{aligned}$$

コンピューターを用いて部分和を描く方法は「宿題 1 のグラフ描き」[8]) を見よ。$f$ は $(2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 以外では微分可能で、微分可能なところでは

$$f'(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

[8] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2014/toi1-drawing.pdf

実は超関数の意味で $f' = g,\ g' = h$ が成り立つ。$f$ の Fourier 級数展開を項別に微分したものが $g$ の Fourier 級数展開に等しく、$g$ の Fourier 級数展開を項別に微分したものが $h$ の Fourier 級数展開に等しくなっている。■

**解答 35.** (1) $f$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$ は次式で定義される。

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

$g$ の共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^*g$ は次式で定義される。

$$\mathscr{F}^*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(2) 適当な条件の下で、$\mathscr{F}^*[\mathscr{F}f] = f,\ \mathscr{F}[\mathscr{F}^a stg] = g$ が成り立つ。これらを Fourier の反転公式と呼ぶ。Fourier 級数の場合は、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

という式が反転公式に相当する。■

**解答 36.** 講義ノートの **2.3「Fourier 変換の簡単な性質」** に書いてある。■

**解答 37.**

(1) 前半は $\sqrt{3}x = y$ と変数変換して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dy = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$

後半は、まず定義から

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-3x^2}e^{-ix\xi}dx.$$

平方完成して

$$-3x^2 - ix\xi = -3\left(x + \frac{i\xi}{6}\right)^2 - \frac{\xi^2}{12}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] &= e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x+i\xi/6)^2}dx = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/12} = \frac{e^{-\xi^2/12}}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

(2 つめの等号は、複素関数論の積分路の変形を用いる。詳細は省略。なお、授業では別解も紹介した。講義ノートの 1.4.5 に載せてある。)

(2) (i) 積分区間を、負の範囲と正の範囲で分けて、負の範囲の方は $y = -x$ と変数変換すると[9]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-3|x|}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-ix\xi}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_0^{\infty} e^{-3x}e^{ix\xi}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(3+i\xi)x}}{-(3+i\xi)} + \frac{e^{-(3-i\xi)x}}{-(3-i\xi)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3+i\xi} + \frac{1}{3-i\xi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{6}{\xi^2+9} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^2+9}.\end{aligned}$$

[9] この辺は好みの問題で、変数変換しなくても計算できる。

(ii) 反転公式を用いると、(i) の結果から

$$\mathcal{F}^*\left[\frac{1}{\xi^2+9}\right](x)=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|x|}.$$

公式 $\mathcal{F}f(\xi)=\mathcal{F}^*f(-\xi)$ を用いて

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+9}\right](\xi)=\mathcal{F}^*\left[\frac{1}{x^2+9}\right](-\xi)=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|-\xi|}=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|\xi|}.$$

(iii) これも単純な計算で

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\frac{1}{6}e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-3}^{x=3}\\&=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i3\xi}-e^{i3\xi}}{-i\xi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{3\xi}\frac{e^{i3\xi}-e^{-i3\xi}}{2i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin 3\xi}{3\xi}.\end{aligned}$$

(iv) はこれを反転させて

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right](\xi)=\sqrt{2\pi}f(-\xi)=\sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (|\xi|<3)\\ 0 & (|\xi|>3).\end{cases}$$

細かいことを言うと、(不連続点では、片側極限の平均値に収束するので) $\xi=\pm3$ では $\sqrt{2\pi}\times\dfrac{1}{12}$ という値を取る (試験ではここまで書かなくても良いことにする)。 ■

最後の結果は

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{sign}\ (3-y)+\mathrm{sign}\ (3+y)\right)$$

となるが、

$$=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\mathrm{sign}\ (3-y)+\mathrm{sign}\ (y+3)}{2}$$

であるから、OK.

**解答 38.** (結果のみ) $\mathscr{F}^2f(x)=\mathscr{F}(\mathscr{F}f)(x)=\mathscr{F}^*(\mathscr{F}f)(-x)=f(x)$ $(x\in\mathbb{R})$. ゆえに $\mathscr{F}^4f=f$. ■

**解答 39.** (準備中)

**解答 40.**

(1) 一般に $(e^z)^n=e^{nz}$ であるので、

$$\omega^N=\left(e^{2\pi i/N}\right)^N=e^{2\pi i}=1.$$

(2) $m\in\mathbb{N}$, $1\le m\le N-1$ とするとき、$0<m/N<N$ であるから、$0<2\pi m/N<2\pi$, $\cos\dfrac{2\pi m}{N}\neq1$. ゆえに

$$\omega^m=\left(e^{2\pi i/N}\right)^m=e^{2\pi im/N}=\cos\frac{2\pi m}{N}+i\sin\frac{2\pi m}{N}\neq1.$$

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}$ は公比 $\omega^m$ の等比数列であるが、(1), (2) から、$m\equiv0\pmod N$ のとき $\omega^m=1$, そうでないとき $\omega^m\neq1$ である。

$$\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}=\begin{cases}\dfrac{(\omega^m)^N-1}{\omega^m-1}=\dfrac{1-1}{\omega^{m-1}}=0 & (m\not\equiv0\pmod N)\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}1=N & (m\equiv0\pmod N)).\blacksquare\end{cases}$$

**解答 41.** 講義ノートの **3.2** の命題3.3 (p. 47) は、$W = \left(\dfrac{1}{N}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$W^{-1} = \left(\omega^{(j-1)(n-1)}\right)$ という内容である。この証明を真似すれば良い。

命題 3.3 を使って良いならば、$\overline{\omega} = \omega^{-1}$ であるので、$U = \sqrt{N}W = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$U^* = \overline{U^T} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(j-1)(n-1)}\right)} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{(j-1)(n-1)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1}$. ゆえに $UU^* = \sqrt{N}W\dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1} = I$. ■

**解答 42.** 講義ノートの 1.1「離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか」に書いてある。 ■

**解答 43.** 今年度は、定理 3.2.4 とした。$N > 2m$ となるように $N$ を取れば良い。命題 3.1.2「離散フーリエ係数の性質」、特に $C_n = \displaystyle\sum_{m\equiv n} c_m$ という式を理解せよ、という問題である。詳しいことは省略する。 ■

**解答 44.** 離散時間 Fourier 変換については、講義ノートの 5 節に書いてあるわけだが、収束については $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2 < \infty$ の場合に軽く言及しているだけだった。(注意: 繰り返しになるけれど、この講義では、級数や積分の収束の証明を出来ることを要求しない。) 反転公式についても、Fourier 級数の話と同じだよね、で済ませてあった。以下は講義内容の補足として。

**収束について**　$M_n := |f(n)|$ とおくと、$\left|f(n)e^{-in\omega}\right| = |f(n)| = M_n$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)| < \infty$ であるから、Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$ は一様に絶対収束するので、特に収束する。

**周期性について**　(これは講義ノートに書いてあるけれど、ついでだから) $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$e^{-i2n\pi i} = 1$ であるから

$$\widehat{f}(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}e^{-i2n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} = \widehat{f}(\omega).$$

ゆえに $\widehat{f}$ は周期 $2\pi$ である。

**反転公式について**　これは Fourier 級数の Fourier 係数がどうなるか、という話である。$\left\{e^{-inx}\right\}$ は直交系で

$$\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\overline{e^{-inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

であるから、$e^{inx}$ の係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{\left(f, e^{-inx}\right)}{\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right)} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{-inx}}\,dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.\blacksquare$$

**解答 45.** (4) 以外は講義ノート **7.4「畳み込みの基本的な性質の証明」**(pp. 60–60) に書いてある。(4) は **7.3.2「静電場からの例」** に書いてある。 ■

**解答 46.**

(1) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-ix\xi} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-ix\xi} dx \right) g(y) dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi} e^{-iy\xi}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} e^{-iy\xi} du \right) g(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy \\
&= \sqrt{2\pi} \mathscr{F} f(\xi) \mathscr{F} g(\xi). \blacksquare
\end{aligned}$$

(2) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f * g](n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) e^{-inx} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-inx} dx \right) g(y) dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu} e^{-iny}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f * g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-inu} e^{-iny} du \right) g(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-inu} du \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iny} dy \\
&= \mathscr{F} f(n) \mathscr{F} g(n). \blacksquare
\end{aligned}$$

(3) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j) \omega^{-nj} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} f(j-k) g(k) \right) \omega^{-nj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} f(j-k) g(k) \omega^{-nj} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} f(j-k) \omega^{-nj} \right) g(k).
\end{aligned}$$

$\ell = j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell=-k$, $j=N-1$ のとき $\ell=N-1-k$, $j=\ell+k$, $\omega^{-nj}=\omega^{-in(\ell+k)}=\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}\right)g(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk}\\ &= N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).\blacksquare\end{aligned}$$

(4) $h := f*g$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi}\\ &= \sum_{k=-\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k)\\ &= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi}\right)\\ &= \mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi).\blacksquare\end{aligned}$$

**解答 47.** (準備中。2016 年度のレポート課題 2 の一部なので、講義では説明してある。)