7.4.4 熱方程式の基本解の性質

(再掲 16) $$G(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0).$$

任意の $t > 0$ に対して

$$G(x,t) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\, dx = 1$$

が成り立つ。

G は、平均 0, 分散 $2t$ の正規分布の確率密度関数に等しい。

$t\ (>0)$ を固定したとき、$x \mapsto G(x,t)$ のグラフは釣鐘状の曲線で、$x = 0$ でピークになっている。

x 軸との間で囲まれた部分の面積が 1 になっている (初期値が持っていた熱量が保存されることを意味する。一般に、熱量の密度が温度で、温度の積分は熱量となる。)。

分散 $2t$ は時間に比例して増加する。時間の経過とともに、裾が広がっていくわけである。

t を固定して、$x \mapsto G(x,t)$ のグラフを描いて、時間の経過とともにそれがどう変化するか、イメージを頭の中に残すと良い。百聞は一見にしかずで自分の手を動かして見ることを勧める。

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

色々なソフトウェアでグラフが描ける。

Mathematica で熱方程式の基本解を見る

```
G[x_, t_] := Exp[-x^2/(4 t)]/(2*Sqrt[Pi*t])
g=Plot[Table[G[x,t], {t, 0.1, 1.0, 0.1}], {x, -5, 5}, PlotRange->All]
Manipulate[Plot[G[x, t], {x, -5, 5}, PlotRange->{0, 3}], {t, 0.01, 2, 0.01}]
```

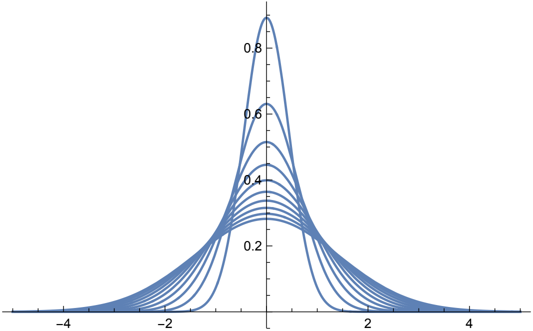

図 1: 熱方程式の基本解 $G(\cdot, t)$ $(t = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0)$

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

gnuplot でアニメーションを作ってみよう。まず

anim.gp

```
plot [-10:10] [0:1] G(x,t)
t=t+dt
if (t<Tmax) reread
```

のようなファイル “anim.gp” を用意しておいて (Visual Studio Code や Atom のようなテキスト・エディターで作れば良い)、gnuplot で

```
gnuplot> G(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
gnuplot> t=0.1
gnuplot> Tmax=5
gnuplot> dt=0.01
gnuplot> load "anim.gp"
```

(アニメーション GIF を作る)

```
gnuplot> set term gif animate delay 10
gnuplot> set output "heatkernel.gif"
gnuplot> load "anim.gp"
```

$t = 0.1$ から 0.01 刻みで $t = 5$ まで、$G(\cdot, t)$ のグラフが簡易アニメーションで描ける。

7.4.4 熱方程式の基本解の性質

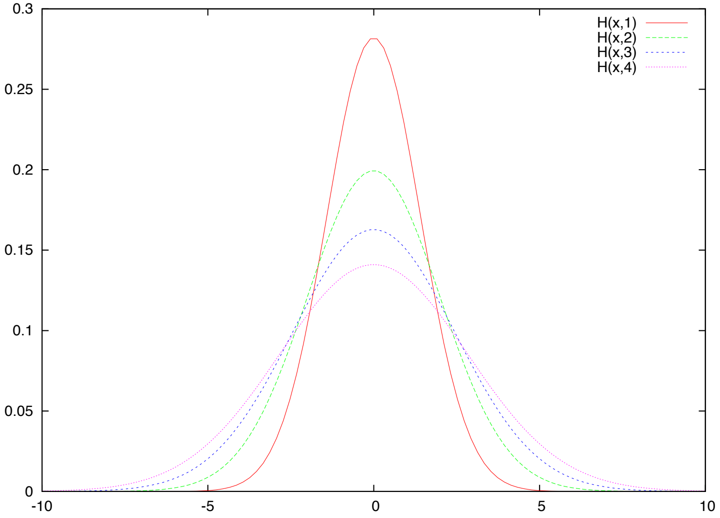

図 2: 熱方程式の基本解 $H(\cdot, t)$ の $t = 1, 2, 3, 4$ でのグラフ

7.4.4 熱方程式の基本解の性質　ほぼ余談

G は、物理的には、時刻 0 で原点に単位熱量が置かれた場合に、その熱が伝導 (拡散) していく状態を表す関数である。

G 自身が熱方程式を満たす: $\dfrac{\partial}{\partial t}G(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,t)$.

$t \to +\infty$ のとき $G(x,t) \to 0$ であるが、$t \to +0$ としても 0 以外の点では 0 に収束する。実際、

$$\lim_{t\to+0} G(x,t) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0). \end{cases}$$

(ここからは超関数論を前提にした話)
実は $t \to +0$ のとき、$G(x,t)$ は **Dirac のデルタ関数**に収束する:

$$\lim_{t\to+0} G(x,t) = \delta(x).$$

G は Dirac のデルタ関数を初期値とする熱方程式の初期値問題の解である:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,t), \quad G(x,0) = \delta(x).$$

(一番上に書いた物理解釈の数学解釈と言える。)