2016年度 画像処理とフーリエ変換 期末試験問題

2017年1月25日 (水曜) 4限 (14:30〜15:30) 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の7問から5問選択して解答せよ。解答の順番は自由である。
i は虚数単位, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, $\mathbb{R}$ は実数全体の集合, $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す。

問 1.　周期 2π の関数 f, g を $f(x)=x^2$, $g(x)=2x$ $(-\pi \le x < \pi)$ で定める。
(1) Fourier級数が一様収束するのは、f と g のどちらか (理由も述べよ)。一様収束する関数の Fourier 級数を求めよ。(2) f と g の Fourier 係数の間にはどのような関係があるか述べて、証明せよ。

問 2.　(1) $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$, 共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^*f$ の定義を記せ。
(2) $a>0$ に対して、関数 f, g を $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (|x|<a)\\ 0 & (|x|>a)\end{cases}$, $g(x)=\dfrac{\sin(ax)}{ax}$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めるとき、f と g の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$, $\mathscr{F}g$ を求めよ。結果だけでなく根拠 (簡単な途中経過) を書くこと。

問 3.　$\mathbb{R}$ を定義域とする2つの関数 f, g の畳み込み $f*g$ を、$f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めるとき、$f*g$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}[f*g]$ を $\mathscr{F}f$ と $\mathscr{F}g$ を用いて表わせ。ただし、$|x|\to\infty$ のとき、$f(x)$ と $g(x)$ は十分速く 0 に収束する (積分の収束を気にしないで良い) とする。

問 4.　関数 u が

(a) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)),$$

(b) $$u(x,0)=\varphi(x)\quad (x\in\mathbb{R})$$

を満たすとする。ただし $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続関数で、$|x|\to\infty$ のとき十分速く 0 に収束するとする。

(1) u の x に関する Fourier 変換 $\hat{u}(\xi,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け (φ を用いて表せ)。

(2) $\hat{u}$ を逆 Fourier 変換することによって、u を求めよ。なるべく簡単な式にすること。

問 5.　N を自然数として、$\omega=e^{2\pi i/N}$ とおくとき、以下の問に答えよ。
(1) 自然数 p に対して、$\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{pj}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})$ に対して、$C_n=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-jn}$ $(n=0,1,\cdots,N-1)$ で定まる $\boldsymbol{C}=(C_0,C_1,\cdots,C_{N-1})$ を $\boldsymbol{f}$ の N 項離散 Fourier 変換と呼ぶ。逆変換の式を書き、証明せよ。

問 6.　レポート課題3でやってもらったような、音声信号の処理を考える。(1) 音楽 CD では、サンプリング周波数 44.1 kHz でサンプリングする。その場合、周波数が何 Hz の信号まで正確に録音出来るか。根拠も述べること。　(2) 3秒分のピアノの音のデータを、Mathematica で離散 Fourier 変換したデータ $\{C_j\}_{j=1}^{N}$ において、絶対値 $|C_j|$ が $j=990$ で最大であったとき、何が分かるか。ただし、サンプリング周波数は十分高いとする。

問 7.　(1) 以下の用語の定義を書け。(a) 線形定常デジタルフィルター (LTI フィルター)　(b) LTI フィルターの単位インパルス応答　(2) LTI フィルター F に、$x(n)=e^{in\omega}$ $(n\in\mathbb{Z})$ (ω は定数で $0<\omega<\pi$) という信号 x を入力したときの出力を、F の単位インパルス応答 h を用いて表せ。

解説

まだ工事中ですが…

次の (i), (ii), (iii) は講義で話したり、講義ノートに書いてあるわけで、それに基づいて対策すれば、問 1, 問 2, 問 3 は解答できて、後はお好みで問題を選択 (問 4 はレポート課題 2 の元ネタだし、問 5 は離散 Fourier 変換の場合の反転公式の証明という基本で、問 6 はレポート課題 3 がらみ、問 7 も昨年度の期末試験をやってあると半分以上解答できそう)、というのがこちらで書いた合格者のシナリオ。

(i) 「数学とメディア」でやったような Fourier 級数の計算は出来るようにしておく。

(ii) 5 つの関数の Fourier 変換は出来るようにしておく。

(iii) 4 つの (広い意味の)Fourier 変換について、$\mathscr{F}[f*g]$ が $\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ の定数倍になるという公式は重要なので、過去 2 回出題している。今度はどれを出そうかな。
— ちなみにこの問題はどこでひっかかる人が多いか、それがどうして間違いかも授業で説明してあるが、その落とし穴にハマって 0 点という人がかなりいた。

追試を受けようという人に　次のようなことをやった人が多い (こういうところを直さないと、何度追試を受けても受かる可能性は低いと思う)。例えば Fourier 変換 $\mathscr{F}f$ の値に関する等式で、変数を書かない。つまり

$$\mathscr{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \text{(こういう書き方は良くない。間違いを誘引しやすい。)}$$

とするとか (高校数学で例えると、$y = x^2$ というのはあっても、$f = x^2$ というのは普通書かないでしょう？y は従属変数名であって、f は関数名であって、こういうときは $f(x) = x^2$ と書くものです)、間違えて

$$\mathscr{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \text{(間違い。左辺は } \mathscr{F}f(\xi) \text{ であるべき)}$$

とするとか (この式は $(x+1)^2 = \xi^2 + 2\xi + 1$ と書くようなもので、トンデモない式)。それから、間違いではないけれど

$$\mathscr{F}f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}\,dx \quad \text{(} n \text{ は本来実変数なので、勘違いしている匂いが強い)}$$

とするとか。授業ではほぼ毎回

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

と書いたのだけど、一体どうしてこんなことになったのだろう？(これも何度も言ったけれど、右辺の被積分関数は、x と ξ の関数だけど、x について積分するから、x の関数ではなくなって、ξ だけの関数になる、だから左辺は (ξ) と書くわけ) 自分の手でノートを取っていないのか。出来の悪い試験対策資料でも出回ったのだろうか？

問 1 解説　「関数が連続かつ区分的 C^1 級ならば Fourier 級数は一様収束するが、関数が不連続ならば一様収束しない」ということは複数回強調したのだけれど、出来が悪い。グラフ描いてみれば、f のグラフはつながっているけれど、g のグラフはちぎれていることは一目瞭然なので、f は良い収束をするけれど、g は Gibbs の現象が起きる、というのは難しい話ではないはず。

なぜか偶関数、奇関数の違いを一様収束の理由にあげた人が多いけれど、それはおかしい。偶関数、奇関数のどちらでも一様収束したり、一様収束しなかったりする例を簡単にあげることが出来る。

(1) f も g も $[-\pi,\pi)$ では C^∞ であるが、$\mathbb{R}$ 全体では、f は連続かつ区分的 C^1 級、g は不連続かつ区分的C^1 級である。ゆえに f の Fourier 級数は f に一様収束するが、g の Fourier 級数は一様収束はしない。f の Fourier 係数を a_n, b_n とすると、f が偶関数であることから $b_n = 0$. a_n については、$n \neq 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)\\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = -\frac{4}{n\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\frac{-\cos nx}{n}\,dx\right)\\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(\pi\cdot\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

そして

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.
$$

ゆえに f の Fourier 級数は

$$
f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.
$$

(2) $(-\pi,\pi)$ において $f' = g$ という関係があるので、g の Fourier 級数は、f の Fourier 級数を項別微分したものに等しい。

$$
g(x) \sim 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.
$$

(証明) 関数 h に対して

$$
a_n[h] := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos nx\,dx, \quad b_n[h] := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin nx\,dx
$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
a_n[f'] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left([f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(-n\sin nx)\,dx\right)\\
&= n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n[f],\\
b_n[f'] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left([f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(n\cos nx)\,dx\right)\\
&= -n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n[f].
\end{aligned}
$$

ゆえに g の Fourier 級数は

$$
g(x) \sim \frac{a_0[f']}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n[f']\cos nx + b_n[f']\sin nx) = 0 + \sum_{n=1}^\infty (nb_n[f]\cos nx - na_n\sin nx)\,.
$$

これは f の Fourier 級数

$$
f(x) \sim \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n[f]\cos nx + b_n[f]\sin nx)
$$

を項別微分したものに等しい。 ■

問 2 解説　Fourier 変換の定義は、実は問 4 の問題文中にほとんど書いてあるわけで、入試だったら (全体として) 問題の不備とか言われそうなんだけど、期末試験なんだしヒントがあっても良いだろうと考えた。それでも書けない人が少なくなかったのは困った。

それから (1) で左辺を $\mathscr{F}f, \mathscr{F}^*f$ と、(ξ) や (x) を書くのをさぼった人が多いが、それは非常に良くない (それで混乱している人がいた $\cdots$ それはまだ良い方で、おかしなことに気づかないまま変なことをやっている人がいたり…)。改めよう。

(解答)

(1)

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi\in\mathbb{R}),\quad \mathscr{F}^*f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x\in\mathbb{R}).$$

(赤いところを省略してはいけない。)

注 Fourier 変換、共役 (逆)Fourier 変換の流儀はどれを採用しても良いと言ったけれど、逆変換になるように (つまり $\mathscr{F}^*\mathscr{F}f = f$ が成り立つように) すべきである。例えば $\mathscr{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$ としたら、$\mathscr{F}^*f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$. $\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$ としたら、$\mathscr{F}^*f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$. これを間違えると、(2) の答えも間違えてしまう。

(2)

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a\xi}\cdot\frac{e^{-ia\xi}-e^{ia\xi}}{-2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.$$

これは $\mathscr{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g$ であることを示している。反転公式から $\mathscr{F}^*g = \sqrt{2\pi}f$ であるから、

$$\mathscr{F}g(\xi) = \mathscr{F}^*g(-\xi) = \sqrt{2\pi}f(-\xi) = \sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (|\xi|<a)\\ 0 & (|\xi|>a).\blacksquare\end{cases}$$

問 3 解説　「定義式に代入して、積分 (または和) の順序を交換して、変数変換して、整理」と覚えるものか。

よくある間違いとして、積分の順序交換をせずに変数変換して無茶苦茶な式を作って誤魔化すのがあるけれど、そうしないように授業中に注意してある。それを無視した人は 0 点しかつけようがない (本人は出来たつもりなのかもしれないけれど、無茶苦茶としかいいようがない)。

(解答) 定義式に代入して、積分の順序を交換すると

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[f*g\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-ix\xi}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}\,dx\right)g(y)\,dy.\end{aligned}$$

内側の積分を $x-y=z$ という式で (x から z に) 変数変換すると、$dx=dz$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(y+z)\xi} = e^{-iy\xi}e^{-iz\xi}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[f*g\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-iy\xi}e^{-iz\xi}\,dz\right)g(y)\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-iz\xi}\,dz\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}\,dy = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi).\end{aligned}$$

すなわち $\mathscr{F}[f*g] = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f\mathscr{F}g$. $\blacksquare$

問 4 解説　微分方程式 $y'=ay$ を、$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int a\,dx$ から $\log|y|=ax+C$ を経由して解く人がいるけれど、複素数値関数が出て来るときに $|y|$ なんてやったら、無茶苦茶だ。特性根の方法とか習ったと思うのだが…

(解答)

(1) $u_t=u_{xx}$ の両辺を Fourier 変換する。

$$\mathscr{F}\left[u_{xx}(x,t)\right](\xi)=(i\xi)^2\mathscr{F}\left[u(x,t)\right](\xi)=-\xi^2\widehat{u}(\xi,t),$$
$$\mathscr{F}\left[u_t(x,t)\right](\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t)=-\xi^2\widehat{u}(\xi,t).$$

一方、初期条件から

$$\widehat{u}(\xi,0)=\widehat{\varphi}(\xi).$$

これは常微分方程式の初期値問題で、容易に解ける。

$$(\sharp)\qquad \widehat{u}(\xi,t)=e^{-t\xi^2}\widehat{u}(\xi,0)=e^{-t\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi).$$

(つまり $\dfrac{dy}{dx}=ay,\ y(0)=y_0\Rightarrow y=y_0e^{ax}$ ということ。)

(2) 一般に $\mathscr{F}[f*g]=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ であるから、

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}^*\left[\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi)\right](x)=f*g(x)$$

が成り立つことを注意しておく。

($\sharp$) に反転公式を適用して

$$(\flat)\qquad u(x,t)=\mathscr{F}^*\left[e^{-t\xi^2}\mathscr{F}f(\xi)\right](x).$$

$$e^{-t\xi^2}=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}[G(x,t)](\xi)$$

を満たす $G(\cdot,t)$ があれば、

$$u(x,t)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}^*\left[\mathscr{F}[G(x,t)](\xi)\mathscr{F}f(\xi)\right](x)=G(\cdot,t)*f(x).$$

となる。

公式 $\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ から $\mathscr{F}^*\left[e^{-a\xi^2}\right](x)=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$ が得られるので

$$G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}^*\left[e^{-t\xi^2}\right](x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

まとめると

$$(\natural)\qquad u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)f(y)\,dy\quad(x\in\mathbb{R},\ t>0),\quad G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.\blacksquare$$

問 5 解説

(1) $p \equiv 0 \pmod N$ のとき、$\omega^p = 1$ であるから

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{pj} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N.$$

$p \not\equiv 0 \pmod N$ のとき、$\omega^p \neq 1$ であるから、等比数列の和の公式によって

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{pj} = \sum_{j=0}^{N-1} (\omega^p)^j = \frac{(\omega^p)^N - 1}{\omega^p - 1} = \frac{\left(\omega^N\right)^p - 1}{\omega^p - 1} = \frac{1^p - 1}{\omega^p - 1} = 0.$$

(2) 逆変換 (反転公式) は

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{nj} \quad (j = 0, 1, \cdots, N-1).$$

実際、右辺に C_n の定義式 (ただし和を取る index を j から k に書き換えた)

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega^{-kn}$$

を代入することによって、

$$\sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{nj} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega^{-kn} \right) \omega^{nj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(j-k)} \right) f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N \delta_{jk} f_k = f_j . \blacksquare$$

問 6 解説　単位インパルスと (デジタルフィルターの) 単位インパルス応答を区別しよう。前者は δ, 後者は $F[\delta]$ であり、関係がないわけではないが、違うものである。「応答」は「出力」というニュアンスである (δ を入力したとき $F[\delta]$ が出力される)。

複数の人が、22.05 kHz を 22.05 Hz と単位を間違えて答えた。22.05 Hz は耳で聞き取れるかどうかギリギリの低い音で、(2) の答えともモロに矛盾してしまう。トンデモ答案。

(1) サンプリング定理によると、サンプリング周波数の半分未満の周波数の信号は復元できる (それ以上の周波数の信号は正しく復元できない)。22.05 kHz.

(2) 周期が 3 s (周波数が $\frac{1}{3}$ Hz) と考えて離散 Fourier 変換したので、第 n 項の周波数は $\frac{n}{3}$ Hz である。ゆえに $\frac{999-1}{3} \fallingdotseq 329.7$ Hz だと考えられる (1 を引くのは、Mathematica のリストで番号が 1 から数えることになるせいだけど、ここを $\frac{999}{3} = 333$ としても大目に見た)。(実はこれはミの音の基本周波数である。) $\blacksquare$

問 7 解説　「デジタル・フィルター」というけれど、実際に講義で説明したのは、線形定常デジタルフィルター (LTI フィルター) のことばかりなので、それが何であるか (1-a) は答えられてほしい。LTI フィルターの単位インパルス応答や LTI フィルターの周波数応答も重要な話。

(1) $\mathscr{S} := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (添字が整数全体を動く複素数列の全体の作るベクトル空間) とする。

(a) 線形定常デジタルフィルターとは、線形かつ定常なデジタルフィルターのことをいう。

F がデジタルフィルターとは、$F \colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ である (離散信号を離散信号にうつす) ことをいう。

F が線形であるとは、

(i) $(\forall x, y \in \mathscr{S})\ F[x+y] = F[x] + F[y]$

(ii) $(\forall x \in \mathscr{S})\ (\forall \lambda \in \mathbb{C})\ F[\lambda x] = \lambda F[x]$

を満たすことをいう。

F が定常であるとは

$$(\forall x \in \mathscr{S})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad F[x(\cdot - k)] = F[x](\cdot - k)$$

を満たすことをいう。

(b) 線形定常デジタルフィルター F の単位インパルス応答とは、単位インパルス δ を入力したときの出力 $F[\delta]$ のことをいう。

ここで、単位インパルスとは、$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases}$ を満たす $\delta \in \mathscr{S}$ のことをいう。

(2) $h := F[\delta]$ とおくと、F が線形定常デジタルフィルターであることから、任意の $x \in \mathscr{S}$ に対して $F[x] = x * h$ が成り立つ。ゆえに $x(n) = e^{in\omega}$ である x に対しては

$$F[x](n) = x * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h(k) = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h(k).$$

$\widehat{h}(\omega) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h(k)$ (h の離散時間 Fourier 変換) とおくと $F[x](n) = e^{in\omega}\widehat{h}(\omega)$. すなわち $F[x] = \widehat{h}(\omega)x \cdots \widehat{h}(\omega)$ 倍される。(余談: $\widehat{h}(\omega)$ のことを F の周波数特性と呼ぶのであった。) ■