数学解析 第 5 回

～ 数列の極限 (第 3 回), 関数の極限 (第 1 回) ～

桂田 祐史

2021 年 5 月 17 日

目次

本日の連絡事項&内容

- 5 月 16 日正午過ぎの時点で、宿題 3 の未提出者が少し残っています。ここで落として欲しくないのだけど…
- 本日の授業内容
  - 数列の極限 (第 3 回)
  - 関数の極限 (第 1 回 講義ノート [1] の §3)
- 本日は宿題はありません。

2.5 Leibniz の判定基準, Leibniz の級数

前回、素朴な平方根計算手順で $\sqrt{3}$ が定義できること、級数 $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ を用いて e が定義できることを見た。それでは円周率 π について、有名な Madhava-Gregory-Leibniz 級数

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

はどうか？残念ながら、この級数の部分和の数列 $\{s_n\}$ は単調増加ではない。

$$s_1 > s_2 < s_3 > s_4 < \cdots \quad (\text{実は } s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_5 < s_3 < s_1)$$

しかし、次の定理を使うと和が存在することが分かる。

交代級数に関する Leibniz の判定基準 (Leibniz criterion for alternating series)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少数列であり、かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する。

Taylor 展開に $(-1)^n$ という因子はよく現れるので、この命題は結構役に立つ。

2.5 Leibniz の判定基準の証明

証明.

n 項までの部分和を s_n とすると (つまり、$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$)、

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots \geq s_{2k-1} \geq s_{2k+1} \geq \cdots,$$
$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2k} \leq s_{2k+2} \leq \cdots,$$
$$s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1$$

が成り立つ。ゆえに $b_n := s_{2n-1}$, $c_n := s_{2n}$ としたとき、$\{b_n\}$ は単調減少数列で s_2 を下界に持ち、$\{c_n\}$ は単調増加数列 s_1 を上界に持つ (これらのことのチェックは自分でやってみよう)。

ゆえに $\{b_n\}$ も $\{c_n\}$ も極限を持つ。それらをそれぞれ b, c とおくと、

$$\begin{aligned} b - c &= \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(-(-1)^{2n-1} a_{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0. \end{aligned}$$

ゆえに $b = c$. これを s とおくと、$\{b_n\} = \{s_{2n-1}\}$ も $\{c_n\} = \{s_{2n}\}$ も s に収束するので、$\{s_n\}$ は s に収束する。 □

2.5 Leibniz の判定基準の証明

後始末

「これらのことのチェックは自分でやってみよう」を練習問題 3 (http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/ren3.pdf) とする。

2.6 数列の無限大への発散, 定義

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ を考えよう。「n を ∞ に近づけると、n は ∞ に近づく」というと当たり前のようだけど、そうではない。
数列が ∞ に発散するというのを定義する必要がある。

定義 5.1 (数列の ∞, $-\infty$ への発散)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad a_n > U,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall L \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad a_n < L.$$

それぞれ、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は ∞ に発散する、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $-\infty$ に発散する、という。

2.6 数列の無限大への発散

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ の証明

任意の実数 U に対して、アルキメデスの公理から、$N > U$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する。($a = 1,\ b = |U| + 1$ とおくと、$N \cdot 1 > |U| + 1$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する。$|U| + 1 > |U| \geq U$ であるから $N > U$.)。

このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$a_n = n \geq N > U.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. すなわち $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. $\square$

∞ は数だろうか？

まず ∞ は実数ではない。$\infty \notin \mathbb{R}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき、「∞ に収束する」ではなく「∞ に発散する」。

そもそも発散の定義の条件式の中に ∞ は現れない。モノ (集合の要素) ですらない。

一方、∞ や $-\infty$ を (数ではないが) モノと考えて、$\mathbb{R}$ と $\infty, -\infty$ を合わせた集合 $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ を考えることもある。

- $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ は**補完実数直線** (the extended real line) とよぶ。
- この場合は ∞ に収束と言うこともある。
- $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ はもはや体ではない。取り扱い注意が必要である。
- $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ を考えるのは、それほど標準的ではない。この講義ではその立場は採らないことにする。

2.7 等比数列がらみの極限

1. $0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$
2. $0 < r < 1$ かつ $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$

(1) の証明。$h = \dfrac{1}{r} - 1$ とおくと、$h > 0$, $\dfrac{1}{r} = 1 + h$ であるから、

$$\frac{1}{r^n} = (1+h)^n = 1 + nh + \cdots \geq nh. \quad \text{ゆえに} \quad 0 < r^n \leq \frac{1}{nh} \to 0.$$

はさみ打ちの原理によって、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

(2) も同様に出来る。$k = 1$ なら

$$\frac{1}{r^n} = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \sim \frac{h^2}{2}n^2.$$

きちんとやると: $\dfrac{1}{r^n} \geq Cn^2$, すなわち $r^n \leq \dfrac{1}{Cn^2}$ を満たす C が存在する。ゆえに

$$0 < nr^n \leq n \cdot \frac{1}{Cn^2} = \frac{1}{Cn} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$. $k > 1$ の場合も同様 (講義ノート [1] 問 36, 解答 p. 130)。

3 関数の極限 — ε-δ 論法と連続関数の基本的な性質

　連続的に変化する変数の関数についての極限について論じよう。
(これまでは $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ で、ここでは $f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$)

極限の定義も、それにまつわる議論も、ε-δ 論法を用いてなされる。

3.1 関数の極限の定義と基本的な性質

区間の閉包 $\overline{I}$

$\mathbb{R}$ の区間 I に対して、その端点を加えた集合を $\overline{I}$ と表す。つまり

- $I = (\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$ (ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ とする) の場合は $\overline{I} = [\alpha, \beta]$
- $I = (\alpha, \infty), [\alpha, \infty)$ (ここで $\alpha \in \mathbb{R}$) の場合は $\overline{I} = [\alpha, \infty)$
- $I = (-\infty, \beta), (-\infty, \beta]$ (ここで $\beta \in \mathbb{R}$) の場合は $\overline{I} = (-\infty, \beta]$
- $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ の場合は $\overline{I} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$　(端の点は存在しないので変わらない)

$\overline{I}$ のようなものを考えるのは、

$$\lim_{x \to 0} x \log x = 0$$

のような例を扱いたいからである。関数 $x \log x$ の定義域は $I := (0, \infty)$ であり、0 は I に含まれないが、$\overline{I}$ には含まれることに注意しよう。

定義 5.2 (関数の極限)

I が $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A \in \mathbb{R}$ とする。$x \to a$ のとき $f(x)$ が A に**収束する** ($f(x) \to A$) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

　これを満たす A は存在するならば一つしかないので (これは数列の場合と同様に証明される)、$\lim_{x \to a} f(x)$ という記号で表し、$x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限**と呼ぶ。

(本当は、I を区間に限るのは良くない。どうすれば良いかは、そのうち自然に分かるので、今はゆるくやっておく。)

$f(x) \to \infty$ は次のように定義される (数列のときと少し似ている)。

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

$I = (a, \infty)$ や $I = [a, \infty)$ の場合は、$x \to \infty$ というのも考えられる。

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in I : x > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

次はどう定義するか、分かりますか？

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in I : x > R) \quad f(x) > U.$$

1. $f(x) = c$ (定数関数) の場合に $\lim_{x \to a} f(x) = c$ となること。

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから δ はなんでも良い。例えば $\delta = 1$ で OK.
　ちゃんと証明を書くと、「ε を任意の正の数とする。$\delta := 1$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

より、$|f(x) - c| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{x \to a} f(x) = c$.」

2. $f(x) = x$ の場合に、任意の実数 a に対して $\lim_{x \to a} f(x) = a$ となること。

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$$

であるから $\delta = \varepsilon$ とすれば OK.
　ちゃんと書くと「ε を任意の正の数とする。$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

より、$|f(x) - a| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{x \to a} f(x) = a$.」 □

テキストによっては、ここで練習として色々な関数でやってみるものもある。例えば $f(x)=x^2$ について、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (\text{つまり} \ \lim_{x\to a} x^2 = a^2)$$

が成り立つことなど。そういうことは程々にしておいて、次に紹介する定理 (関数の和・差・積・商の極限) を使いこなせるようになることが大事。

定理を使った解答　$F(x)=x$, $g(x)=x$ とおくと、

$$f(x) = x^2 = F(x)g(x)$$

であるから、

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x)g(x) = \lim_{x\to a} F(x) \lim_{x\to a} g(x) = a\cdot a = a^2 = f(a).$$

— これは簡単。具体的な関数で考える方が簡単とは限らない。

命題 5.3 (関数の和、差、積、商の極限)

I は $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A, B \in \mathbb{R}$ とする。$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$
4. $B \neq 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

細かい注　関数 $\frac{f}{g}$ の定義域は $J := \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ であり、これは $\mathbb{R}$ の区間であるとは限らないので、上で説明した極限の定義の範囲の外に出てしまうかもしれない。それと本当は、$g(x) \neq 0$ $(x \in I)$ とか、$a \in \overline{J}$ のような条件を書くべき。

大筋は数列のときと同様に証明できる。
数列のときは、和の場合, 積の場合を証明したので、今回は (4) 商の場合を証明してみる。

証明を書き出す前に、予備的な考察をする。

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{f(x)B-Ag(x)}{g(x)B}\right|=\left|\frac{f(x)B-AB+AB-Ag(x)}{g(x)B}\right|$$
$$\leq\frac{|f(x)-A|}{|g(x)|}+\frac{|A|\,|B-g(x)|}{|g(x)|\,|B|}$$

分子だけを見れば $|f(x)-A|$, $|B-g(x)|$ が任意に小さい数で抑えられることは明らかである。問題は $\dfrac{1}{|g(x)|}$ の評価である。

$x\to a$ のとき $g(x)\to B$ で、$B\neq 0$ であることを用いると、$\dfrac{1}{|g(x)|}$ が適当な定数で上から抑えられる (つまり有界) ことが実は分かる。

命題 5.3 証明の前半 (第 1 段)

まず $B \neq 0$ であるから $|B| > 0$ に注意しておく。
$x \to a$ のとき $g(x) \to B$ であるから、ある正の数 δ_1 が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta_1) \quad |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}.$$

このとき、

$$|g(x)| = |g(x) - B + B| \geq |B| - |g(x) - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} > 0.$$

ゆえに

$$g(x) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}.$$

($y = |g(x)|$ のグラフを描くと良いかも。)

命題 5.3 証明の後半 (第 2 段)

$f(x) \to A$ であるから、ある正の数 δ_2 が存在して、

$$(\forall x \in I : |x-a| < \delta_2) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}}.$$

また、$g(x) \to B$ であるから、ある正の数 δ_3 が存在して、

$$(\forall x \in I : |x-a| < \delta_3) \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|}}.$$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと、$\delta > 0$. $|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &\le \frac{|f(x)-A|}{|g(x)|} + \frac{|A|\,|g(x)-B|}{|g(x)|\,|B|} \\
&\le \frac{2}{|B|}\,|f(x)-A| + \frac{2|A|}{|B|^2}\,|g(x)-B| \qquad \left(\frac{1}{|g(x)|} \le \frac{2}{|B|} \text{ を代入した}\right) \\
&< \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}} + \frac{2|A|}{|B|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|^2}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2|A|}{2|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$. $\square$ (複雑と言えなくもないけれど、分かるといいな…)

参考文献

[1] 桂田祐史：数学解析, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).