数学解析 第 11 回
～ 開集合と閉集合 (1) ～

桂田 祐史

2021 年 6 月 28 日

目次

本日の内容&連絡事項

- オンライン資料は、動画 (part 2〜6) は昨年度資料からの流用、PDF は今年度版 (対面授業で用いるもの) とする。ページ番号に最大 2 のズレがあるが内容はほぼ同じである。
- 宿題 6 の補足説明をする。
- 前回、Weierstrass の最大値定理の 1 次元版

  $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の最大値、最小値が存在する。

  を紹介した。その多次元化

  K を $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合とする。$f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の最大値、最小値が存在する。

  を目指す。
- 本日の授業内容: $\mathbb{R}^n$ の開集合と閉集合について説明する。それぞれ、定義と基本的な性質 (定理 A, C)、判定するために使える定理 (定理 B, D) を述べる。

宿題 6(問 6) について

宿題 6 について、どう取り組むか授業中に簡単に (1 分程度？) 説明した覚えがあります。しかし、オンライン資料の方でそれがどこにも見当たらない、ということが、質問を受けて分かりました。すでに Oh-o! Meiji の方には、ヒントの追加を出してありますが、目にしていない人が多いと思われるので、再録します。

- f は原点以外のところでは有理関数に一致するので、C^∞ 級である。(調べる必要があるのは原点のところだけということになる。)
- (1) は lim を用いた定義に基づき計算する。(商の微分法で、$(x, y) \neq (0, 0)$ における f_x, f_y を求めて、その極限を計算するのは誤答。)
- (2) は、C^1 級の定義を思い出すと、原点で f_x, f_y が連続であることを示せば良い。それは問 5 などでやったことと同様。
- (3) はおまけ。(1) の発展版。(微積分の問題で、「数学解析」としては脱線かもしれない。)

前回の補足: Taylor の定理について

前回、Weierstrass の最大値定理から導かれるものとして、Taylor の定理をあげたが、定理そのものを見せておくべきだった。

Taylor の定理

$k \in \mathbb{N}$, I は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon I \to \mathbb{R}$ は k 回微分可能、$a, x \in I$, $a \neq x$ のとき

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-a)^k$$

を満たすような c が、a と x の間 ($a < c < x$ または $x < c < a$) に存在する。

初めて目にしたとき、式の形に目が行く人が多いと思われるが (当然である)、ある条件を満たすものが存在するという、いわゆる存在定理であることにも注意を払うべきである。

開集合・閉集合は、数学のいたるところで使われる。

$\mathbb{R}^n$ の開集合・閉集合の定義と、4 つの定理 (A,B,C,D) をマスターしよう (B, D は微積分向き)。

定義 11.1 ($\mathbb{R}^n$ の開集合)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。Ω が $\mathbb{R}^n$ の**開集合**(かい) (開部分集合, an open (sub)set of $\mathbb{R}^n$) とは、次の条件を満たすことをいう。

(♡) $$(\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$$

記号の復習 $B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$.
(この記号は普通は $r > 0$ のときだけ用いるが、本日は $r = 0$ の時にも用いることにする。$r = 0$ のとき $B(a;r) = \emptyset$ である。)

7.1 $\mathbb{R}^n$ の開集合の定義　$\mathbb{R}^n$ の開集合のイメージ

開集合とは、自分の縁(ふち) (数学語では**境界**) の点を含まない集合

ゆえに自分の縁の点を一つでも含む集合は、開集合ではない。

理由の説明　(これはわからなければ聞き流して良い)

任意の $a \in \Omega$ に対して、a と Ω の補集合 $\Omega^{\complement}$ までの距離を ε とすると、$B(a;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つ (a と $\Omega^{\complement}$ との距離とは、$\inf_{x \in \Omega^{\complement}} |x-a|$ のこと)。

- a が縁の点でなければ $\varepsilon > 0$ となるから、Ω が自分の縁の点を含まなければ、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
- a を縁の点であれば、a と $\Omega^{\complement}$ との距離は 0 である。ε を正の数とすると $B(a;\varepsilon)$ は Ω をはみ出すので、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。

証明は後回しにして、まずは「イメージ」で理解しよう。

- $\mathbb{R}$ の開区間は $\mathbb{R}$ の開集合である。
- $\mathbb{R}^n$ の開球は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
- 正多角形から辺を除いた部分 (“内部”) は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。より一般に単純閉曲線が囲む部分 (ただし曲線は含めない) は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。
- $\mathbb{R}^n$ の閉球は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。
- 1 点からなる集合 $\{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない (こういうのは、縁が何か分かりにくいかもしれない。そろそろイメージの限界で、定義の条件が成り立つかを論理的に判断するしかない)。

以上は定義から直接証明できるが、判定に便利な定理を用意する。

7.2 開集合系 (位相) の公理 (定理 A)

定理 11.2 (開集合系 (位相) の公理, この授業では定理 A と呼ぶ)

1. $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は、$\mathbb{R}^n$ の開集合である。
2. 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 U_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、合併 $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{x \mid (\exists\lambda\in\Lambda)\ x\in U_\lambda\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
3. U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$U_1\cap U_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(2) から「U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$U_1\cup U_2$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合」が成立。

余談的注意　開集合の概念は $\mathbb{R}^n$ にとどまらず一般化される ($\mathbb{R}^n$ の部分集合の開集合, 距離空間の開集合, 位相空間の開集合)。もっとも一般の場合: 集合 X と、X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{O}$ が次の 3 条件を満たすとき、$(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$\mathcal{O}$ を X の位相、$\mathcal{O}$ に属する集合を X の開集合と呼ぶ。

1. $\emptyset, X\in\mathcal{O}$.
2. 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 U_λ が $U_\lambda\in\mathcal{O}$ を満たすならば、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\in\mathcal{O}$.
3. $U_1, U_2\in\mathcal{O}$ ならば $U_1\cap U_2\in\mathcal{O}$.

1. 空集合の定義から、任意の x に対して $x \in \emptyset$ は偽である。ゆえに

$$\forall x\,(x \in \emptyset \Rightarrow ((\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \emptyset))$$

は真である。すなわち

$$(\forall x \in \emptyset)(\exists \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \subset \emptyset$$

が満たされるので、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
$x \in \mathbb{R}^n$ とするとき、$\varepsilon = 1$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、

$$B(x;\varepsilon) = B(x;1) \subset \mathbb{R}^n$$

が成り立つ。ゆえに $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

2. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に属する任意の U_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であると仮定する。
   $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とするとき、ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x \in U_{\lambda_0}$.
   U_{λ_0} は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して
   $B(x;\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$.
   $U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ であるから、$B(x;\varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

   ゆえに $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

7.2 開集合系 (位相) の公理 (定理 A)　定理 A の証明 (3)

3. U_1, U_2 は $\mathbb{R}^n$ の開集合であると仮定する。
   $x \in U_1 \cap U_2$ とすると、$x \in U_1$ かつ $x \in U_2$.
   U_1 と U_2 は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、ある $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ が存在して $B(x;\varepsilon_1) \subset U_1$ かつ $B(x;\varepsilon_2) \subset U_2$.
   $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり

$$B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_1) \subset U_1 \wedge B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_2) \subset U_2.$$

   ゆえに $B(x;\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$. ゆえに $U_1 \cap U_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

$\square$

7.3 開集合の判定 (定理 B)

微積分では、与えられた集合が開集合であることの判定には、次の定理が便利である。

定理 11.3 (真不等号の不等式は開集合を定める, この授業では定理 B)

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とするとき

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\},\\
\Omega_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\},\\
\Omega_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\},\\
\Omega_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}
\end{aligned}
$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(利用上の注意: f の定義域が $\mathbb{R}^n$ であることが重要である。)

任意の $a \in \Omega_1$ に対して、$f(a) > \alpha$. ゆえに $\varepsilon := f(a) - \alpha$ とおくと $\varepsilon > 0$. f は a で連続だから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

この不等式は $-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$ と同値であるから

$$f(x) > f(a) - \varepsilon = f(a) - (f(a) - \alpha) = \alpha \quad \text{ゆえに} \quad x \in \Omega_1.$$

これは $B(a; \delta) \subset \Omega_1$ を意味している。ゆえに Ω_1 は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -f(x) > -\beta\},$$
$$\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\},$$
$$\Omega_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \gamma\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \gamma\}$$

であるから、すでに示したことと定理 A によって、これらの集合も $\mathbb{R}^n$ の開集合である。 $\square$

例 11.4 (開区間は開集合)

$n = 1$, $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると、$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続で

$$
\begin{aligned}
(\alpha, \beta) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}, \\
(\alpha, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}, \\
(-\infty, \beta) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}
\end{aligned}
$$

であるから、「$\mathbb{R}$ の開区間は $\mathbb{R}$ の開集合である」。

例 11.5 (開球は開集合)

$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とする。$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := |x - a|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2$$

で定めると、これは多項式関数なので、f は連続である。

$$B(a;r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) < r^2 \right\}$$

であるから、「$\mathbb{R}^n$ の開球は $\mathbb{R}^n$ の開集合である」。

(つぶやき: この証明は、有限次元でしか通用しないな…)

例 11.6 (第 1 象限は $\mathbb{R}^2$ の開集合)

第 1 象限 (ふつう軸は含まない)

$$\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0 \land y>0\right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。実際

$$\Omega_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0\right\},\quad \Omega_2 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y>0\right\}$$

とおくと、Ω_1 と Ω_2 は、ともに $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 >0 という条件で定められる集合であるから、定理 B によって $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

が成り立つので、定理 A によって、Ω も $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

7.4 開集合の例 (証明つき)

例 11.7 (三角形の内部は $\mathbb{R}^2$ の開集合)

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形の内部

$$\{(x,y) \mid x>0 \land y>0 \land x+y<1\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。任意の三角形の内部は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

例 11.8 (1 点からなる集合の補集合は $\mathbb{R}^n$ の開集合)

$c \in \mathbb{R}^n$ とするとき

$$\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{c\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。実際、$f(x) := |x-c|^2$ は (多項式関数なので) $\mathbb{R}^n$ 上定義された連続関数であり

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$$

が成り立つので、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

$\mathbb{R}^n$ の開集合でないことの証明はどうすれば良いか？定理 B は使えない。定義に戻って考えることを勧める。

$$\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合である} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall a \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) B(a;\varepsilon) \subset \Omega$$

であるから

$$\begin{aligned}\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合でない} &\Leftrightarrow (\exists a \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0) B(a;\varepsilon) \not\subset \Omega \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0) B(a;\varepsilon) \cap \Omega^{\complement} \neq \emptyset.\end{aligned}$$

この条件が成り立つことを証明するには、a は Ω の縁に取れば良い。

例 11.9 (閉球は開集合ではない)

$c \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とするとき、$\Omega = \overline{B}(c;r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。

　実際、$a := c + r\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, \cdots, 0)^T$ とおくと

$$|a - c| = |r\boldsymbol{e}_1| = |r|\,|\boldsymbol{e}_1| = r \cdot 1 = r$$

であるから、$a \in \overline{B}(c;r) = \Omega$.

　任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$x := a + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1$ とおくと

$$|x - a| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

であるから、$x \in B(a;\varepsilon)$. ところが

$$x = a + \frac{\varepsilon}{2}e_1 = (c + r\boldsymbol{e}_1) + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1 = c + \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right)\boldsymbol{e}_1$$

であるから

$$|x - c| = \left|\left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\right| = \left|r + \frac{\varepsilon}{2}\right| \cdot |\boldsymbol{e}_1| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r.$$

ゆえに $x \notin \overline{B}(c;r) = \Omega$. ゆえに $B(a;\varepsilon) \not\subset \Omega$. ゆえに Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。

7.6 $\mathbb{R}^n$ の閉集合の定義

定義 11.10 ($\mathbb{R}^n$ の閉集合)

$F \subset \mathbb{R}^n$ とする。F が $\mathbb{R}^n$ の**閉集合** (閉部分集合, a closed (sub)set of $\mathbb{R}^n$) であるとは、F の補集合 $F^{\complement}$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。

図形的イメージ: 閉集合は自分自身の縁の点をすべて含む集合である。

$\mathbb{R}$ の閉区間は $\mathbb{R}$ の閉集合、$\mathbb{R}^n$ の閉球は $\mathbb{R}^n$ の閉集合、多角形 (辺を含める) は $\mathbb{R}^2$ の閉集合、1 点からなる集合 $\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

重要な注意　経験によると、非常に多くの人達が、

「閉集合とは、開集合でない集合」**と間違える**。

正しくは

「閉集合とは、その補集合が開集合である集合である」。

開集合かつ閉集合である集合 (例えば $\mathbb{R}^n$)、開集合でも閉集合でもない集合 (例えば $[a,b)$)、どちらも存在する。

7.7 閉集合系の公理 (定理 C)

定理 A の閉集合バージョンが成り立つ。

定理 11.11 (閉集合系の公理，この授業では定理 C と呼ぶ)

1. $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。
2. 集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の各集合 F_λ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \{x \mid (\forall\lambda \in \Lambda)\ x \in F_\lambda\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。
3. F_1 と F_2 が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であれば、$F_1 \cup F_2$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

証明　補集合を考えて、開集合の話に帰着させる、という方針で、とても単純である (と思う)。

1. $(\emptyset)^{\mathsf{C}} = \mathbb{R}^n$ は (定理 A(1) により) $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。
   $(\mathbb{R}^n)^{\mathsf{C}} = \emptyset$ は (定理 A(1) により) $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

定理 C の証明 (続き)

2. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、F_λ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合と仮定する。ド・モルガン律により
$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^{\complement} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(F_\lambda^{\complement}\right).$$
$F_\lambda^{\complement}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、(定理 A(2) により) 右辺は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに、$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^{\complement}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるので、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

3. F_1 と F_2 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合と仮定する。ド・モルガン律により
$$(F_1 \cup F_2)^{\complement} = \left(F_1^{\complement}\right) \cap \left(F_2^{\complement}\right).$$
$F_1^{\complement}$, $F_2^{\complement}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、(定理 A (3) によって) 右辺は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに、$(F_1 \cup F_2)^{\complement}$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$F_1 \cup F_2$ は、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 □

7.8 閉集合の判定 (定理 D)

定理 11.12 (等号付きの不等式は閉集合を定める, 授業では定理 D)

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続であり、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \alpha\}, \\ F_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}, \\ F_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta\}, \\ F_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\} \end{aligned}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

証明　(方針はこれまでと同じである。)

$$\begin{aligned} F_1^{\complement} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\}, \\ F_2^{\complement} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \beta\} \end{aligned}$$

は定理 B によって $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、F_1, F_2 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

定理 D の証明 (続き)

証明 (続き)　F_3, F_4 についても同様に証明できる。実際

$$\neg(\alpha \le f(x) \le \beta) \equiv f(x) < \alpha \vee f(x) > \beta,$$
$$\neg(f(x) = \gamma) \equiv f(x) < \gamma \vee f(x) > \gamma$$

であるから

$$F_3^{\complement} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \beta\},$$
$$F_4^{\complement} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \gamma\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \gamma\}.$$

定理 B と定理 A(2) により、右辺はともに $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに F_3 と F_4 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(別証)　あるいは

$$F_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \beta\},$$
$$F_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge \gamma\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \gamma\}$$

は、定理 D の既に示した部分と定理 C (2) によって、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 □

7.9 閉集合の例

開集合の例の不等式を等号つきの不等式に変えるだけで済むものが多いので、少し簡略化して書く。

例 11.13 (閉区間は閉集合)

$[\alpha, \infty)$, $(-\infty, \beta]$, $[\alpha, \beta]$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である。

例 11.14 (閉球は閉集合)

R^n の閉球 $F := \overline{B}(c; r)$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合。実際

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x - c|^2 \le r^2 \right\}$$

であるから。

例 11.15 (1 点からなる集合は閉集合)

$F := \{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(証明 1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x) := |x-c|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n (x-c_j)^2$ で定めると、これは多項式関数であるから、$\mathbb{R}^n$ で連続である。$\{c\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ であるから、定理 D によって、$\{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 □

一方

$$x = c \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n (x-c_j)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = c_1 \wedge x_2 = c_2 \wedge \cdots \wedge x_n = c_n$$

に注意すると、次のような証明も出来る。

(証明 2) $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して、$f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f_i(x) := x_i - c_i$ で定めると、これは多項式関数であるから、$\mathbb{R}^n$ で連続である。ゆえに (定理 D によって) $F_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

$$\{c\} = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$$

であるから、(定理 C(2) によって) $\{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 □

問 7(案) の紹介

本日と次回の授業から出題する。(1),(2) は本日の授業内容で解答できるので、とりあえず公開しておく。(2) まで解いておくと良い (正式には次回出題ということになる)。

課題文と TeX ソース

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi7.pdf
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi7.tex

命題 11.16 (Rolle の定理)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続で、(a,b) で微分可能, $f(a) = f(b)$ が成り立つならば、$\exists c \in (a,b)$ s.t. $f'(c) = 0$.

(グラフを描いて考えること。)

証明.

$I = [a,b]$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合であるから、I 上の連続関数である f は最大値と最小値を持つ (Weierstrass の最大値定理による)。最大値と最小値が等しい場合、f は定数関数であるから、$c := \dfrac{a+b}{2}$ とおけば $f'(c) = 0$, $a < c < b$.

最大値と最小値が等しくない場合、少なくとも一方は $f(a) = f(b)$ に等しくない。すると、ある内点 c で、f は最大値かまたは最小値を取ることになる。「微分可能な f が内点 c で極値を取れば $f'(c) = 0$」という定理によって、$f'(c) = 0$. □

付録: 1 変数関数に対する平均値の定理と Taylor の定理

命題 11.17 (平均値の定理 (the mean value theorem))

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続で、(a,b) で微分可能とするとき、$\exists c \in (a,b)$ s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

定理 11.18 (Taylor の定理)

$k \in \mathbb{N}$, I は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon I \to \mathbb{R}$ は k 回微分可能, $a \in I$, $x \in I$, $a \neq x$ とするとき

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + R_k$$

によって R_k を定義すれば

$$(2) \qquad R_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-a)^k$$

を満たす c が a と x の間に[a] 存在する。

[a] $a < x$ ならば $c \in (a,x)$, $x < a$ ならば $c \in (x,a)$, $a = x$ ならば $c = a$.

付録: 1 変数関数に対する平均値の定理と Taylor の定理

- 平均値の定理は、 Rolle の定理を一般化したものである。
- Taylor の定理は、平均値の定理を一般化したものである ($k = 1$ とすると、ほぼ平均値の定理)。
- 平均値の定理の証明は簡単。Taylor の定理は、ややトリッキーな証明しかない (？)。いずれにしても、Rolle の定理に帰着させる。微積分のテキストに載っている通りで、「数学解析」としては、付け足すことはないので説明は省略する。
- これが重要：平均値の定理にしても、Taylor の定理にしても、存在定理 (何かの存在を主張する定理) である。Rolle の定理の c の存在は、Weierstrass の最大値定理で証明された。それは、さかのぼると、数列の極限で、Bolzano-Weierstrass の定理を用いた。
- 「$f' > 0$ ならば f は増加関数」のようなよく知っている定理も、厳密に証明するには、普通は平均値の定理を使う
($f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ の右辺は 2 つの正の数の積だから正、とする)。

参考文献