数学解析 第 13 回

～ 積分 (1) Riemann 積分の定義, 閉区間上の連続関数の積分可能性 ～

桂田 祐史

2021 年 7 月 12 日

目次

本日の内容&連絡事項

- 前回の授業で、期末試験に代わる「期末レポート課題」について説明しました。見逃している人はチェックしておいて下さい。
- 今回と次回 (最終回)、積分の話をします。積分もある種の極限として定義されます。その定義と、どういう場合に存在が保証されるのかが重要なところです。

積分は、計算の方法に関する話も色々あるが、その他にも論ずべきことは多い。

1. **Riemann 積分**（リーマン）の基礎
   1. 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の**定義** (Riemann 和の極限)
      定理「$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は (必ず) **存在**する。」
   2. 多次元の場合 (有界 Jordan 可測 (面積, 体積確定) 集合上の積分)
2. **広義積分** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cdots dx$ とか。**非有界なもの、不連続なもの**の現れる積分。
   あちこちでばりばり使われる (確率論の正規分布とか、Laplace 変換とか、「数学とメディア」や「信号処理とフーリエ変換」の Fourier 変換とか)。
3. **Lebesgue 積分**（ルベーグ）— 現代数学の常識、**完備な関数空間**を構成するために必要。「応用測度論」でさわり。

8.1.2 高校での定積分の定義の復習から

被積分関数 f の原始関数 F ($F' = f$ を満たす F) を用いて、次のように定義

$$\int_a^b f(x)\,dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

批判「原始関数はいつでも存在するのか？」すぐ分かるときだけ考えた。

分からないことは多い

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad (\alpha, \beta > 0;\ \text{特に非整数}),$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}$$

などなど。どれも切実に必要である。

新しい関数が必要になる。むしろこれらの積分によって新しい関数が定義出来る、と前向きに考えるのがよい。

8.1.3 大学での積分の定義に向けて

どうやって定義するか　(高校流とは違って) 原始関数抜きで定義したい。

- アイディアを一口で言うと、$\int_a^b f(x)\,dx$ は、f のグラフと x 軸、2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積になるようにする。

  でも面積って何だろう？反省が必要。

- もともと、微積分以前に面積・体積の計算法が発達していた。ギリシャでは、エウドクソス、アルキメデスが高度な議論をしていた。和算でも。

大事なのは「微積分の基本定理」

ニュートン、ライプニッツは「**微積分の基本定理**」を発見した。これは微分と積分は互いに逆の演算である、ということ。具体的には次の (1), (2).

1. $\displaystyle\int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$
2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$

高校数学における積分の定義は (1) を利用したと言える。

8.2 積分の定義

1 変数関数の積分を定義して、「有界閉区間上の連続関数の積分が存在する」という定理を紹介する。

それなりに重いけれど、大事なエッセンスが味わえる面もある。積分の話は多変数まで込めると、もっと別の要素も出て来るけれど、ここで学ぶことは多変数にも通用する話である。

定義 13.1 (区間の分割, 分割の小区間, 分割に合う標本点, 分割の幅)

$[a, b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間として、$\Delta = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ を $[a, b]$ の**分割**とする。すなわち

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

各 x_j を Δ の**分点**、$[x_{j-1}, x_j]$ を**小区間**と呼ぶ。

また $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_j\}_{j=1}^{n}$ は、各 j に対して、$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を満たす点列とする。これを (今日は) Δ に**合う標本点**ということにする。

$$|\Delta| := \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1})$$

とおき、これを分割 Δ の**幅**と呼ぶ。

8.2 積分の定義

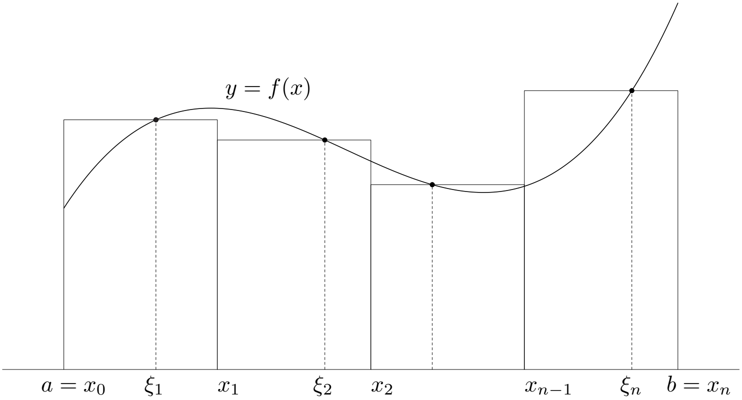

図 1: 長方形の面積の和が $S(\Delta, \xi)$ となる ($n = 4$ の場合)

定義 13.1 ((続き) Riemann 和, Riemann 積分可能, Riemann 積分)

また、有界な関数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して

$$S\left(\Delta, \boldsymbol{\xi}\right) := \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right)$$

とおき (図 1)、これを f の Δ,$\boldsymbol{\xi}$ に関する **Riemann 和**と呼ぶ。

f が $[a,b]$ で **(Riemann) 積分可能**であるとは、ある実数 S が存在して、次の条件を満たすことをいう。

$$\begin{aligned}
&(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\\
&(\forall\Delta = \{x_j\}_{j=0}^{n} : [a,b] \text{ の分割}, |\Delta| < \delta)(\forall\boldsymbol{\xi} = \{\xi_j\}_{j=1}^{n} : \Delta \text{ に合う標本点})\\
&\qquad\qquad |S(\Delta, \boldsymbol{\xi}) - S| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(この条件を満たす S は存在するならば一つしかない。)

このとき、S を f の $[a,b]$ 上の **(Riemann) 積分**と呼び、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す。

8.3 閉区間上の連続関数の積分の存在

積分は、ある種の極限と言える。まず、存在するかどうかが問題となる。

定理 13.2 (有界閉区間上の連続関数の積分の存在)

$[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の有界閉区間、$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とするとき、f は $[a,b]$ で積分可能である。

証明.

証明は 3 段からなる。(第 1 段が長くて難関だが、一度は見せたい議論。しかし全体の筋はどこかで見た話…と感じてほしい。)

1. 次が成り立つ。

   $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$
   $(\forall\Delta=\{x_j\}_{j=0}^{n}$: $[a,b]$ の分割, $|\Delta|<\delta)$
   $(\forall\Delta'=\{x'_j\}_{j=0}^{n'}$: $[a,b]$ の分割, $|\Delta'|<\delta)$
   $(\forall\boldsymbol{\xi}=\{\xi_j\}_{j=1}^{n}$: Δ に合う標本点) $(\forall\boldsymbol{\xi}'=\{\xi'_j\}_{j=1}^{n'}$: Δ' に合う標本点)

   $$(\sharp)\qquad |S(\Delta,\boldsymbol{\xi})-S(\Delta',\boldsymbol{\xi}')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) の証明 (式は複雑だが、実はそんなに難しくはない。) ε を任意の正の数とする。f は $[a,b]$ で**一様連続**であるから (定理 12.5 による)、ある $\delta>0$ が存在して

$$(\forall x\in I)(\forall y\in I:|x-y|<\delta)\quad |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Δ, Δ' は $|\Delta|<\delta$, $|\Delta'|<\delta$ を満たす任意の分割とする。Δ と Δ' の分点を合わせた分割を $\widetilde{\Delta}=\{\widetilde{x}_i\}_{i=0}^{\widetilde{n}}$ とし (これがよく使うテクニック)、$\widetilde{\Delta}$ に合う標本点 $\boldsymbol{\xi}=\{\widetilde{\xi}_i\}_{i=0}^{\widetilde{n}}$ を (何でも良いので)1 つ作る。例えば中点を採用して

$$\widetilde{\xi}_i:=\frac{\widetilde{x}_i+\widetilde{x}_{i-1}}{2}.$$

このとき実は

$$(\flat)\qquad \left|S(\Delta,\boldsymbol{\xi})-S\left(\widetilde{\Delta},\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad \left|S\left(\Delta',\boldsymbol{\xi}\right)-S\left(\widetilde{\Delta},\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

が成り立つ。これが示されれば、三角不等式により ($\sharp$) はすぐ導かれる。($\flat$) の 2 式の証明はどちらでも同じだから、前者を示す。

Δ の 1 つの小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ が、$\widetilde{\Delta}$ では ℓ 個の小区間

$$[\widetilde{x}_{k+j-1}, \widetilde{x}_{k+j}] \quad (j = 1, 2, \cdots, \ell)$$

に分割されたとする ($\ell = 1$ ということもあり得る)。Riemann 和の対応する部分の差は

$$\begin{aligned}
\left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{j=1}^{\ell} f\left(\widetilde{\xi}_{k+j}\right)(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \right| &= \left| \sum_{j=1}^{\ell} \left(f(\xi_i) - f\left(\widetilde{\xi}_{k+j}\right)\right)(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \right| \\
&\le \sum_{j=1}^{\ell} \left| f(\xi_i) - f\left(\widetilde{\xi}_{k+j}\right)\right| (\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \\
&\le \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^{\ell} (\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

これを $i = 1, \cdots, n$ について加えると

$$\left| S(\Delta, \boldsymbol{\xi}) - S\left(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\right) \right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$x_j^{(n)} := \frac{j(b-a)}{n} \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \quad \Delta^{(n)} := \left\{x_j^{(n)}\right\}_{j=0}^{n},$$

$$\xi_j^{(n)} := \frac{x_{j-1}^{(n)} + x_j^{(n)}}{2}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(n)} := \left\{\xi_j^{(n)}\right\}_{j=0}^{n}.$$

で $\Delta^{(n)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ を定めると (つまり n 等分の分割と真ん中標本点)、数列 $\left\{S(\Delta^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(n)})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、収束する。すなわち、ある $S \in \mathbb{R}$ が存在して

$$S = \lim_{n\to\infty} S\left(\Delta^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right).$$

証明　Cauchy 列であることを示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、第 1 段の $\delta > 0$ を取る。$N > \frac{b-a}{\delta}$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取ると、$n, m \geq N$ を満たす任意の n, $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\left|\Delta^{(n)}\right| = \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{N} < \delta, \quad \left|\Delta^{(n)}\right| = \frac{b-a}{m} \leq \frac{b-a}{N} < \delta$$

であるから

$$\left|S\left(\Delta^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right) - S\left(\Delta^{(m)}, \boldsymbol{\xi}^{(m)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに $\left\{S(\Delta^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(n)})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから、極限 S が存在する。 □

3. 第 2 段の S を取る。

   任意の $\varepsilon > 0$ に対して、第 1 段の $\delta > 0$ を取る。

   このとき $|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割 Δ と、Δ に合う標本点 $\boldsymbol{\xi}$ に対して、$|S(\Delta, \boldsymbol{\xi}) - S| < \varepsilon$ が成り立つ。

   実際、$\dfrac{b-a}{n} < \delta$ となる任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り、n 等分の分割 $\Delta^{(n)}$ と真ん中標本点 $\{\xi_j^{(n)}\}_{j=0}^n$ の Riemann 和を仲立ちに用いて

$$|S(\Delta, \boldsymbol{\xi}) - S| \le \left| S(\Delta, \xi) - S(\Delta^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(n)}) \right| + \left| S(\Delta^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(n)}) - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

8.4 積分の性質, 微積分の基本定理

積分は Riemann 和の極限であるから、和 $\sum$ と似た性質を持つ。

(1) $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

(2) $$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

以下では、$a < b$ とする。

(3) $$f(x) \le g(x) \quad (x \in [a,b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx,$$

(4) $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx \le \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\, (b-a).$$

(証明は、Riemann 和の極限を考えれば良い。)

8.4 積分の性質, 微積分の基本定理

定理 13.3 (微積分の基本定理)

1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x\in[a,b])$$

は C^1 級で $F' = f$. ゆえに「任意の連続関数 f に対して、f の原始関数が存在する」。

2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば、f の任意の原始関数 G に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b.$$

証明.

1. $x \in [a, b]$, $h > 0$, $x + h \in [a, b]$ とするとき

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt.$$

ゆえに (f の連続性を用いて)

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \max_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)| \to 0 \quad (h \to +0).$$

$h < 0$ のときも同様である。

2. F を (1) の関数とする。$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ であるから、$F(x) - G(x)$ は定数である。それと $F(a) = 0$ を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a). \quad \square$$

8.5 多次元への一般化

(ここはお話だけで済ませる。詳しいことは、例えば桂田 [1] を見よ。)

$\mathbb{R}^n$ の閉区間

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \le x_1 \le b_1 \wedge \cdots \wedge a_n \le x_n \le b_n\} \end{aligned}$$

で定義された有界な関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ の (Riemann) 積分

$$\int_I f(x)\,dx = \int \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

が同様に定義され、連続関数の (Riemann) 積分可能性が証明できる。

しかし、それだけでは不十分である。区間でない集合 Ω ($\subset \mathbb{R}^n$) の上で積分したい。どうするか。Ω は有界として、$\Omega \subset I$ となる区間 I を取り、

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in I \setminus \Omega) \end{cases}$$

で $\widetilde{f}$ を定めて

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \int_I \widetilde{f}(x)\,dx$$

と定義する。

1 つ大きな問題がある。f が連続でも $\widetilde{f}$ は連続とは限らない、多くの場合、$\widetilde{f}$ のグラフは、$\partial\Omega$ のところに断崖絶壁がある。不連続性に取り組む必要がある。

特に $f = 1$ の場合

$$\int_\Omega 1\,dx = \int_I \chi_\Omega(x)\,dx, \quad \chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega). \end{cases}$$

χ_Ω は Ω の特性関数である。この積分は存在するとは限らない (例えば $\Omega = B(0;1) \cap \mathbb{Q}^n$)。

この積分が存在するとき、Ω は**Jordan可測集合**(ジョルダンかそく) (Jordan measurable set) であるという ($n = 2$ のときは面積確定集合, $n = 3$ のときは体積確定集合ともいう)。

この積分は、$n = 2$ の場合は “Ω の面積” を意味する。一般には、Ω の ***n* 次元 Jordan 測度**(そくど)と呼び、$\mu(\Omega)$ や $\mu_n(\Omega)$ のような記号で表す。

$\int_\Omega f(x)\,dx$ は、Ω が Jordan 可測集合である場合にのみ考える。

8.5 多次元への一般化

Jordan 可測集合 Ω で定義された有界な関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が存在するための条件が問題になるが、幸いなことに、究極とも言える解答が用意されている。

定理 13.4 (Lebesgue 1902, Riemann 積分の積分可能条件)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は有界とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

(i) f は Ω で Riemann 積分可能である。

(ii) f の不連続点全体の集合は、Lebesgue 零集合である。

(この定理の証明は省略する。Lebesgue 零集合の定義は次のスライドで紹介する。)

定義 13.5 (Lebesgue 零集合)

$N \subset \mathbb{R}^n$ とする。N が **Lebesgue 零集合**であるとは、任意の正の数 ε に対して、ある $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して、以下の 3 条件を満たすことをいう。

(a) 各 B_j は閉区間または空集合である。 (b) $N \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$. (c) $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) < \varepsilon$.

例 13.6 (Lebesgue 零集合の例)

- 1 点 $a \in \mathbb{R}^n$ からなる集合 $\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 零集合
- $\mathbb{R}^n$ の有限個の点 からなる集合 $\{a_j\}_{j=1}^{\ell}$ は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 零集合
- $\mathbb{R}^n$ 内の線分。$a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$ は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 零集合
- 有界閉集合 K で定義された連続関数 $f\colon K \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{(x, f(x)) \mid x \in K\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の Lebesgue 零集合

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf` (2008).