数学解析 宿題 No. 5　(2021 年 6 月 7 日出題, 6 月 19 日 (土)18:00 までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名____________　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出。)

問 5

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{5x+6y}{x^2+2xy+3y^2+4}\\ \sqrt{\sin\dfrac{\pi}{1+y^2}}\end{pmatrix}$ で定まる関数 $\boldsymbol{f}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ。

(2) 次の極限が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。簡単で良いので根拠を書くこと。

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\begin{pmatrix}x^3-3xy^2\\ 3x^2y-y^3\end{pmatrix}$　(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x+4y}{x+2y}$　(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$　(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}$

問 5 解説　第 8 回授業

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/K08_0607_handout.pdf`

(特に §4.6) を必要に応じて復習してください。

(1) $f_1(x,y) := \dfrac{5x+6y}{x^2+2xy+3y^2+4}$, $f_2(x,y) := \sqrt{\sin\dfrac{\pi}{1+y^2}}$ とおく。

(a) f_1 は有理関数である。任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して、$x^2+2xy+3y^2+4=(x+y)^2+2y^2+4\geq 4>0$ であるから、$x^2+2xy+3y^2+4\neq 0$. ゆえに f_1 の定義域は $\mathbb{R}^2$ で、f_1 は $\mathbb{R}^2$ 全体で連続である。

(b) $\varphi_1(x,y) := \dfrac{\pi}{1+y^2}$ は有理関数で、$1+y^2\geq 1$ であるから $1+y^2\neq 0$. ゆえに φ_1 の定義域は $\mathbb{R}^2$ で、$\varphi_1\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. 値域は $\varphi_1(\mathbb{R}^2)=(0,\pi]$.

$\varphi_2(z)=\sin z$ で定義される $\varphi_2\colon (0,\pi]\to\mathbb{R}$ は、$\mathbb{R}$ 全体で連続な sin の制限であるから連続である。また値域は $\varphi_2((0,\pi])=[0,1]$.

$\varphi_3(u)=\sqrt{u}$ で定義される $\varphi_3\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ は連続である ($[0,\infty)\ni x\mapsto\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ は連続で、φ_3 はその制限だから)。

$j=1,2$ について、φ_j の値域が φ_{j+1} の定義域に含まれる (ここでは正確に一致している) ので、合成できる。実は $f_2=\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1$ であるから、f_2 は $\mathbb{R}^2$ で連続である。

(a), (b) より $\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ で連続である。■

(講評) (b) にてこずった人が多い。f_2 を合成関数とみなす仕方は一通りではない。「φ_j の値域が φ_{j+1} の定義域に含まれる」となっていない人がいた。

(2) (i) の関数を $\boldsymbol{f}$, (ii)–(iv) の関数を f と書くことにする。

(i) $f_1(x,y) := x^3-3xy^2$, $f_2(x,y) := 3x^2y-y^3$ はともに 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに $\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}$ も $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}\begin{pmatrix} x^3-3xy^2\\ 3x^2y-y^3\end{pmatrix}=\lim_{(x,y)\to(2,3)}\boldsymbol{f}(x,y)=\boldsymbol{f}(2,3)=\begin{pmatrix} 2^3-3\cdot 2\cdot 3^2\\ 3\cdot 2^2\cdot 3-3^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8-54\\ 36-27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -46\\ -9\end{pmatrix}.$$

(講評) $=\boldsymbol{f}(2,3)$ となる理由を書かなかった人が少なくない。「f_1, f_2 ともに多項式関数なので、$\mathbb{R}^2$ で連続」というのは難しくないはずだが。

(ii) f は有理関数であり、定義域は $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y\neq 0\}$ で、$(0,0)\notin\Omega$ である。(k を $k\neq -\frac{1}{2}$ を満たす実数とするとき、) $y=kx$ に沿って $(0,0)$ に近づけるときの極限は

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{3x+4(kx)}{x+2(kx)}=\lim_{x\to 0}\frac{3+4k}{1+2k}=\frac{3+4k}{1+2k}.$$

この値は k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x+4y}{x+2y}$ は存在しない。

(iii) f は有理関数であり、定義域は $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^4+y^4\neq 0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で、$(0,0)\notin\Omega$ である。任意の実数 k に対して $y=kx$ に沿った極限を考えると、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(kx)^2}{x^4+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^4}=\frac{k^2}{1+k^4}.$$

この値は k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^4+y^4}$ は存在しない。

(iv) f は有理関数であり、定義域は $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で、$(0,0) \notin \Omega$ である。任意の実数 k に対して $y = kx$ に沿った極限を考えると、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (kx)}{x^2 + (kx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{1 + k^4 x^2} = \frac{k \cdot 0}{1 + k^4 \cdot 0^2} = 0.$$

($x \mapsto \frac{kx}{1+k^4x^2}$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義された有理関数なので、$(0,0)$ で連続であることを用いた。)
ゆえに極限が存在するならば 0. ゆえに $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} - 0\right| = \dfrac{x^2}{x^2+y^4}|y|$ が 0 に収束するかどうかを調べることになる。

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^4} - 0\right| \leq \frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}|y| = |y| \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0))$$

であるから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^4} = 0.$$

(**注意**) この問には現れなかったが、任意の k に対して、$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)$ が共通の極限を持っても、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するとは限らない。