解析概論II

桂田 祐史

2004 年 1 月 29 日

目 次

第 3 章　講義内容イントロダクション **3**
3.1　多変数関数の積分 3
3.1.1　説明の仕方についての注意 3
3.1.2　3 つのヒント 3

第 4 章　多変数関数の積分 **8**
4.1　$\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分 8
4.2　Jordan 可測集合上の積分 18
4.3　零集合 21
4.4　Fubini の定理 25
4.4.1　イントロダクション 25
4.4.2　積分は和の極限であるという立場からの理解 25
4.4.3　積分は測度であるという立場からの理解 26
4.4.4　定理の陳述 27
4.4.5　定理の証明 30
4.5　変数変換の公式 34
4.5.1　イントロダクション 34
4.5.2　定理の紹介 35
4.5.3　例 36
4.6　広義積分 40
4.6.1　1 次元の場合の復習 40
4.6.2　広義積分のための共通の仮定 41
4.6.3　広義積分の定義 43
4.6.4　広義積分の収束・発散の判定法 44
4.6.5　広義積分の計算手順 45
4.6.6　ガンマ関数とベータ関数 48
4.7　項別積分 51
4.7.1　極限の順序交換 51
4.7.2　項別積分、項別微分とは 51
4.7.3　関数族の一様収束と基本的性質 52
4.7.4　項別積分定理と項別微分定理 53
4.7.5　積分記号下の微分 53

第 5 章　面積分と発散定理 **56**
5.1　曲面をどう定義するか 56

5.2 2 次元パラメーター曲面 58
5.3 曲面積と面積分 61
5.4 ベクトル場の法線面積分 64
5.5 Gauss の発散定理 66
5.6 2 次元の Gauss の定理 — Gauss-Green の定理 — 69

第 6 章 ベクトル解析 **70**
6.1 序 70
6.1.1 ベクトル解析とは 70
6.1.2 1 変数の微積分の復習 (微分積分学の基本定理) 70
6.1.3 多変数の場合の問題点 (1 変数との相違点) 72
6.2 ベクトル解析の用語・記号 72
6.3 線積分とポテンシャル 76
6.4 Green の定理 86
6.4.1 定理の陳述 86
6.4.2 縦線領域における証明 88
6.4.3 Green の定理の適用例 90
6.4.4 Green の定理の証明 90
6.5 3 次元ベクトル解析 93
6.6 ベクトル解析公式集 94
6.6.1 2 次元 94
6.6.2 3 次元 95
6.7 ポテンシャルの存在条件再説 95

付 録 A 演習問題 **97**

付 録 B 試験問題 **105**
B.1 1994 年度微分積分学 II・同演習 105
B.1.1 本試験問題 105
B.1.2 解説 105
B.1.3 追試験問題 108
B.2 1995 年度微分積分学 II・同演習 試験問題 109
B.3 1996 年度解析概論 II, 解析概論演習 II 110
B.3.1 本試験問題 110
B.3.2 特別試験問題 111

付 録 C 参考書案内 **113**

第3章　講義内容イントロダクション

解析概論 II は解析概論 I の続きであり、多変数の微分積分学を学ぶ。より詳しく言うと

1. **多変数関数の積分 (重積分)** $\mathbf{R}^N$ の部分集合 Ω 上定義された関数 f の積分

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \iint\cdots\int_\Omega f(x_1, x_2, \cdots, x_N)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_N$$

   を定義し、その基本的な性質を論ずる。

2. **曲面上の微積分 (ベクトル解析あるいは外微分法(がいびぶんほう))** 1変数関数の微分積分学の基本定理、すなわち「微分と積分は互いに逆の演算である」と言う定理の多変数版。いわゆる「ベクトル解析」への入門。キーワードは線積分、面積分、Gauss の定理、Stokes の定理、Green の定理。

3.1　多変数関数の積分

3.1.1　説明の仕方についての注意

記述をゴタゴタしたものにしないために、説明の多くは 1 または 2 変数ですませるが、N 変数 (N は任意の自然数) でも多少面倒になるだけで、本質は全く同じである。

1 変数関数の積分については、1 年生で学んだことになっているが、計算テクニックは別にして、特に理論的な面においては、まだ不十分なので、少し補足する。

3.1.2　3 つのヒント

積分の定義は結構込み入っているので、迷子にならないように、イメージを作るのに役立つヒントを 3 つ述べる。

1. 積分は測度である
2. 積分は和に似ている
3. 積分は微分と深い関係にある

ちなみに「積分」と言ったら普通は定積分のことであって、不定積分を「積分」と (「不定」を略して) 呼ぶことはあまりない。

1. 「積分は測度である」 既に知っているように (細かいことを無視して言い切れば)、

1 変数関数の積分は面積である。

つまり $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ を $f \geq 0$ なる関数とするとき、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= f \text{ のグラフと } x \text{ 軸ではさまれる図形の体積} \\ &= \{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ の面積}.\end{aligned}$$

同様に

2 変数関数の積分は体積である。

つまり $A \subset \mathbf{R}^2$, $f\colon A \to \mathbf{R}$, $f \geq 0$ とするとき、

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\,dxdy &= f \text{ のグラフと } xy \text{ 平面上の図形 } A \text{ ではさまれる立体図形の体積} \\ &= \{(x,y,z); (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\} \text{ の体積}.\end{aligned}$$

(立体図形の絵が自分で描けるようになっておくこと！)

より一般に

N 変数関数の積分は $(N+1)$ 次元測度(measure) である。

ここで、測度[1]というのは、長さ、面積、体積を一般化したものである。つまり

$$\begin{aligned}\text{長さ} &= 1 \text{ 次元測度}, \\ \text{面積} &= 2 \text{ 次元測度}, \\ \text{体積} &= 3 \text{ 次元測度}\end{aligned}$$

であって、4 次元以上の空間の部分集合に対しても測度を考える[2]。

このように

積分について考えることは測度について考えることであり、
どちらかを先に定義すれば、他方はもう一方からすぐ定義できる。

この講義では、よくある流儀に従って、積分を先に定義してから、測度を定義する。

2. 「積分は和に似ている」より正確には

積分は Riemann 和の極限として定義する

というべきである[3]。このことから、

---

[1]測度のことを英語で measure というわけだが、ぜひ一度は英和辞典を引いてみることをお勧めする。

[2]最近では、分数次元も使われるようになった。いわゆる fractal 次元である。

[3]G.F.B.Riemann (1826–1866) は 19 世紀の大数学者。様々な業績があるが、積分に初めて明確な定義を与えた (これは彼の業績の中では小粒な方であるが)。彼の流儀の積分は Riemann 積分と呼ばれる。Fourier 級数の研究がきっかけだった。

積分 $\int$ の性質の多くは和 $\sum$ の性質によく似ている。

例えば

1. (線形性)
$$\int_A \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx = \lambda \int_A f(x)\ dx + \mu \int_A g(x)\ dx.$$
2. (順序の保存) $f \leq g$ on A ならば
$$\int_A f(x)\ dx \leq \int_A g(x)\ dx.$$
3. $$\left| \int_A f(x)\ dx \right| \leq \int_A |f(x)|\ dx.$$
4. $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば
$$\int_A f(x)\ dx = \int_{A_1} f(x)\ dx + \int_{A_2} f(x)\ dx.$$

そもそも、積分を表す記号 $\int$ も、数列の和を表すギリシャ文字 Σ も、ともに “sum” の頭文字 ‘S’ に関係する。

ここでは、1 変数関数の積分の定義を見てみよう。例えば $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ なる場合に、f の $[a,b]$ における積分の定義は次のようにする。まず

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

となる数列 $\Delta = \{x_i; i = 0, 1, \cdots, n\}$ を**区間 $[a,b]$ の分割**と呼ぶ。区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_i; i = 0, 1, \cdots, n\}$ と条件

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を満たす点列 $\xi = \{\xi_i; i = 1, 2, \cdots, n\}$ に対して、f の **Riemann 和** $S(\Delta, \xi)$ を

$$S(\Delta, \xi) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定める。**分割の幅**を 0 に近づけるとき、すなわち

$$|\Delta| \overset{\text{def.}}{\equiv} \max_{i=1,\cdots,n} (x_i - x_{i-1}) \to 0$$

とするとき、$S(\Delta, \xi)$ が極限をもつならば、f は $[a,b]$ で **(Riemann) 積分可能**であるといい、その極限を f の $[a,b]$ での (Riemann) 積分と呼び

$$\int_{[a,b]} f(x)\ dx \quad \text{または} \quad \int_a^b f(x)\ dx$$

で表す。

参考のため、面積の定義も見てみよう。有界な図形 A に対して、座標軸に平行な格子線による格子を考え、

$$\begin{aligned}
A\text{ の}\textbf{内面積} &\overset{\text{def.}}{\equiv} \lim_{\text{格子の幅}\to 0} A\text{ の中に含まれる小区間の面積の和}\\
A\text{ の}\textbf{外面積} &\overset{\text{def.}}{\equiv} \lim_{\text{格子の幅}\to 0} A\text{ と交わりを持つ小区間の面積の和}
\end{aligned}$$

として、

$$A\text{ の内面積} = A\text{ の外面積}$$

となった場合に、「A は**面積を持つ**」あるいは「A は **Jordan 可測集合** (**Jordan measurable set**) である」といい

$$A\text{ の面積} \overset{\text{def.}}{\equiv} A\text{ の内面積} \quad (= A\text{ の外面積})$$

と定義する。

なお、積分と和の類似性で理解しやすいものとしては、次の **Fubini の定理**が重要である。

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy &= \int_{[a,b]}\left(\int_{[c,d]} f(x,y)\,dy\right)dx\\
&= \int_{[c,d]}\left(\int_{[a,b]} f(x,y)\,dx\right)dy.
\end{aligned}$$

(これは「体積 = 軸に垂直な平面による断面積の積分」と解釈することも出来る。) この定理によれば、多変数関数の積分は、1 変数関数の積分を繰り返して行う (**累次積分**とか**重複積分**と呼ばれる) ことによって計算できることになる。1 変数関数の積分の計算法はもう既に知っている。

3. 「積分は微分と深い関係にある」 既に

1 変数関数に関しては微分と積分は互いに他と逆の演算である

ことは知っている。これはつまり

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

あるいは

$$\int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

などの定理 (**微分積分学の基本定理**と呼ばれる) が成り立つことを言っている。これから

1 変数関数の定積分は被積分関数の原始関数を見つければ計算できる

という計算術が導かれるし、非常に重要な応用が豊富にある**部分積分法**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

も、直接の系である。

多変数関数の場合にも、この微分積分学の基本定理に相当するものはあるが、結構深遠な結果であって説明に手間がかかる。これについては重積分について一通り解説し終わってから (つまりは 1, 2 ヶ月後になってから)、じっくりと取り組むことにする。

微分との関係で、より簡単で重要なものに、**変数変換の公式**がある。

第4章　多変数関数の積分

4.1　R^n の閉方体上の積分

$\mathbf{R}^n$ の有界閉区間を $\mathbf{R}^n$ の**閉方体**(へいほうたい)と呼ぶことにする。つまり $\mathbf{R}^n$ の閉方体とは、 $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $\cdots$, $a_n < b_n$ なる $2n$ 個の実数 a_i, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて、

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_n, b_n] \overset{\text{def.}}{=} \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n; a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

と表される $\mathbf{R}^n$ の部分集合である。

例えば $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ の閉方体とは、$a < b$ なる 2 つの実数 a, b を用いて

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\},$$

と表される線分のこと、 $\mathbf{R}^2$ の閉方体とは、$a < b$, $c < d$ なる 4 つの実数 a, b, c, d を用いて

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

と表される長方形のことである。

この節の目標は $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A の上で定義された有界な関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ の A における (A 上の) 積分

$$\int_A f(x)\, dx$$

を定義することである。

定義 4.1.1 (1 次元の閉方体の分割) 1 次元閉方体 $A = [a, b]$ に対して、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b$$

を満たす数列 $\{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ を A の**小閉方体への分割**と呼ぶ。 A の小閉方体への分割 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ があるとき、

(i) $A_j \overset{\text{def.}}{=} [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ を分割 Δ の**小閉方体**と呼ぶ。

(ii) $|\Delta| \overset{\text{def.}}{=} \max\limits_{j=1,2,\cdots,\ell} (x_j - x_{j-1})$ を分割 Δ の**幅**と呼ぶ。

(iii) 各 x_j を Δ の**分点**と呼ぶ。

例 4.1.1 $A = [0, 1]$ とする。自然数 ℓ に対して、

$$x_j = \frac{j}{\ell} \quad (j = 0, 1, \cdots, \ell)$$

とおくと、$\Delta \overset{\text{def.}}{=} \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ は $\mathbf{R}$ の小閉方体への分割となる。このとき $|\Delta| = \dfrac{1}{\ell}$.

定義 4.1.2 (1 次元の閉方体の分割の細分) A を $\mathbf{R}$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とする。このとき、

$$\Delta' \text{ が } \Delta \text{ の}\textbf{細分}\text{(さいぶん)} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \{\Delta'\text{の分点}\} \supset \{\Delta\text{の分点}\}$$

と定義し、このことを

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta$$

と表す。

例 4.1.2 $A = [0,1], \Delta = \left\{\dfrac{j}{2};\ j = 0,1,2\right\}, \Delta' = \left\{\dfrac{j}{4};\ j = 0,1,\cdots,4\right\}, \Delta'' = \left\{\dfrac{j}{6};\ j = 0,1,\cdots,6\right\}$, とすると、

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta, \quad \Delta'' \succcurlyeq \Delta$$

しかし、

$$\Delta'' \not\succcurlyeq \Delta', \quad \Delta' \not\succcurlyeq \Delta''.$$

つまり Δ', Δ'' はどちらがより細かいとも言えない。

注意 4.1.1 一つの閉方体の分割全体の集合 $\mathcal{D}$ は、関係 $\succcurlyeq$ で半順序集合になる。つまり次の 3 つが成立する。

(i) $\forall\Delta \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta$.

(ii) $\forall\Delta \in \mathcal{D}, \forall\Delta' \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta'$ かつ $\Delta' \succcurlyeq \Delta \Longrightarrow \Delta = \Delta'$.

(iii) $\forall\Delta \in \mathcal{D}, \forall\Delta' \in \mathcal{D}, \forall\Delta'' \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta'$ かつ $\Delta' \succcurlyeq \Delta'' \Longrightarrow \Delta \succcurlyeq \Delta''$.

補題 4.1.1 (共通細分の存在) A を $\mathbf{R}$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とするとき、$\exists\Delta''$: A の分割 s.t. $\Delta'' \succcurlyeq \Delta, \Delta'' \succcurlyeq \Delta'$.

証明 分割 Δ'' を

$$\{\Delta''\text{の分点}\} = \{\Delta\text{の分点}\} \cup \{\Delta'\text{の分点}\}$$

となるように定めればよい (つまり Δ, Δ' の分点を合わせて、並べ変えたものを分点全体とするような分割を Δ'' とする)。■

この補助定理の Δ'' を Δ, Δ' の **共通細分**と呼ぶ。

例 4.1.3 $\Delta = \{j/2\}_{j=0}^{2}, \Delta' = \{j/3\}_{j=0}^{3}$ の共通細分を上の補助定理の証明のようにして求めると $\Delta'' = \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$.

定義 4.1.3 (2 次元の閉方体の分割) $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ を $\mathbf{R}^2$ の閉方体とする。$\mathbf{R}$ の閉方体 $[a_i, b_i]$ の分割 Δ_i $(i = 1, 2)$ を組にしたもの $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ を A の小閉方体への分割と呼ぶ。つまり、

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b_1, \quad a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$$

なる点列 $\Delta_1 = \{x_j\}_{j=0,1,\cdots,\ell}$, $\Delta_2 = \{y_k\}_{k=0,1,\cdots,m}$ の組 $\Delta \overset{\text{def.}}{=} (\{x_j\}_{j=0,1,\cdots,\ell}, \{y_k\}_{k=0,1,\cdots,m})$ を A の小閉方体への分割という。このとき

(i) $A_{jk} \overset{\text{def.}}{=} [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell,\ k = 1, 2, \cdots, m)$ を分割 Δ の小閉方体と呼ぶ。

(ii) $|\Delta| \overset{\text{def.}}{=} \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ を分割 Δ の幅と呼ぶ。

定義 4.1.4 (2 次元の閉方体の分割の細分) A を $\mathbf{R}^2$ の閉方体、$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta' = (\Delta'_1, \Delta'_2)$ を A の小閉方体への分割とする。このとき、

$$\Delta' \text{ が } \Delta \text{ の細分} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Delta'_1 \text{ は } \Delta_1 \text{ の細分かつ } \Delta'_2 \text{ は } \Delta_2 \text{ の細分}$$

と定義し、このことを

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta$$

と表す。

補題 4.1.2 (2 次元の閉方体の分割の共通細分の存在) A を $\mathbf{R}^2$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とするとき、$\exists \Delta''$: A の分割 s.t. $\Delta'' \succcurlyeq \Delta$, $\Delta'' \succcurlyeq \Delta'$.

閉方体の分割については $n \geq 3$ でもまったく同様に話を進めることが出来る。書くのはただ単に繁雑なだけだから省略する。

定義 4.1.5 (閉方体の Jordan 測度) $\mathbf{R}^n$ の閉方体

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

の n **次元 Jordan(ジョルダン) 測度(そくど)** (**n-dimensional Jordan measure**) を

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

と定め、記号 $\mu(A)$ で表す:

$$\mu(A) \overset{\text{def.}}{=} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

1 次元 Jordan 測度は長さ、 2 次元 Jordan 測度は面積、 3 次元 Jordan 測度は体積になっていることが分かる。すなわち Jordan 測度というものは長さ、面積、体積の拡張概念である。ここでは閉方体に対してのみ Jordan 測度を定義したが、後でより一般の図形に対して Jordan

測度を定義する。

補題 4.1.3 (ばらして面積を足すと、全体の面積と等しい) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、Δ を A の小閉方体への分割、$\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とするとき、

$$\mu(A)=\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j).$$

(実際に証明を書くと結構面倒であるが、特に面白いところはないし、事実自体は直感的には明らかだから証明は略する。)

定義 4.1.6 (下限和、上限和) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数、Δ を A の分割、$\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とするとき、f の Δ に関する**下限和** $L(f,A,\Delta)$, f の Δ に関する**上限和** $U(f,A,\Delta)$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned}L(f,A,\Delta) &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\inf_{x\in A_j}f(x)\,\mu(A_j)\\ U(f,A,\Delta) &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\sup_{x\in A_j}f(x)\,\mu(A_j).\end{aligned}$$

注意 4.1.2 (記号に関するコメント) $\inf\limits_{x\in S}f(x)$ は $\inf\{f(x);x\in S\}$ とも書ける。inf に馴染みが薄い人は最小値と思って読めばよい。同様に $\sup\limits_{x\in S}f(x)=\sup\{f(x);x\in S\}$ で、こちらは最大値もどきである。

練習問題 $A=[0,1]$, $f(x)=x$, $\Delta=\{j/N\}_{j=0}^{N}$ とするとき、$U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ を求めよ。

$$U(f,A,\Delta)=\sum_{j=1}^{N}\frac{j}{N},\quad L(f,A,\Delta)=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{j}{N}.\blacksquare$$

要するに、下限和は下からの近似、上限和は上からの近似である。明らかに

$$L(f,A,\Delta)\le U(f,A,\Delta)$$

が成り立つ。分割が細かいほど、近似の程度は上がると予想されるが、実際次の命題が成立する。

補題 4.1.4 (分割が細かいほど下限和は大きく、上限和は小さくなる) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数、Δ, Δ' は A の小閉方体への分割で、$\Delta'\succcurlyeq\Delta$ が成り立つとする。このとき

$$L(f,A,\Delta)\le L(f,A,\Delta'),\quad U(f,A,\Delta')\le U(f,A,\Delta).$$

証明　Δ の各小閉方体 S は何個かの Δ' の小閉方体 $S_1, S_2, \cdots, S_\alpha$ に分割される。このとき

$$\mu(S) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \cdots + \mu(S_\alpha).$$

一方 $S \supset S_i$ より $\inf_{x \in S} f(x) \leq \inf_{x \in S_i} f(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, \alpha)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\inf_{x \in S} f(x)\mu(S) &= \inf_{x \in S} f(x) \cdot (\mu(S_1) + \mu(S_2) + \cdots + \mu(S_\alpha)) \\
&= \inf_{x \in S} f(x)\mu(S_1) + \inf_{x \in S} f(x)\mu(S_2) + \cdots + \inf_{x \in S} f(x)\mu(S_\alpha) \\
&\leq \inf_{x \in S_1} f(x)\mu(S_1) + \inf_{x \in S_2} f(x)\mu(S_2) + \cdots + \inf_{x \in S_\alpha} f(x)\mu(S_\alpha).
\end{aligned}$$

あらゆる S に対する和を取ると

$$L(f, A, \Delta) \leq L(f, A, \Delta').$$

上限和についての不等式もまったく同様に証明できる。 ■

系 4.1.1 (下限和は必ず上限和よりも小さいか等しい) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、 Δ, Δ' は A の小閉方体への分割とするとき

$$L(f, A, \Delta) \leq U(f, A, \Delta').$$

証明　Δ'' を Δ, Δ' 共通の細分とすると、補助定理より

$$L(f, A, \Delta) \leq L(f, A, \Delta''), \quad U(f, A, \Delta'') \leq U(f, A, \Delta).$$

ところで一つの分割 Δ'' に関する下限和、上限和については大小関係

$$L(f, A, \Delta'') \leq U(f, A, \Delta'')$$

は明らかであるから結果が従う。 ■

　この証明を見ると、細分という概念のありがたみが分かってくる。

定義 4.1.7 (有界関数の閉方体上の上積分、可積分) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f の A 上の**下積分**(かせきぶん) $L(f, A)$, f の A 上の**上積分**(じょうせきぶん) $U(f, A)$ を次式で定める:

$$\begin{aligned}
L(f, A) &\overset{\text{def.}}{=} \sup_{\Delta \text{ は } A \text{ の分割}} L(f, A, \Delta), \\
U(f, A) &\overset{\text{def.}}{=} \inf_{\Delta \text{ は } A \text{ の分割}} U(f, A, \Delta).
\end{aligned}$$

注意 4.1.3 上の系より明らかに

- 下限和全体の集合 $\{L(f, A, \Delta); \Delta \text{ は } A \text{ の分割}\}$ は上に有界な $\mathbf{R}$ の部分集合
- 上限和全体の集合 $\{U(f, A, \Delta); \Delta \text{ は } A \text{ の分割}\}$ は下に有界な $\mathbf{R}$ の部分集合

であるから、上積分、下積分は有限の実数として定まることが分かる。また

$$L(f, A) \leq U(f, A) \tag{4.1}$$

であることも分かる。

問. (4.1) を証明せよ。

直観的には、下積分は下から測った値、上積分は上から測った値である。素朴に考えると、この二つは常に一致すると思えるが、すぐ後に説明するように、それは誤りである。そこで、上積分と下積分が一致するとき、関数が積分可能であると言うことにする。

定義 4.1.8 (閉方体上の Riemann 積分の定義) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が A 上**可積分**(かせきぶん)(あるいは A で **積分可能**) であるとは、f の A 上の上積分と下積分が一致すること、言い替えると

$$L(f,A)=U(f,A)$$

が成り立つことであると定義する。このとき、この共通値 $L(f,A)$ の値のことを f の A 上の**積分**と呼び、

$$\int_A f(x)\,dx,\quad \iint\cdots\int_A f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n,\quad \int_A f$$

などの記号で表す。

注意 4.1.4 (1) 1 次元の場合、

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx & (a<b) \\ 0 & (a=b) \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f(x)\,dx & (a>b) \end{cases}$$

と定義する。これが高等学校以来使ってきた積分の大学数学流の定義である。

(2) $n\ge 2$ のとき、多変数であることを強調する意味で、(n) **重積分**(じゅうせきぶん)と呼ぶことが多い。

(3) ここで定義した積分は詳しくは **Riemann 積分**と呼ばれる。**Lebesgue**(ルベーグ) **積分**と呼ばれる、より一般の積分もあり、3 年生で学ぶ。性質の良い関数、積分範囲について二つの積分は一致する。**蛇足:** Lebesgue 積分の方がより性質の悪い関数、積分範囲を扱うことが出来る (例えば、すぐ後で紹介する無理数と有理数で場合分けした関数も Lebesgue 積分としては可積分になる)。もともと積分の定義が深く研究されるようになったのは Fourier 級数などの解析学上の問題がきっかけである。「任意の関数は、積分で定義される Fourier 係数で作られた Fourier 級数で表現できる」という言明を正当化する過程で、積分の定義を突き詰めて考える必要が生じた。

(4) f が A で積分可能であることを、「$\displaystyle\int_A f(x)\,dx$ が存在する」ということもある。

例 4.1.4 (定数値関数は任意の閉方体上で可積分である) $f\colon A\to\mathbf{R}$ が定数関数 $f(x)\equiv c$ ならば、f は A 上積分可能で、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx=c\,\mu(A)$. 実際 A の任意の分割 Δ に対して、Δ の小閉方体全体を $\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ とすると、任意の j に対して

$$\sup_{x\in A_j} f(x)=\inf_{x\in A_j} f(x)=c$$

であるから、

$$L(f,A,\Delta)=U(f,A,\Delta)=\sum_{j=1}^{\ell}c\mu(A_j)=c\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j)=c\,\mu(A)$$

ゆえに

$$L(f,A)=U(f,A)=c\,\mu(A)$$

である。よって f が A で積分可能で、

$$\int_A f(x)\,dx=c\,\mu(A).\blacksquare$$

例 4.1.5 (可積分でない関数の例) $A=[0,1]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A\cap\mathbf{Q})\\ 0 & (x\in A\setminus\mathbf{Q})\end{cases}$$

で定めると、A の任意の分割 Δ に対して $L(f,A,\Delta)=0$, $U(f,A,\Delta)=1$ であることが容易に分かるから、 $L(f,A)=0$, $U(f,A)=1$. ゆえに f は A 上可積分ではない。$\blacksquare$

以下しばらく

どういう場合に積分可能か?

を考える。

$$\mathcal{U}\overset{\text{def.}}{=}\text{すべての上限和の値の集合},\quad \mathcal{L}\overset{\text{def.}}{=}\text{すべての下限和の値の集合}$$

と置いたとき、系 4.1.1 の主張は、

$$\forall u\in\mathcal{U},\forall\ell\in\mathcal{L}\quad u\geq\ell$$

ということである。ここで、この 2 つの集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}$ の距離について考えよう。

$$d\overset{\text{def.}}{=}\inf_{u\in\mathcal{U},\ell\in\mathcal{L}}|u-\ell|.$$

とおく。少し考えれば

(1) $d=0\Leftrightarrow f$ は A 上可積分である。

(2) $d>0\Leftrightarrow f$ は A 上可積分でない。

ということが分かる。扱いやすい形に書くと、

定理 4.1.1 (可積分であるための必要十分条件) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数とするとき、

$$f\text{ が }A\text{ で可積分}\iff(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\Delta\colon A\text{ の分割})\ \text{s.t. }U(f,A,\Delta)-L(f,A,\Delta)\leq\varepsilon.$$

証明　($\Leftarrow$) 先の系により、一般に

$$\sup_{\Delta} L(f, A, \Delta) \leq \inf_{\Delta} U(f, A, \Delta)$$

であるが、仮定から右辺が左辺より真に大きいということはあり得ず

$$\sup_{\Delta} L(f, A, \Delta) = \inf_{\Delta} U(f, A, \Delta).$$

すなわち $L(f, A) = U(f, A)$ であるから、f は A 上可積分。
($\Rightarrow$) f が A 上可積分であるとすると、

$$\sup_{\Delta} L(f, A, \Delta) = \inf_{\Delta} U(f, A, \Delta)$$

であるから、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \Delta', \exists \Delta''$: A の分割 s.t.

$$U(f, A, \Delta') - L(f, A, \Delta'') \leq \varepsilon.$$

Δ を Δ', Δ'' の共通の細分とすれば

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) \leq U(f, A, \Delta') - L(f, A, \Delta'') \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

与えられた関数が可積分であるための、具体的な十分条件としては「関数が連続である」というのがある。これを次に示そう (後で、より一般化したシャープな定理を紹介する)。

定理 4.1.2 (閉方体上の連続関数は可積分である) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を連続関数とするとき、f は A 上可積分である。

証明　A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるから (コンパクト集合であり)、その上で定義された連続関数 f は次の性質を持つ。

1. f は A で有界である
2. f は A で一様連続である。

特に後者の方から

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \forall x' \in A \quad |x - x'| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon / \mu(A).$$

そこで Δ を A の分割で $|\Delta| < \delta$ なるものとすると、Δ のすべての小閉方体 A_j $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ について

$$0 \leq \sup_{x \in A_j} f(x) - \inf_{x \in A_j} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(A)}.$$

各辺に $\mu(A_j)$ をかけて和を取ると、

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{x \in A_j} f(x) \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{x \in A_j} f(x) \mu(A_j) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(A)} \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A_j).$$

すなわち

$$0 \leq U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) \leq \varepsilon.$$

これは f が A で積分可能であることを示している。■

命題 4.1.1 (積分の基本的な性質) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$, $g\colon A \to \mathbf{R}$ は A 上可積分な有界関数とするとき、

(1) $\alpha f + \beta g$ も可積分で

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_A f(x)\, dx + \beta \int_A g(x)\, dx$$

(2) A 上で $f \geq g$ が成り立っていれば

$$\int_A f(x)\, dx \geq \int_A g(x)\, dx.$$

(3) $|f|$ も A 上可積分で

$$\left| \int_A f(x)\, dx \right| \leq \int_A |f(x)|\, dx.$$

(4) A を 2 個の小閉方体 A_1, A_2 に分割するとき、f は A_1, A_2 のいずれの上でも可積分であって、

$$\int_A f(x)\, dx = \int_{A_1} f(x)\, dx + \int_{A_2} f(x)\, dx.$$

この命題の証明は省略する。積分を次に説明する Riemann 和を使って定義しておけばほとんど明らかである。

補足: Riemann 和　我々は上で、上積分と下積分が一致することを可積分性の定義としたが、イントロダクションでも述べたように、Riemann 和で定義する流儀もある。

定義 4.1.9 (Riemann 和) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界な関数、 Δ を A の小閉方体への分割で、$\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とする。$\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}$ を $\xi_j \in A_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ なる点列とする時、

$$S(f, A, \Delta, \{\xi_j\}) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j)\mu(A_j)$$

を f の (Δ, $\{\xi_j\}$ に関する) **Riemann 和**と呼ぶ。

この Riemann 和を用いて、我々が既に定義した積分と同等のものが定義出来る。

命題 4.1.2 A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界な関数とするとき、次の二条件は互いに同値である。

(i) f は A で可積分。

(ii) 分割の幅を 0 に近付けると Riemann 和は一定値に収束する。すなわち $(\exists S \in \mathbf{R})$ $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists\delta > 0)$ $(\forall\Delta$: A の分割, $|\Delta| < \delta)$ $(\forall\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}$: $\xi_j \in A_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$. ここで $\{A_j\}$ は Δ のすべての小閉方体$)$

$$|S - S(f, A, \Delta, \{\xi_j\})| < \varepsilon.$$

この命題の証明には、それ自身有名な次の命題を使う。

補題 4.1.5 (Darboux) (ダルブー) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} U(f, A, \Delta) = U(f, A), \quad \lim_{|\Delta|\to 0} L(f, A, \Delta) = L(f, A).$$

証明 簡単のため $n = 1$ の場合に証明する (それでも本質は変わらないから、その気になれば一般の n に対して証明を書くのも (記号が繁雑になりがちで、面倒ではあるが) 難しくはない。)。上積分についてのみ証明する (下積分でも同様に証明できる)。

1. $U(f, A)$ の定義から、$\forall\varepsilon > 0$ 対して、A の分割 $\Delta_\varepsilon = \{z_0, z_1, \cdots, z_\ell\}$ で

$$U(f, A) \le U(f, A, \Delta_\varepsilon) \le U(f, A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

が成り立つものが存在する。これを一つ固定する。

2. $\eta \overset{\text{def.}}{=} \min_{1\le j\le\ell}(z_j - z_{j-1})$ とおき、$|\Delta| < \eta$ なる A の任意の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ を考える。各小閉方体 $[x_{j-1}, x_j]$ の中には Δ_ε の分点は高々一つしか入らない。

3. $\tilde{\Delta}_\varepsilon$ を Δ_ε と Δ の分点を合わせて作った共通の細分とする。まず

$$U(f, A, \tilde{\Delta}_\varepsilon) \le U(f, A, \Delta_\varepsilon). \tag{4.3}$$

Δ の小区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ について考える。

(a) Δ_ε の分点が I_j に入らない、また入っても端点である場合。I_j は分割 Δ_ε の小閉方体でもある。

(b) Δ_ε の分点 z が I_j の内部に入る場合。I_j は $\tilde{\Delta}_\varepsilon$ では

$$I_{j,L} = [x_{j-1}, z], \quad I_{j,R} = [z, x_j]$$

と分割される。$U(f, A, \Delta)$ の定義式中の

$$\sup_{x\in I_j} f(x)(x_j - x_{j-1})$$

は $U(f,A,\Delta)$ の定義式では

$$\sup_{x\in I_{j,L}} f(x)(z-x_{j-1}) + \sup_{x\in I_{j,R}} f(x)(x_j - z)$$

に置き換えられる。

よって、

$$\begin{aligned}
U(f,A,\Delta) - U(f,A,\tilde{\Delta}_\varepsilon) &= \sum_z \left[(\sup_{I_j} f - \sup_{I_{j,L}} f)(z-x_{j-1}) + (\sup_{I_j} f - \sup_{I_{j,R}} f)(x_j - z) \right] \\
&\le \sum_z (M-m)(x_j - x_{j-1}) \le \ell(M-m)|\Delta|.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$0 < \delta < \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{2\ell(M-m)}\right\}$$

なるように Δ を定めると、$|\Delta| < \delta$ ならば

$$U(f,A,\Delta) - U(f,A,\tilde{\Delta}_\varepsilon) < \varepsilon/2. \tag{4.4}$$

以上をまとめて

$$\begin{aligned}
0 \le U(f,A,\Delta) - U(f,A) &= \Big(U(f,A,\Delta) - U(f,A,\tilde{\Delta}_\varepsilon)\Big) + \Big(U(f,A,\tilde{\Delta}_\varepsilon) - U(f,A,\Delta_\varepsilon)\Big) \\
&\quad + (U(f,A,\Delta_\varepsilon) - U(f,A)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これは $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to\varepsilon} U(f,A,\Delta) = U(f,A)$ を意味している。■

命題 4.2 の証明

(i)$\Longrightarrow$(ii) 明らかに

$$L(f,A,\Delta) \le S(f,A,\Delta,\{\xi_j\}) \le U(f,A,\Delta)$$

であるが、ここで $|\Delta|$ を 0 に近付けると、補助定理と仮定から、両端が $\displaystyle\int_A f(x)dx$ に収束する。従って、 Riemann 和も収束する。

(ii)$\Longrightarrow$(i) (省略) ■

4.2 Jordan 可測集合上の積分

この節のあらすじ まず前節で定義した積分を用いて、一般の図形 ($\mathbf{R}^n$ の部分集合) の n 次元 Jordan 測度 (n 次元体積) を定義する。すべての図形が Jordan 測度を持つとは限らない。Jordan 測度を持つ集合のことを Jordan 可測集合と呼ぶ。そして Jordan 可測集合上で定義された有界関数の積分を定義する。

図形 Ω の Jordan (ジョルダン) 測度とは、Ω の**特性関数** (**characteristic function**) χ_Ω の積分である。(ある空間の部分集合の特性関数とは、その部分集合上で 1, 補集合上で 0 となる関数のことである。つまり

$$\chi_\Omega(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \Omega^c) \end{cases}$$

である。)

以下にあげる二つの定義は、直観的にも納得しやすいものなので、必ず理解してもらいたい。注意事項も多いが、最初は飛ばして、大筋をつかんでから、読み直してもらえればよい。

定義 4.2.1 (Jordan 可測集合) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とする。
Ω が n **次元 Jordan 可測** (**n-dimensional Jordan measurable**, n **次元体積確定**) とは、積分 $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx$ が存在することと定義する。ここで

(1) A は $\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる閉方体[a]。

(2) χ_Ω は Ω の特性関数。すなわち $\chi_\Omega(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$ である。

このとき

$$\mu(\Omega) \overset{\text{def.}}{=} \int_A \chi_\Omega(x)\,dx$$

を Ω の n **次元 Jordan 測度** (n-**dimensional Jordan measure**, n **次元体積**) と呼ぶ。

[a]記号の復習: $\overline{\Omega}$ は Ω の閉包、A° は A の内部を表す。

注意 4.2.1 上の定義は A の取り方によらない (いわゆる well-defined である)。つまり $\overline{\Omega} \subset B^\circ$ なる、もう一つの閉方体 B があったとき、

$$\chi_\Omega \text{ が } A \text{ 上可積分} \iff \chi_\Omega \text{ が } B \text{ 上可積分}$$

であり、これが成り立つとき

$$\int_A \chi_\Omega(x)\,dx = \int_B \chi_\Omega(x)\,dx.$$

問 注意で述べた事実を証明せよ。

注意 4.2.2 閉方体については、既にその n 次元 Jordan 測度を定義してある。Ω が閉方体である場合、上の定義 4.2.1 で、二重定義が生じるようだが、これは問題ない。それは Ω が閉方体 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ であるならば、

(1) Ω は n 次元 Jordan 可測。

(2) $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

であることが証明できるから。(とは言っても証明はそれなりに面倒である。時間がないし、それほど面白くもないから、省略する。)

定義 4.2.2 (Jordan 可測集合上の積分の定義) Ω を $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測な部分集合で、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ は有界関数とする。このとき

f が Ω で**可積分** (**積分可能**) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{\Omega}\subset A^\circ$ なる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取って

$$\tilde f(x)\overset{\text{def.}}{=}\begin{cases} f(x) & (x\in\Omega)\\ 0 & (x\in A\setminus\Omega)\end{cases}$$

で $\tilde f$ を定めるとき、$\tilde f$ は A で可積分。

このとき f の Ω 上の積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ を

$$\int_\Omega f(x)\,dx\overset{\text{def.}}{=}\int_A \tilde f(x)\,dx$$

で定める。

注意 4.2.3 この積分の定義によれば、$\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合の Jordan 測度 (n 次元体積) $\mu(\Omega)$ は

$$\int_\Omega 1\,dx \quad (\text{同じものを} \int_\Omega dx \text{ とも書く})$$

とも表せることになる。

命題 4.2.1 (積分の基本的な性質) Ω を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$, $g\colon\Omega\to\mathbf{R}$ は Ω 上可積分な有界関数とするとき、

(1) $\alpha f+\beta g$ も Ω 上可積分で

$$\int_\Omega(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_\Omega f(x)\,dx+\beta\int_\Omega g(x)\,dx$$

(2) Ω 上で $f\ge g$ が成り立っていれば

$$\int_\Omega f(x)\,dx\ge\int_\Omega g(x)\,dx.$$

(3) $|f|$ も Ω 上可積分で

$$\left|\int_\Omega f(x)\,dx\right|\le\int_\Omega|f(x)|\,dx.$$

(4) Ω_1, Ω_2 は Jordan 可測な集合で、

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\quad \Omega_1^\circ\cap\Omega_2^\circ=\emptyset$$

が成り立つとすると

$$\int_\Omega f(x)\,dx=\int_{\Omega_1}f(x)\,dx+\int_{\Omega_2}f(x)\,dx.$$

4.3 零集合

この節の目的 ここはお話です。前節の議論だけでは、可測性、可積分性のイメージがほとんどつかめないでしょうから、補足しよう、ということです。定理は紹介しますが、証明などはしません (一応書いておくけど)。大意をつかんでもらえれば十分です。なお、以下の記述は、スピヴァック「多変数解析学」によります。

与えられた集合が Jordan 可測であるかどうか、また与えられた関数が可積分であるかどうか、どうやって判定すればいいのだろう。この点についてもう少し考えて見よう。
まず積分論において極めつけ重要な概念を導入する。

定義 4.3.1 (零集合) Ω を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする。

Ω が**零集合**(れいしゅうごう) **(null set)** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\{A_j\}_{j=1}^\infty$ s.t. $\begin{cases} A_j \text{ は閉方体 } (j=1,2,\cdots). \\ \Omega\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^\infty A_j. \\ \displaystyle\sum_{j=1}^\infty\mu(A_j)<\varepsilon. \end{cases}$

要するに、零集合とは、測度の和がいくらでも小さくなるような閉方体の列で覆うことが出来るような集合のことで、直観的に言えば、やせた集合である。自分で使い始めると分かるのだが、集合が零集合であることの確認は大抵の場合かなり易しい。

(実は零集合というのは、Lebesgue 積分論の言葉を使えば、 Lebesgue 測度が 0 の集合のことである。 Lebesgue 積分論では、零集合が大活躍するが、Riemann 積分論でも以下に示すように、かなり便利に使える、ということである。)

零集合の性質をいくつか述べておこう。

命題 4.3.1 (やせていれば零集合) $\mathbf{R}^n$ において、

(1) 零集合の部分集合は零集合。

(2) 有限集合は零集合。

(3) 可算無限集合は零集合。特に $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の零集合。

(証明は講義で示す。)

上の命題の (3) をちょっと不思議に思う人がいるだろうが (それくらいの感性は持っていてほしい)、次の命題はもっと驚くべきものである

命題 4.3.2 (零集合は可算無限個足しても零集合) $\mathbf{R}^n$ において、可算個の零集合の合併は零集合である。

この命題の証明は $\mathbf{Q}$ が可算集合であることの証明と同様のアイディアを使って、簡単に証明できる (講義で示す)。

零集合の概念を使うと、可積分性の必要十分条件が次のようにスマートに書ける (本節のハイライト)。

定理 4.3.1 (不連続点全体が零集合 $\Leftrightarrow$ 可積分) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、B を f の不連続点全体の集合、すなわち

$$B \overset{\text{def.}}{=} \{x \in A; f \text{ は } x \text{ で不連続}\}$$

とするとき、

$$f \text{ が } A \text{ で可積分} \iff B \text{ は零集合.}$$

証明

($\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$ とすると、次の条件を満たす開区間の列 $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ が取れる。

(i) $B \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) < \varepsilon.$

$\forall x \in A \setminus B$ に対して、閉方体 V_x で

$$x \in V_x^\circ, \quad \sup_{y \in V_x} f(y) - \inf_{y \in V_x} f(y) < \varepsilon$$

なるものが取れる。このとき

$$\{U_i^\circ\}_{i=1}^\infty \cup \{V_x\}_{x \in A \setminus B}$$

は A の開被覆であるから、そのうちの有限個を選んで A を覆うことが出来る (A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるからコンパクト)。

A の分割 Δ で、その小閉方体がすべて上の有限個の開区間のどれかに含まれるようなものを取る (これが取れることは —略—)。そうして

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &\overset{\text{def.}}{=} \Delta \text{ の小閉方体のうち、いずれかの } U_i^\circ \text{ に含まれるもの全体} \\
\mathcal{A}_2 &\overset{\text{def.}}{=} \Delta \text{ の小閉方体のうち、いずれかの } V_x{}^\circ \text{ に含まれるもの全体}
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{A}_1} \left[\sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y)\right] \mu(S) &\le 2M\varepsilon \qquad (M \overset{\text{def.}}{=} \sup_{y \in A} |f(y)|), \\
\sum_{S \in \mathcal{A}_2} \left[\sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y)\right] \mu(S) &\le \varepsilon \mu(A).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) &= \sum_S \left[\sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y)\right] \mu(S) \\
&< [2M + \mu(A)]\varepsilon.
\end{aligned}$$

これは f が A で可積分であることを表している。

($\Rightarrow$)　f が A で可積分であると仮定する。

$$B_m \overset{\text{def.}}{=} \left\{x \in A; o(f, x) \ge \frac{1}{m}\right\} \quad (m \in \mathbf{N})$$

とおくと $B = \cup_{i=1}^\infty B_m$ となる。ただし、$o(f, a)$ は a における f の振幅

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left(\sup_{x \in B(a;\delta)} f(x) - \inf_{x \in B(a;\delta)} f(x) \right)$$

を表すものとする。

B が零集合であることを示すには、各 B_m が零集合であることを確かめればよい。

A の分割 Δ を

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) < \frac{\varepsilon}{m}$$

が成り立つように取る (これは f が A で可積分という仮定からできる)。

$$\mathcal{A} \overset{\text{def.}}{=} \Delta \text{ の小閉方体のうち内部が } B_m \text{ と交わるもの}$$

とおくと、$\mathcal{A}$ は B_m° の有限被覆である (証明は —略—)。

$S \in \mathcal{A}$ に対して

$$\sup_{y\in S} f(y) - \inf_{y\in S} f(y) \geq \frac{1}{m}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{S\in\mathcal{A}} \mu(A) &\leq \sum_{S\in\mathcal{A}} \left[\sup_S f - \inf_S f\right]\mu(S) \\
&\leq \sum_{S} \left[\sup_S f - \inf_S f\right]\mu(S) \\
&= U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) < \frac{\varepsilon}{m}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{S\in\mathcal{A}} \mu(A) \leq \varepsilon.$$

一方、明らかに $\cup_{i=1}^{\ell}\partial A_i$ は零集合。これは有界閉集合であるからコンパクトであることに注意すると、有限個の閉方体の列 $U_1, \cdots, U_k$ で

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(U_j) < \varepsilon, \quad \cup_{j=1}^{k} U_j \supset \cup_{i=1}^{\ell}\partial A_i$$

を満たすものが取れることが分かる。

$\mathcal{A} \cup \{U_j\}_{j=1}^{k}$ は B_m を覆う (証明は—略—)。そして

$$\sum_{S\in\mathcal{A}} \mu(A) + \sum_{j=1}^{k} \mu(U_j) < 2\varepsilon.$$

ゆえに B_m は零集合である。■

この定理から、系として、重要な命題 (一応定理としておこう) が二つ出る。

定理 4.3.2 (境界が零集合ならば Jordan 可測) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とするとき

$$\Omega \text{ が Jordan 可測} \iff \Omega \text{ の境界 } \partial\Omega \text{ が零集合。}$$

証明 $\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取ったときに

$$\chi_\Omega \text{ が } A \text{ で可積分} \iff \partial\Omega \text{ が零集合}$$

を示せばよいが、前の定理から

$$\partial\Omega = \{x \in A; \chi_\Omega \text{ は } x \text{ で不連続}\}$$

であることを確かめれば十分である。

1. x が Ω の内点とすると
$$x \in U \subset \Omega$$
となる開区間 U が取れるが、このとき $\chi_\Omega = 1$ on U. よって x で χ_Ω は連続である。

2. x が Ω の外点とすると
$$x \in U \subset \mathbf{R}^n \setminus \Omega$$
となる開区間 U が取れるが、このとき $\chi_\Omega = 0$ on U. よって x で χ_Ω は連続である。

3. x が Ω の境界点、すなわち $x \in \partial\Omega$ とすると、$x \in U$ となる任意の開区間 U は Ω の内部とも外部とも共通点を持つ。
   - $y_1 \in U \cap \Omega^\circ$ とすると $\chi_\Omega(y_1) = 1$.
   - $y_2 \in U \cap (\mathbf{R}^n \setminus \Omega)^\circ$ とすると $\chi_\Omega(y_2) = 0$.

   これから χ_Ω は x で不連続であることが分かる。

以上より B は χ_Ω の不連続点全体の集合であることが分かった。 ■
この定理の証明と同様の論法で次の定理が得られる。

定理 4.3.3 (不連続点全体が零集合 $\Leftrightarrow$ 可積分 (一般バージョン)) Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合で、$f \colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界な関数とする。このとき、
$$f \text{ が } \Omega \text{ で可積分} \Leftrightarrow f \text{ の不連続点全体の集合は零集合。}$$

(不連続点が少ないことが積分可能であるための必要条件ということで、書いている者が言うのも何であるが、何とすっきりした結論であることか、感心する。)

4.4 Fubini の定理

4.4.1 イントロダクション

これまで重積分の定義を学んできた。これから具体的に値を計算するために役立つ方法を学ぶ。
ここでは、そのうちの一つ、重積分を 1 次元の積分の繰り返し（累次積分、重複積分という）に変形する「Fubini の定理」を説明する。
まず Fubini の定理の直感的な意味を二通りの方法で示す。

4.4.2 積分は和の極限であるという立場からの理解

平面上で 1 以上 10 以下の整数を座標に持つ点の集合 A を考える。
$$A = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2; 1 \le i, j \le 10\}.$$
各 $(i,j) \in A$ の上に $i^2 j$ という値がおいてあるとして、それらすべての和はいくらになるか？

これは別に難しくはなく、次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in A} i^2 j &= \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{10} i^2 j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{10} i^2 \frac{10\cdot 11}{2} \\
&= \frac{10\cdot 11\cdot(2\cdot 10+1)}{6}\cdot 55 \\
&= 21175.
\end{aligned}
$$

この計算で使った原理を、一般的に表すと

$$
\sum_{a\le i\le b, c\le j\le d} a_{ij} = \sum_{i=a}^{b}\left(\sum_{j=c}^{d} a_{ij}\right)
$$

となる。つまり

「二重級数の和は、一重級数の和の計算 2 回で出来る」

ということである。積分に関してもまったく同様のこと (Fubini の定理) が成り立つ。後で Fubini の定理の証明を学ぶが、それは上の級数の計算と本質的に同等である。

4.4.3 積分は測度であるという立場からの理解

2 次元の閉方体 $A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 上の積分で説明する。いま $f\colon A\ni(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\in\mathbf{R}$, $f\ge 0$ (on A) とするとき、f の A 上の積分

$$
\int_A f(x)\,dx
$$

を考える。すでに述べたように、これは集合

$$
\{(x_1,x_2,y)\in\mathbf{R}^3; (x_1,x_2)\in A, 0\le y\le f(x_1,x_2)\}
$$

の体積である。ところで、高等学校の数学で

「立体図形の体積は、一つの軸に関する断面積を、その軸に沿って積分したものである」

ことを学んだ。このことから

$$
\begin{aligned}
\int_A f(x)\,dx &= \iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\
&= \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2
\end{aligned}
$$

となる。

次元 $n>2$ の場合も、繰り返して用いることによって、

$$
\begin{aligned}
&\iint\cdots\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_n\right)\cdots dx_2\right)dx_1
\end{aligned}
$$

すなわち 1 次元の積分を繰り返すこと (**累次積分**(るいじせきぶん)) に帰着する。

4.4.4 定理の陳述

Fubini の定理を述べよう。何次元でも成り立つ定理であるが、とりあえず 2 次元の場合に書いておく。

定理 4.4.1 (Fubini の定理) $A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ 有界、二条件

(1) f は A で可積分。

(2) $\forall x_1\in[a_1,b_1]$ を固定したとき、

$$x_2\longmapsto f(x_1,x_2)$$

が $[a_2,b_2]$ で可積分。

が満たされるならば、関数

$$F(x_1)=\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2$$

は $[a_1,b_1]$ 上可積分で

$$\int_A f(x)\,dx=\int_{a_1}^{b_1} F(x_1)\,dx_1,$$

すなわち

$$\int_A f(x)\,dx=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1.$$

注意 4.4.1 二つの条件 (1), (2) のうち本質的なのは (1) の方で、(1) を仮定するだけで (2) を少し弱くした条件が成立し、適当な修正を加えた上で、定理の最後の等式も成立する。しかし、ここではあまり欲張らないことにする。

注意 4.4.2 (知っていても知らなくても、後の説明を理解するのには関わりのないことだが) 条件 (2) に現れる関数 $x_2\mapsto f(x_1,x_2)$ のことを $f(x_1,\cdot)$ と表すことがある。

注意 4.4.3 特に f が A 上連続であれば、*(1), (2)* は満たされる。つまり次の系が成り立つ。

系 4.4.1 (連続関数に対する Fubini の定理) $A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ 連続ならば関数

$$F(x_1)=\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2$$

は $[a_1,b_1]$ 上連続（したがって可積分）で

$$\int_A f(x)\,dx=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1.$$

例 4.4.1 $A=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=x^2y$ のとき $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を求めよ。

解. f は A 上連続であるから

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1 x^2y\,dy\right)dx=\int_0^1\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{6}.$$

応用上は積分範囲が区間でない場合が多い。「縦線集合（たてせんしゅうごう）」の場合は、次のような簡単な結果がある。

定理 4.4.2 (縦線集合に対する Fubini の定理) D を $\mathbf{R}^m$ の有界な Jordan 可測集合、φ, ψ を $\overline{D}$ 上の連続関数で、$\varphi\le\psi$ を満たすものとする。このとき、

(4.5) $$\Omega=\{x=(x_1,x_2);x_1\in D,\varphi(x_1)\le x_2\le\psi(x_1)\}$$

とおくと、次の (1), (2) がなりたつ。

(1) Ω は $\mathbf{R}^{m+1}$ の Jordan 可測集合

(2) $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を有界連続関数とするとき、

$$\int_\Omega f(x)\,dx=\int_D\left(\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1.$$

注意 4.4.4 上の定理の Ω のように、適当な集合 D, 関数 φ, ψ によって、(4.5) の形に表される集合を**縦線集合**と呼ぶ。

例 4.4.2 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;x^2+y^2+z^2\le x\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$ を求めよ。

Ω は中心 $(1/2,0,0)$, 半径 $1/2$ の閉球であるから、以下のように縦線集合とみなせる。

$$\begin{aligned}D&=\left\{(x,y);(x-1/2)^2+y^2\le 1\right\},\\ \Omega&=\left\{(x,y,z);(x,y)\in D,-\sqrt{x-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{x-x^2-y^2}\right\}.\end{aligned}$$

実は D 自身も縦線集合とみなせる。

$$\begin{aligned} D' &= \{x; 0 \le x \le 1\}, \\ D &= \left\{(x,y); x \in D', -\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{x-x^2}\right\}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega x\,dxdydz &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{x-x^2-y^2}}^{\sqrt{x-x^2-y^2}} x\,dz\right) dxdy \\ &= \iint_D 2x\sqrt{x-x^2-y^2}\,dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} 2x\sqrt{x-x^2-y^2}\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 4x\left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{(x-x^2)-y^2}\,dy\right) dx. \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \text{原点中心半径 } a \text{ の円板の第一象限に属する部分の面積} = \frac{\pi a^2}{4}$$

であることを用いると、

$$\iiint_\Omega x\,dxdydz = \int_0^1 4x \cdot \frac{\pi(x-x^2)}{4} dx = \pi \int_0^1 (x^2-x^3)dx = \frac{\pi}{12}. \blacksquare$$

記号　少し変わった記号であるが、

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right) dx_1$$

を

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\,dx_2$$

のように書くことがよくある。また、括弧を略して

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

のように書くことも多い。

積分の順序交換　Fubini の定理の効用として「重積分を累次積分に直す」ことをあげたが、**積分順序の交換**

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2\right) dx_1 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)dx_1\right) dx_2$$

も役に立つことが多い。つまり、もともと累次積分の形になっている式で、そのまま計算しようとすると面倒だが、積分の順序を交換すると簡単になることがある。

練習問題 4.4.1 次の各積分の順序を交換しなさい。
(1) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right) dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^{2a} \left(\int_0^{2ax-x^2} f(x,y)\,dy\right) dx.$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-x}^x f(x,y)\,dy\right) dx.$
(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^x f(x,y)\,dy\right) dx.$

解答 4.4.1 (1) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_y^a f(x,y)dx\right) dy.$ (2) $\displaystyle\int_0^{a^2} \left(\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\right) dy.$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{-y}^1 f(x,y)\,dy\right) dx + \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx\right) dy.$
(4) $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right) dy + \int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right) dy + \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\,dx\right) dy.$

4.4.5 定理の証明

Fubini の定理 4.4.1 をもう一度提示しよう。

定理 4.4.1 (Fubini の定理) $A=[a,b]\times[c,d]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ 有界、さらに二条件

(1) f は A で可積分。

(2) $\forall x\in[a,b]$ を固定したとき、 $y\longmapsto f(x,y)$ が $[c,d]$ で可積分。

が満たされるならば、関数
$$F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$
は $[a,b]$ 上可積分で
$$\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

この定理の証明は割と素直である (特にこれと言う山場はない)。

定理 4.4.1 の証明 $A'=[a,b]$, $A''=[c,d]$ の小閉方体への分割
$$\Delta' : a=x_0<x_1<\cdots<x_\ell=b,$$
$$\Delta'' : c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$$
をとり、$A'_i\overset{\text{def.}}{=}[x_{i-1},x_i]$ とおく。

この Δ',Δ'' を組にしてできる A の小閉方体への分割を Δ とすると、それに属する小閉方体は
$$A_{ij}\overset{\text{def.}}{=}A'_i\times[y_{j-1},y_j]\quad(1\le i\le\ell;\ 1\le j\le m)$$
となる。また
$$|\Delta|\downarrow 0\iff|\Delta'|\downarrow 0\text{ かつ }|\Delta''|\downarrow 0$$

である。
　さて、

$$M_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \inf_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y)$$

とおくと、$\forall \xi_i \in A'_i$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

　この両辺に $\mu(A'_i)$ をかけて和を取ると

$$\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1})\mu(A'_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \int_c^d f(\xi_i, y)dy \cdot \mu(A'_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})\mu(A'_i),$$

すなわち

$$L(f, A, \Delta) \leq \sum_{i=1}^{\ell} F(\xi_i)\mu(A'_i) \leq U(f, A, \Delta).$$

　f が A で可積分であるという仮定から、 $|\Delta| \downarrow 0$ のとき、左辺も右辺も $\displaystyle\iint_A f(x,y)\ dxdy$ に収束する。従って、F の Riemann 和も同じ値に収束する。
　ゆえに

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\ dy$$

は可積分で

$$\int_a^b F(x)\ dx = \iint_A f(x,y)\ dxdy$$

が成り立つ。すなわち

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \iint_A f(x,y)\ dxdy. \quad \blacksquare$$

　今度は縦線集合上の Fubini の定理である。

定理 4.8 (縦線集合に対する Fubini の定理) D を $\mathbf{R}^m$ の有界な Jordan 可測集合、φ, ψ を $\overline{D}$ 上の連続関数で、$\varphi \le \psi$ を満たすものとする。このとき、

$$\Omega = \{(x,y); x \in D, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} \tag{4.6}$$

とおくと、次の (1), (2) がなりたつ。

(1) Ω は $\mathbf{R}^{m+1}$ の Jordan 可測集合。

(2) $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界連続関数とするとき、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

定理 4.8 の証明

(1) まず

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; x \in D^\circ,\ y = \varphi(x)\}, \\ K_2 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; x \in D^\circ,\ y = \psi(x)\}, \\ K_3 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; x \in \partial D,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} \end{aligned}$$

とおくと

$$\partial\Omega = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

が成り立つのを確かめるのはやさしい。定理を証明するには、各 K_i が零集合であることを示せば良い。

(a) (K_3 が零集合であること) D が Jordan 可測であるという仮定から、∂D は零集合である。よって、$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\exists\{A_i\}_{i=1}^\infty \text{ s.t. } \partial D \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i, \quad \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) < \varepsilon$$

が成り立つ。ここで

$$\tilde{A}_i \overset{\text{def.}}{=} A_i \times [m, M], \quad m = \min_{x\in\overline{D}} \varphi(x), \quad M = \max_{x\in\overline{D}} \psi(x)$$

とおくと、

$$K_3 \subset \bigcup_{i=1}^\infty \tilde{A}_i, \quad \sum_{i=1}^\infty \mu(\tilde{A}_i) < (M-m)\varepsilon.$$

これは K_3 が零集合であることを示している。

(b) (K_1, K_2 が零集合であること) どちらでも同じことだから K_1 について示す。φ は $\overline{D}$ (これは有界閉集合であるからコンパクトであることに注意) で連続であるから、一様連続である。つまり $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ s.t.

$$x, y \in \overline{D}, \quad \|x-y\| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

$\overline{D} \subset A^\circ$ となる閉方体 A を取り、A の分割 Δ で $|\Delta| < \dfrac{1}{\sqrt{m}}\delta$ となるものを取る。

Δ の小閉方体のうち $\overline{D}$ と共通部分を持つものを A_1, A_2, $\cdots$, A_ℓ とする。各 A_i に対しては、$\xi_i \in A_i \cap \overline{D}$ を任意に取って固定すると

$$\forall x \in A_i \cap \overline{D} \qquad |\varphi(x) - \varphi(\xi_i)| < \varepsilon$$

が成り立つ。そこで

$$\tilde{A}_i \overset{\text{def.}}{=} A_i \times [\varphi(\xi_i) - \varepsilon, \varphi(\xi_i) + \varepsilon]$$

とおく。すると $K_1 \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{A}_i$, さらに

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu(\tilde{A}_i) = 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\ell} \mu(A_i) \le 2\varepsilon\mu(A)$$

が導かれる。よって、K_1 は零集合である。

(2) $m = 1$ の場合のみ証明する ($m \ge 2$ の場合もまったく同様である)。$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ なる区間 $A = [a,b] \times [c,d]$ を取り、 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in \Omega) \\ 0 & ((x,y) \in A \setminus \Omega) \end{cases}$$

とおく。

$\forall x \in D$ に対して、関数

$$f(x,\cdot)\colon y \longmapsto \tilde{f}(x,y)$$

は高々 2 点 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を除き連続であるから、これは $[c,d]$ で可積分である。それゆえ、定理 4.4.1 から

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy &= \iint_{A} \tilde{f}(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{[a,b]} \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_{D} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx
\end{aligned}$$

が導かれる。 ■

4.5 変数変換の公式

ここでは重積分の変数変換の公式 (いわゆる置換積分) を学ぶ。

4.5.1 イントロダクション

まず 1 変数の場合の復習をしよう。積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(u)\, du$$

において被積分関数 F が、適当な C^1-級の全単射 $\varphi\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$, 連続関数 f を用いて

$$F(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$$

と表される場合は、

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\, du = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \tag{4.7}$$

となる。

覚え方 多分、高等学校で勉強した場合は、次のように覚えているであろう。$x = \varphi(u)$ とおくと

$$dx = \varphi'(u)du$$

であるから

$$F(u)du = f(\varphi(u))\varphi'(u)du = f(x)dx.$$

変数の範囲については自然に

u	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

ほとんど暗記の苦労のない公式である (記号を作った人が賢いせいである)。

4.5.2 定理の紹介

定理 4.5.1 (重積分の変数変換) 次の (i) – (iv) を仮定する。

(i) D は $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合。

(ii) U は $\overline{D} \subset U$ となる $\mathbf{R}^n$ の開集合。

(iii) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ は C^1-級の単射。

(iv) $\forall u \in U$ に対して $\det \varphi'(u) \neq 0$.

このとき次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\Omega = \varphi(D)$ は Jordan 可測集合。

(2) 連続関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_D f(\varphi(u))|\det \varphi'(u)|du. \tag{4.8}$$

注意 4.5.1 公式 (4.8) で φ のヤコビアン (ヤコビ行列の行列式) $\det \varphi'(u)$ の絶対値が現れるが、(4.7) では、絶対値のついていない $\varphi'(u)$ が現れる。これは一見食い違っているように思えるかもしれないが、1 次元の積分では、積分区間の端点に大小関係がなくても構わないためで、実は (4.7) でも、

$$a' = \min\{a,b\}, \quad b' = \max\{a,b\}, \quad \alpha' = \min\{\alpha,\beta\}, \quad \beta' = \max\{\alpha,\beta\}$$

とおいて書き直すと、

$$\int_{[\alpha',\beta']} f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\ du = \int_{[a',b']} f(x)\ dx$$

と絶対値が現れる。

上の定理は重要で、使い方を十二分に練習してもらいたいが、この講義で証明をする時間的余裕があるかどうか、怪しい。とりあえず定理の証明の鍵となる補助定理を紹介しておく。この意味を理解すると、定理も直観的に分かりやすくなる。

補題 4.5.1 $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は $\det T \neq 0$ なる線形写像とするとき、n 次元平行体 D に対して

$$\mu(T(D)) = |\det T|\mu(D).$$

すなわち、線形写像により、平行体の Jordan 測度は線形写像の行列式の絶対値倍になる。

例えば $n=2,\ D=[0,1]\times[0,1],\ T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の場合、$T(D)$ は $O=(0,0),\ (a,c),\ (a+b,c+d),\ (b,d)$ を頂点とする平行四辺形であるが、この面積が $|\det T|=|ad-bc|$ になる、ということを主張している (この事実は、高校の数学にもときどき現れる)。

4.5.3 例

変数変換の公式を用いる計算例をいくつか紹介しよう。その中でも、極座標変換はよく使うので、最初に調べておこう。

平面極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

によって $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を定めると、

$$\varphi' = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから $\det\varphi' = \cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r$. よって平面極座標については、$dxdy = r\,drd\theta$ となる。これはしっかり覚えておこう。

これから例えば $\Omega = B(0;a)$ に対して、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\right)d\theta$$

となることが分かる。

例 4.5.1 (円板領域での積分)

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\,dxdy$$

については

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r\cos\theta)^2\,dr\right)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

「扇形の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\theta$」 という公式があるが、次はその一般化である。

例 4.5.2 $r=r(\theta)$ が $[\alpha,\beta]$ $(\beta-\alpha\le 2\pi)$ で連続、ならば、極座標について

$$0\le r\le r(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta$$

で表される xy 平面上の図形 Ω の面積は

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2 d\theta$$

で与えられる。■

例 4.5.3

$$I = \iint_\Omega (1 - x^2 - y^2)dxdy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \le x,\ y \ge 0\}$$

を求めよ。この問題は前節の Fubini の定理を用いても解けるが、ここでは極座標変換を用いてみる。

$$x^2 + y^2 \le x \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$$

であるから、Ω は $(1/2, 0)$ を中心とする半径 $1/2$ の円盤の上半分である。極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r \ge 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$$

によって、これに対応するのは

$$D = \left\{(r,\theta); 0 \le r \le \cos\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

である (図を描いて見ること。円周 $\partial\Omega$ は極座標で $r = \cos\theta$ と表されることを理解しよう。これは、原点を通り、x 軸から測って角度 θ をなす直線 $y = x\tan\theta$ と円の交点を考えることによって分かる。)。すなわち $\varphi(r,\theta) = (x,y)$ とすると、$\varphi(D) = \Omega$ となる。ゆえに

$$I = \iint_\Omega (1 - x^2 - y^2)dxdy = \iint_D (1 - r^2)r\ drd\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} (r - r^3)dr = \frac{5\pi}{64}. \blacksquare$$

この例については

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

という変数変換も有効である。こうしても $dxdy = r\ drd\theta$ で、Ω に対応するのは

$$D = \{(r,\theta); 0 \le r \le 1/2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(1 - \left(\frac{1}{2} + r\cos\theta\right)^2 - (r\sin\theta)^2\right) r\ drd\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1/2} \left(\frac{3}{4}r - r^2\cos\theta - r^3\right) dr = \cdots = \frac{5\pi}{64}. \end{aligned}$$

例 4.5.4 (立体図形の体積の計算例) $\mathbf{R}^3$ において、曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = x$ とで囲まれる部分 Ω の体積を求めよ。まず簡単な図を描くことで、$z = x^2 + y^2$ で下から、$z = x$ で上から囲まれているということが分かる。すなわち

$$\Omega = \{(x,y,z); x^2 + y^2 \le z \le x\}.$$

これは縦線集合である。実際

$$D = \{(x,y); x^2 + y^2 \le x\},$$

さらに

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2, \quad \psi(x,y) = x$$

として

$$\Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

と表される[1]。ゆえに

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\, dxdydz = \iint_D (\psi(x,y) - \varphi(x,y))dxdy = \iint_D (x - x^2 - y^2)dxdy \\ &= \cdots = \frac{\pi}{32}. \blacksquare\end{aligned}$$

空間極座標変換

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi < 2\pi) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

によって $\varphi\colon [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbf{R}^3$ を定めると、

$$\varphi' = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\det\varphi' &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + (-1)(-r\sin\theta) \begin{vmatrix} r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta \cdot r\cos\theta \cdot r\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} + (-1)(-r\sin\theta)\cdot\sin\theta\cdot r\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta\end{aligned}$$

となるので、$r^2\sin\theta \ge 0$ に注意して[2]

$$dxdydz = r^2\sin\theta\ drd\theta d\phi.$$

例 4.5.5 (球の体積) $\Omega = \{(x,y,x); x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ は $D = \{(r,\theta,\phi); 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi\}$ によって $\Omega = \varphi(D)$ と書ける。ゆえに

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\ dxdydz \\ &= \iiint_D |\det\varphi'|\ drd\theta d\phi \\ &= \iiint_D r^2\sin\theta\ drd\theta d\phi\end{aligned}$$

[1] ここで大事なのは、D の決め方である。よく考えて納得すること。

[2] $\theta \in [0,\pi]$ であるから。

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} r^2\sin\theta\,d\theta\right)d\phi\right)\\
&= \left(\int_0^R r^2 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\\
&= \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.\blacksquare
\end{aligned}
$$

注意 4.5.2 極座標変換は変数変換 (置換積分) の公式の利用のうちで、最も重要なものであるが、実は極座標変換は (2 次元の場合も、3 次元の場合も) 定理 4.5.1 の仮定を厳密には満たさない。φ は全単射ではないし、$\det\varphi'$ は 0 になることもある ($r=0$ や $\theta=0,\pi$ に注意)。この講義の演習や試験のレベルでは、このあたりを「ずぼら」に考えることにするが、厳密に扱うには、定理を少し拡張しなければならない。例えば

1. スピヴァック: 多変数解析学、東京図書 (1972) の定理 3-13. (これと、零集合上の積分は 0 という事実を用いる。)

2. 杉浦光夫: 解析入門 II、東京大学出版会 (1985) の第 VII 章の定理 4.5.

のいずれかを参照せよ。この 二冊の本は本格的で、一人で通読するのは大変なので教科書には指定出来ないが、(特に後者は、ほとんど何でも書いてあるという意味で) いざという時は頼りになる本である。

4.6 広義積分

これまで、この解析概論 II では

有界 Jordan 可測集合上の**有界**な関数の積分

を扱って来た。この節では「有界」という条件を落した場合を考える。これは応用範囲が案外と広い。

実は、この種の積分は、 Lebesgue 積分で取り扱うのがふさわしく、Riemann 積分の範囲では、あまりシャープな結果が出ない。そこで、ここでは欲張らず、実用上問題ない程度の結果で満足することにする。キーワードは「絶対収束」である。

4.6.1 1 次元の場合の復習

1 次元の広義積分については 1 年生で学んでいる。いくつか例をあげて、思い出してもらおう。

例 4.6.1 $\alpha > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

は? 積分範囲 $[1,\infty)$ は有界ではない。これを有界な区間 $[1,R]$ の $R \to \infty$ の極限と考えて、

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

と定義する。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty}\begin{cases}\left[\dfrac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\right]_1^R & (\alpha \neq 1)\\ [\log x]_1^R & (\alpha = 1)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1)\\ \infty & (0 < \alpha \leq 1).\blacksquare\end{cases}$$

例 4.6.2 $\beta > 0$ とするとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

は? $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta}$ とおくと、

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$$

であるから、f は $(0,1]$ で有界ではない。しかし、$\forall\varepsilon > 0$ に対して、f は $[\varepsilon, 1]$ において有界で可積分。そこで

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

と定義する。結果は

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx = \begin{cases}+\infty & (\beta \geq 1)\\ \dfrac{1}{1-\beta} & (0 < \beta < 1).\blacksquare\end{cases}$$

例 4.6.3

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

積分範囲 $[0,\infty)$ は有界ではない。これを有界な区間 $[0,R]$ の極限と考えて、

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

と定義する。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^R = \frac{\pi}{2}.\blacksquare$$

例 4.6.4 (確率積分)

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

これは積分範囲が有界でないから

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

と定義するわけだが、$f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{-x^2}$ の原始関数の具体形が得られないので、この後の計算が難しい。しかし

$$g(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (x\in[0,1]) \\ \dfrac{1}{x^2} & (x\in[1,\infty)) \end{cases}$$

とおくと

$$|f(x)| \le g(x) \quad (x\in[0,\infty))$$

であること[3]、さらに

$$\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$$

であることが分かる。ゆえに I は存在する。 $\blacksquare$

4.6.2 広義積分のための共通の仮定

この小節では、$\mathbf{R}^n$ における広義積分を定義するために 3 つの仮定 (A1), (A2), (A3) を導入する。

Ω における関数 f の広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ というものを定義するのが目標である。例えば

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x|}\,dx$$

[3]微分法で $x^2e^{-x^2}$ の増減を調べると、最大値 $1/e$ を持つことが分かるので、$e^{-x^2} \le \dfrac{1}{ex^2} \le \dfrac{1}{x^2}$.

のような式に意味をつけよう、ということである。この例では $\Omega = \mathbf{R}^n$, $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ であるが、f は Ω 全体で定義されているわけではないことに注意しよう (原点では分母が 0 になってナンセンス)。そこで、f は Ω から、ある零集合 N をのぞいた $\Omega \setminus N$ の上で定義されていると考えることにする。上の例では $N = \{0\}$ とするわけである。

これまでは、有界な集合に対してのみ、Jordan 可測性を定義したが、非有界な Ω に対しては、次の条件が成り立つとき、Jordan 可測であると定義する。

$$\forall R > 0 \text{ に対して } \Omega \bigcap B(0;R) \text{ は (有界な) Jordan 可測集合である}. \tag{4.9}$$

さて、多次元の広義積分の定義を難しくしているのは、積分範囲 Ω の形状にバラエティーがあり、近似の仕方が無数にあるからである[4]。そこで、 $\Omega' = \Omega \setminus N$ をいかに近似するかという問題を考える必要がある。

定義 4.6.1 (近似列) $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $K_m \subset \mathbf{R}^n$ $(m = 1, 2, \cdots, \infty)$ とするとき、 $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ が Ω の**近似列**であるとは、以下の 3 条件が成り立つことである。

(1) 各 K_m はコンパクトな Jordan 可測集合で、Ω に含まれる。

(2) $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \cdots$.

(3) Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ s.t. $K \subset K_{m_0}$.

注意 4.6.1 (Ω の近似列は Ω を覆う) $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ が Ω の**近似列**であるとき

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^\infty K_m$$

となる。実際、$\forall x \in \Omega$ について、$\{x\}$ は Ω に含まれるコンパクト集合であるから、近似列の定義によって、

$$\exists m_0 \in \mathbf{N} \text{ s.t. } \{x\} \subset K_{m_0} \qquad \therefore x \in \bigcup_{m=1}^\infty K_m.$$

ゆえに $\Omega \subset \displaystyle\bigcup_{m=1}^\infty K_m$. 一方 $\Omega \supset \displaystyle\bigcup_{m=1}^\infty K_m$ は明らかだから、$\Omega = \displaystyle\bigcup_{m=1}^\infty K_m$.

例 4.6.5 $\Omega = (0,1)$, $K_m = \left[\dfrac{1}{m}, 1 - \dfrac{1}{m}\right]$ とすると、$\{K_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ は Ω の近似列になる。実際、定義の条件 (1), (2) は明らかである。条件 (3) については、K と $\partial\Omega = \{0,1\}$ との距離を d とおくと、$d > 0$ であるので[5]、$m_0 > 1/d$ となるような $m_0 \in \mathbf{N}$ を取れば $K \subset \left[\dfrac{1}{m_0}, 1 - \dfrac{1}{m_0}\right] = K_{m_0}$.

[4] 1 次元の場合は、積分範囲とする領域が実質的に区間しかないため、近似の仕方が本質的に一通りしかなかった。

[5] $0 \notin K$, $1 \notin K$ であり、K はコンパクト集合なので、$d \overset{\text{def.}}{=} \inf_{x \in K} \min\{x, 1-x\} = \min_{x \in K} \min\{x, 1-x\} > 0$ である。

例 4.6.6 $\Omega=\mathbf{R}^m$, $K_m=\overline{B}(0;m)=\{x\in\mathbf{R}^n;|x|\le m\}$ とすると、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は Ω の近似列になる。■

例 4.6.7 $\Omega=\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, $K_m=\{x;1/m\le|x|\le|m|\}$ とすると、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は Ω の近似列になる。

普通に考えられる大抵の「素直な」集合は近似列を持ち、それを見つけるのは難しくないことが分かる。

それでは、いよいよ 3 つの仮定を導入しよう。

- **(A1)** Ω は Jordan 可測集合である。すなわち Ω は有界な Jordan 可測集合であるか、条件 (4.9) を満たす。
- **(A2)** $\Omega\setminus N$ は少なくとも一つの近似列を持つ。
- **(A3)** f は $\Omega\setminus N$ で定義され、$\Omega\setminus N$ 内の任意のコンパクト Jordan 可測集合 K 上で、有界かつ可積分である (つまり通常の積分 $\displaystyle\int_K f(x)\,dx$ が存在する)。

4.6.3 広義積分の定義

ここで紹介する $\mathbf{R}^n$ における広義積分の定義は、前小節で紹介 (復習) した 1 次元の広義積分とは若干異なる (これについては後で説明する) ことを最初に注意しておこう。

定義 4.6.2 ($\mathbf{R}^n$ の広義積分) Ω, N, f は前小節の仮定 (A1), (A2), (A3) を満たすとするとき、f が Ω で**広義積分可能**であるとは、$\Omega\setminus N$ の任意の近似列 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ に対して、$\displaystyle\int_{K_m} f(x)\,dx$ は $m\to\infty$ とするとき共通の極限 I を持つことであると定義し、この極限 I を $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ で表し、 f の Ω 上の**広義積分**と呼ぶ。

注意 4.6.2 (広義積分に関する言葉使い) f が Ω で広義積分可能であることを、「広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が**存在する**」と言ったり、「広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が**収束する**」と言ったりする。広義積分可能でないことを「広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が**発散する**」とも言う。だから「次の広義積分の収束・発散を調べよ」は「広義積分可能であるか、そうでないか、調べよ」という意味である。

注意 4.6.3 上の定義の中の「共通」という言葉は実は不要である。二つの近似列 $\{K_m\}$, $\{K'_m\}$ があったとき、 $K''_m=K_m\bigcup K'_m$ とおいて、$\{K''_m\}$ を考えればよい。

注意 4.6.4 (普通の積分を広義積分と考えても矛盾しない) Ω が有界 Jordan 可測集合、f が Ω 上の有界関数とするとき、f の Ω 上の普通の積分と f の Ω 上の広義積分の両方が考えられるが、両者は一致する。

注意 4.6.5 1 年生で学んだ 1 次元の広義積分と、ここで定義した $\mathbf{R}^n$ 上の広義積分の $n=1$ の場合は、実は一致しない。例えば

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

は前者の定義では広義積分可能であるが、後者の定義では広義積分可能ではない。

4.6.4 広義積分の収束・発散の判定法

前小節で広義積分を定義したが、この定義に直接従って広義積分可能であることを示すのは、簡単な場合にしか出来ない (任意の近似列に対して、積分の極限が存在することを示すのは大変である)。

このあたりの事情は、無限級数の収束・発散の議論に似ている。無限級数の場合に、正項級数については議論が簡単になり、これを基礎とした議論を展開するが、広義積分についても、非積分関数 f が非負関数である場合は簡単である。

補題 4.6.1 (正の関数については、ただ一つの近似列でチェックすればよい) Ω, N, f は (A1), (A2), (A3) を満たし、さらに

(1) $\Omega \setminus N$ 上で $f \geq 0$.

(2) $\exists \{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ s.t. $\Omega \setminus N$ の近似列で、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_{K_m} f(x)\, dx$ が存在する。

が成り立つならば、 f は Ω 上で広義積分可能である。

補題 4.6.2 (絶対値が広義積分可能な関数で押えられれば広義積分可能) Ω, N は (A1), (A2) を満たし、$\Omega \setminus N$ 上定義された二つの関数 f, φ は (A3) を満たす。さらに二条件

(1) φ は $\Omega \setminus N$ 上で $\varphi \geq 0$ を満たし、Ω で広義積分可能である。

(2) $\Omega \setminus N$ 上で $|f| \leq \varphi$.

が成り立つならば、 f は Ω で広義積分可能である。

この Lemma は Lemma 4.6.1 と組み合わせることで、威力を発揮する (φ についてはただ一つの近似列でチェックすればよいから)。このことを背景として、次の定義をする。

定義 4.6.3 (絶対収束) Ω, N, f は (A1), (A2), (A3) を満たすとき、広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx$ が**絶対収束**するとは、 $|f|$ が Ω で広義積分可能であることと定義する。

上の Lemma 4.6.2 で $\varphi = |f|$ とすることで、次の定理は明らかである。

定理 4.6.1 (広義積分は絶対収束するならば収束する) Ω, N, f は (A1), (A2), (A3) を満たし、広義積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が絶対収束すると仮定すると、f は Ω で広義積分可能である。

注意 4.6.6 この定理は、無限級数についての「絶対収束 $\Longrightarrow$ 収束」という定理に非常によく似ている。この後の議論や計算のテクニックなどもそっくりである。無限級数の理論について復習して、広義積分の理論と比較することはいい勉強である。

注意 4.6.7 (何度も繰り返してしつこく思われるかもしれないが) この定理のありがたいところは、ただ一つの近似列についてのみチェックすれば良い、というところにある。(広義積分可能性の定義においては、「任意の」近似列に対しての条件を要請していて、チェックするのがとても難しい。)

注意 4.6.8 f が非負であるとき、すなわち Ω 上で $f \geq 0$ であるとき、明らかに「絶対収束 $\equiv$ 普通の収束 (広義積分可能)」である。実は (証明はしないが)、広義積分の定義として、この節で展開した流儀を採用すると、一般に「絶対収束 $\equiv$ 普通の収束 (広義積分可能)」が成り立つ。(任意の近似列に対して、極限値が存在することを仮定するのは、非常に強い要請で、結局は絶対収束を課するのと同等になってしまう、ということである。)

注意 4.6.9 数列 $\displaystyle\int_{K_m} |f(x)|\,dx$ $(m=1,2,3,\cdots)$ は単調増加だから、絶対収束というのは、これが上に有界である、すなわち

$$\exists M \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \int_{K_m} |f(x)|\,dx < M \ (m \in \mathbf{N})$$

ということを意味する[6]。

4.6.5 広義積分の計算手順

前小節まで、結構長い議論となってしまったが、ここでは

「次の広義積分の収束・発散を調べよ」

あるいは

「次の広義積分を求めよ」

という問題に対して、どうすればよいだろうか、まとめてみよう。

1. まず Ω, N, f が何であるか、はっきりと認識しよう。
   (Ω と f の「式の形」は明らかだが、f が定義できていない点があるかどうかチェックして、それらの点全体を N とおき、零集合であることを確認する。)

[6] 「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理がある。

2. f の符号が一定 (つまり常に 0 以上か、あるいは常に 0 以下) でなければ、絶対収束であるかどうかチェックする。例えば次のいずれかを行なう。

   (a) $\Omega \setminus N$ の近似列 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ を (後の計算がなるべく楽になりそうに) 一つ選んで、$\displaystyle\int_{K_m} |f(x)|dx$ が極限を持つかどうか調べる?

   (b) 具体的な極限値が計算できなくても、無限大に発散するかどうかだけチェックすれば十分である。そこで $|f| \le \varphi$ なる関数 φ で、$\displaystyle\int_{K_m} \varphi(x)\,dx$ が収束するものがないかどうか、調べる。

3. (広義積分可能であるかどうかは、前項までで分かっているはず。) $\Omega \setminus N$ の近似列 $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ を一つ選んで、$\displaystyle\int_{K_m} f(x)\,dx$ を計算する。

例 4.6.8 (被積分関数が非有界) 広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を求めてみよう。$\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $N = \{(0,0)\}$ である。 $f \ge 0$ であるから、近似列を一つ取って計算すればよい。

$$K_m = \{(x,y); 1/m^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$$

とおくと、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は $\Omega \setminus N$ の近似列で、極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \ge 0,\, \theta \in [0, 2\pi))$$

によって K_m に対応するのは

$$D_m = \{(r,\theta); 1/m \le r \le 1,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$$

である。よって、

$$\iint_{K_m} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_m} \frac{1}{r}\cdot r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/m}^1 dr = 2\pi\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 2\pi \quad (m \to \infty).$$

ゆえに $I = 2\pi$. ■

例 4.6.9 (被積分関数が正負両方の値を取る) 広義積分

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{y}{x^2+y^2} dxdy$$

については、被積分関数が正にも負にもなるので、厳密には、まず

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{|y|}{x^2+y^2} dxdy$$

を調べることになる (つまり、絶対収束かどうか)。これが存在することは $K_m = \{1/m^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ として、

$$\iint_{K_m} \frac{|y|}{x^2+y^2} dxdy = \iint_{1/m \leq r \leq 1, \theta \in [0,2\pi)} \frac{|r\sin\theta|}{r^2} \cdot r\, drd\theta = 4(1-1/m) < 4$$

から簡単に分かる。それから、後は上の例と同じである。答は 0. これは対称性に気づけば明らか。 ■

例 4.6.10 (積分範囲が非有界) α を正の定数とするとき、広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

については、$\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \geq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $N = \emptyset$ (空集合) である。 $f \geq 0$ であるから、一つ近似列を取って計算すればよい。

$$K_m = \{(x,y); 1 \leq x^2+y^2 \leq m^2\}$$

とおくと、$\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ は Ω の近似列で、極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \geq 0,\, \theta \in [0,2\pi))$$

によって K_m に対応するのは

$$D_m = \{(r,\theta); 1 \leq r \leq m,\ \theta \in [0,2\pi)\}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\iint_{K_m} f(x,y)\, dxdy &= \iint_{D_m} \frac{1}{r^{2\alpha}} \cdot r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^m r^{1-2\alpha} dr \\
&= 2\pi \times \begin{cases} \left[\dfrac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\right]_1^m = \dfrac{m^{2(1-\alpha)}-1}{2(1-\alpha)} & (1-2\alpha \neq -1) \\ [\log r]_1^m = \log m & (1-2\alpha = -1) \end{cases} \\
&\to \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \leq 1) \end{cases} \quad (m \to \infty).
\end{aligned}$$

ゆえに $\alpha > 1$ のとき広義積分は収束して値は $\pi/(\alpha-1)$, $0 < \alpha \leq 1$ のとき広義積分は発散する。 ■

例 4.6.11 (収束を示すだけなら、上から収束する関数で押えるだけで OK) 広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{x^4+x^2+y^2+1} dxdy$$

の収束・発散を調べてみよう。$\{K_m\}$ を一つ選んで、K_m 上の積分を計算しようと考えても出来るかも知れないが、少し計算が面倒である。

$$\frac{1}{x^4+x^2+y^2+1} \leq \frac{1}{x^2+y^2}$$

に気がつくと、

$$\iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

が収束するのを示すのは簡単なので (すぐ上の例でやった)、 I が収束することが分かる。 ■

例 4.6.12 (確率積分) 確率論の正規分布の話などに現れる

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

について考える。まず

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x\ge 0, y\ge 0\},\quad f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$$

として、

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

を考えよう。次式で Ω の近似列 $\{K_n\}$, $\{C_n\}$ を定義する:

$$K_n=[0,n]\times[0,n],\quad C_n=\{(x,y); x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le n^2\}.$$

まず f は C_n で可積分で、

$$\iint_{C_n} f(x,y)\,dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})\to\frac{\pi}{4}.$$

$f\ge 0$ に注意すると、これから f は Ω で絶対収束していることが分かる。従って

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. ■$$

4.6.6 ガンマ関数とベータ関数

広義積分は応用上実に様々なものが現れるが、かなり多くのものが以下に導入する二つの関数「ガンマ関数 Γ」、「ベータ関数 B」(それ自身広義積分で定義される) を用いて表現可能である。そこで、この二つの関数の性質を詳しく調べておくと、便利である。

補題 4.6.3 (ガンマ関数の定義のための準備)

$$I = \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx\quad (s\in\mathbf{R}), \tag{4.10}$$

$$J = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx\quad (s>0) \tag{4.11}$$

はともに絶対収束する広義積分である。

証明　まず I から考える。

$$e^{-x}x^{s-1} \leq \frac{M}{x^2} \quad (x \in [1,\infty))$$

となる $M \in \mathbf{R}$ が存在することを示せばよいが、これは

$$[1,\infty) \ni x \longmapsto e^{-x}x^{s+1}$$

が上に有界であることと同値で、これを確かめるのは簡単である。次に J について考えると、まず、

$$e^{-x}x^{s-1} \leq x^{s-1} \quad (x \in (0,1])$$

である。$s-1>-1$ に注意すると、 x^{s-1} は $(0,1]$ で広義積分可能であるから、 J は絶対収束である。 ■

補題 4.6.4 (ベータ関数の定義のための準備) $p>0$, $q>0$ に対して次式で定義される広義積分は絶対収束する。

$$I = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{4.12}$$

$$J = \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{4.13}$$

証明　まず

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1} \quad (x \in (0,1/2]),$$

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx < \infty \quad (\because p-1>-1)$$

であるから I は絶対収束する。次に

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq (1-x)^{q-1} \quad (x \in [1/2,1))$$

であり、$t=1-x$ と変数変換することにより

$$\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{1/2} t^{q-1}\,dx < \infty \quad (\because q-1>-1)$$

であるから J も絶対収束する。 ■

定義 4.6.4 (ガンマ関数, ベータ関数) (1) $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

(4.14) $$\Gamma(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

により定義し、ガンマ関数と呼ぶ。

(2) $B\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

(4.15) $$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

により定義し、ベータ関数と呼ぶ。

命題 4.6.1 (1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s>0)$.

(2) $\Gamma(1) = 1$.

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(4) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\, \cos^{2q-1}\theta\, d\theta$.

(5) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

証明 ほとんどは簡単である。(5) については、 $E = \{(x,y); x\geq 0, y\geq 0\}$ とおくと、

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\, dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}\, dy = \int_E e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\, dxdy.$$

ここで

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

と変数変換する。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = -u$$

であり、 E に対応するのは

$$D = \{(u,v); u\geq 0, 0\leq v\leq 1\}$$

である。それゆえ

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \iint_D e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dudv \\ &= \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}\, du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q). \blacksquare \end{aligned}$$

注意 4.6.10 (1) これから例えば

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N})$$

である。すなわちガンマ関数は階乗を一般化したものである。同様に $\Gamma(n+1/2)$ の値も簡単に計算できることが分かる。

(2) 一方、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

である。

(3) ガンマ関数は、複素変数まで拡張して考えるのが普通である。

4.7 項別積分

4.7.1 極限の順序交換

最初に問いかけから始める。次の 3 つの極限ははたして同じものであるだろうか? (第 2 番目と第 3 番目は極限を取る順番を交換したもので、両者が等しいと主張することを「極限の順序交換が可能である」という。)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y), \quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y), \quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

答は「ケース・バイ・ケース」である。

4.7.2 項別積分、項別微分とは

上のような形で問題を書くと、それほど出番がないようにも見えるが、例えば

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \quad (\text{項別積分}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \quad (\text{項別微分})$$

のような等式が成り立つかどうかは、気になるところであろう。ところが、微分も積分もある種の極限演算であるから、これはまさに極限の順序交換の問題に他ならない。

注意 4.7.1 (項別積分、項別微分の名の由来) 上の等式が項別積分、項別微分と言われるのは、それらの特別な (応用上は頻出する重要な) 場合として、

$$\sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right)$$

があるからである。

例 4.7.1 ($\lim$ と $\displaystyle\int$ の順序交換が出来ない例)

$$f(x,t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{1+(x-t)^2},$$

とおくと、

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \lim_{t\to\infty}\pi = \pi,$$

しかし

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t\to\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0. \blacksquare$$

つまり、二つの lim の順序が交換できるためには、何か条件が必要である。最も有名な十分条件は、「一様収束すること」である。

4.7.3 関数族の一様収束と基本的性質

定義 4.7.1 (関数族の各点収束、一様収束) $\Omega\subset\mathbf{R}^m$, $f\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$, $T\subset\mathbf{R}^\ell$ で、$\{f_t\}_{t\in T}$ は各 $t\in T$ につき $f_t\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ であるような関数族[a]であるとする。

(1) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t\to t_0$ のとき f に Ω 上 **各点収束**するとは、

$$\forall x\in\Omega\quad \lim_{t\to t_0} f_t(x) = f(x)$$

が成り立つことであると定義する。

(2) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t\to t_0$ のとき f に Ω 上**一様に収束**するとは、

$$\lim_{t\to t_0}\sup_{x\in\Omega}|f_t(x)-f(x)| = 0$$

が成り立つことであると定義する。

[a]関数族とは関数の集合のことである。

次の命題は明らかである。

命題 4.7.1 一様収束するならば各点収束する。

次の定理は、(少なくとも関数列の場合には) 複素関数論等で学んだはずである。

定理 4.7.1 (連続関数族の一様収束極限は連続関数) $\Omega\subset\mathbf{R}^m$, $f\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$, $T\subset\mathbf{R}^\ell$ で、$\{f_t\}_{t\in T}$ は各 $t\in T$ につき $f_t\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ であるような関数族であるとする。各 f_t が Ω 上連続で、$\{f_t\}_{t\in T}$ が Ω 上一様に f に収束するならば、f は Ω 上連続である。

次の定理も、複素関数論等で学んだはずである。

定理 4.7.2 (Weierstrass の M テスト) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上の関数列で、

$$\exists\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ s.t. } \sup_{x\in\Omega}|f_n(x)|\le M_n \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty.$$

を満たすものとすると、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ は Ω 上一様に収束する。

4.7.4 項別積分定理と項別微分定理

次の定理が本題である (証明はやさしい)。

定理 4.7.3 (項別積分定理) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$\{f_t\}_{t\in T}$ は Ω 上の可積分関数の族で、 $t\to t_0$ のとき Ω 上の可積分関数 f に一様収束するならば、

$$\lim_{t\to t_0}\int_\Omega f_t(x)\,dx=\int_\Omega f(x)\,dx$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x)\,dx-\int_\Omega f_t(x)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega (f(x)-f_t(x))\,dx\right| \\ &\le \int_\Omega |f(x)-f_t(x)|\,dx \\ &\le \sup_{x\in\Omega}|f(x)-f_t(x)|\int_\Omega dx \\ &= \mu(\Omega)\sup_{x\in\Omega}|f(x)-f_t(x)|\to 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

この定理の系として、次の命題が得られる (証明は省略する)。

定理 4.7.4 (項別微分定理) $\mathbf{R}$ の区間 $I=[a,b]$ を上の C^1-級の関数の族 $\{f_t\}_{t\in T}$ が

(1) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t\to t_0$ のとき、ある関数 f に I 上各点収束する。

(2) 導関数の族 $\{f_t'\}_{t\in T}$ は $t\to t_0$ のとき、ある関数 g に I 上一様に収束する。

を満たすとすると、 f は I 上 C^1-級で、 $f'=g$ を満たす。

4.7.5 積分記号下の微分

最も微積分らしいのは、積分と微分が同時に現れる次の定理であろう。

定理 4.7.5 (積分記号下の微分, 微分と積分の順序交換) A を $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな Jordan 可測集合、I を $\mathbf{R}$ の区間、$K = A \times I$, $f\colon A \times I \ni (x,t) \longmapsto f(x,t) \in \mathbf{R}$ を連続関数とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $F(t) = \displaystyle\int_A f(x,t)\,dx$ は I 上で連続。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が K 上連続ならば (とくに f が C^1-級ならば) $F \in C^1(I)$ かつ

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t)\,dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

証明 連続性も微分可能性も局所的な概念だから、I がコンパクトな区間 $[a,b]$ であるとして証明すれば十分である。

(1) K はコンパクトだから、連続関数 f は K 上で一様連続である。すなわち $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ $\forall(x,s) \in K\ \forall(y,t) \in K$

$$|(x,t) - (y,s)| < \delta \Longrightarrow |f(x,t) - f(y,s)| < \varepsilon.$$

とくに

$$|t - s| < \delta \Longrightarrow |f(x,t) - f(x,s)| < \varepsilon \quad (x \in A).$$

ゆえに

$$|F(t) - F(s)| \leq \int_A |f(x,t) - f(x,s)| dx \leq \int_A dx \leq \varepsilon\mu(A).$$

ゆえに F は I で一様連続である。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が K 上一様連続ならば (1) により

$$G(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

は I で一様連続である。そして積分の順序交換をして

$$\begin{aligned}
\int_a^s G(t)\,dt &= \int_a^s \left(\int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\right) dt = \int_A \left(\int_a^s \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\right) dx \\
&= \int_A (f(x,t) - f(x,s))\,dx \\
&= F(s) - F(a).
\end{aligned}$$

ゆえに $F'(s) = G(s)$. したがって $F \in C^1([a,b])$. ■

ところが、この定理は広義積分には、そのまま拡張することはできない。「広義積分が一様収束する」という条件 (まだ定義していない) を付加すれば大丈夫であるが、それは話が細かくなるので省略する[7]。

[7] このあたりの話は杉浦「解析入門 I」に詳しい。

第5章　面積分と発散定理

曲面上で定義された関数の積分である**面積分**と、それに関わる **Gauss の発散定理** (積分定理の一種) を簡単に紹介する。簡単のため、主に $\mathbf{R}^3$ 内の曲面について述べるが、何次元でもほぼ同様の話ができる。

5.1　曲面をどう定義するか

主に $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を考える。曲面とは何か？直観的には明らかであるが、定義は意外と難しい。

すでに知っている曲面の表現法　これまで $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の表し方として、次の二つの方法を学んでいる。

(1) 2 変数関数のグラフとしての定義法。例えば $f\colon \mathbf{R}^2 \supset U \to \mathbf{R}$ のグラフ (高校流に書けば $z = f(x,y)$) のグラフ)

$$\operatorname{graph} f = \{(x, y, f(x,y)); (x,y) \in U\}$$

として表す。同様に $x = g(y,z)$ や $y = h(x,z)$ なども考えられる。
(例: 半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.)

(2) 3 変数関数の零点集合 (0-等高面) としての表現法。例えば $F\colon \mathbf{R}^3 \supset \Omega \to \mathbf{R}$ の零点集合

$$N_F = \{(x,y,z); (x,y,z) \in \Omega,\ F(x,y,z) = 0\}.$$

として表す。
(例: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.)

しかし、ここでは、もう一つの方法を紹介する。それは曲線の定義を拡張したようなもので、パラメーター曲面と呼ばれる。

曲線の定義について反省　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線とは、ある閉区間 $I = [a,b]$ 上の連続写像 $\varphi\colon I \to \mathbf{R}^n$ であると定義した。(φ の像 $\varphi(I)$ が図形としての曲線である。) 微積分においては、至るところ接線が引けるように、φ が C^1-級で、I 上至るところ $\varphi' \neq 0$ を満たす (つまり連続的に変化する接ベクトルが定義されて、それは $\vec{0}$ にならない) ものを扱うことが多い。こうすると、閉区間を正方形に写像する Peano 曲線のような、おかしな曲線[1]を排除出来る。

[1]とはいえ、微積分で素朴に扱えない奇妙な曲線の存在は、病的な現象ではなく、今後はこれらの図形の上での解析の重要性が増す、と指摘する人が最近は多くなって来た。

曲線の定義の真似から始めては見るものの...　上の曲線の定義を真似して、曲面の定義も $\mathbf{R}^2$ のある閉区間から $\mathbf{R}^n$ への写像であると定義するのが良さそうに思える。このアイディアはイイ線を行っているのだが、少々問題があって、修正が必要である。まず、閉区間というのは、数直線 $\mathbf{R}$ においては十分一般的なものであったが[2]、平面 $\mathbf{R}^2$ においては一般性が低く[3]、その結果、定義できる曲面の種類が限られてしまうことである (例えば後に述べるように、球面ですら曲面の範疇から外れてしまうことになる)。現代の数学では、この問題を解決するために、このように定義した「小さな曲面」を貼り合わせて出来る「もの」を曲面として定義する。こうすることで、穴が開いたりしている曲面を、数学的に取扱うことが可能になる。これらのことはいわゆる多様体論 (これは普通は幾何学として講義される) で学ぶことになる。

それで微積分としては曲面をどう扱うか　中途半端を止めたければ、微積分でも多様体として曲面を定義すればよいのだが、それは (とても大変なので) あまり現実的でないと考えている教師 (あるいはテキストの著者) が多いのが現状である。そこで、この解析概論では、上で述べた、閉区間上定義された写像による像という表現法をほんの少し修正した「パラメーター曲面」というもので我慢することにする。

三つの表現法のまとめ　多様体としての曲面の定義は別にして、三つの表現法、すなわち、関数のグラフとしての表現法、関数の零点集合としての表現法、パラメーター曲面としての表現法の関係はどうなっているか、一言しておく。実は<u>局所的に考えると</u>三つとも同等である。詳しく言うと、

(1) グラフは、ある関数の零点集合としても表され、またパラメーター曲面でもある。

(2) 関数 F の零点集合としての曲面は、$\nabla F \neq 0$ となる点の近傍では、グラフとしても表され、またパラメーター曲面でもある。

(3) パラメーター曲面は、正則点 (後で定義する) の近傍で、グラフとしても表され、またある関数の零点集合としても表される。

(1) は明らかであるが、 (2), (3) を証明するには陰関数定理を用いることになる。

まとめ

- 曲面の定義は結構難しい。厳密には多様体論で学ぶ。
- 3 つの表現法
    1. グラフとしての表現法: $z = f(x, y)$
    2. 零点集合としての表現法: $F(x, y, z) = 0$
    3. パラメーター曲面としての表現法: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(u, v)$

[2]数直線 $\mathbf{R}$ においては、領域 (連結開集合) とは開区間のことで、閉領域 (領域にその境界を合併したもの) は閉区間のことである。

[3]平面 $\mathbf{R}^2$ においては、領域は区間でないものがほとんどで、区間は非常に特殊な領域であると言える。

は、局所的には同等である。

- この講義では、パラメーター曲面として、曲面を定義して我慢する。
- 多様体論では、パラメーター曲面を貼り合わせたものとして曲面 (2 次元多様体) を定義する。

5.2　2 次元パラメーター曲面

定義 5.2.1 (2 次元パラメーター曲面、正則曲面) U, D を $\mathbf{R}^2$ の開集合で $\overline{D} \subset U$ を満たすものとする。 $\varphi: U \to \mathbf{R}^n$ を C^r-級の関数とするとき (ただし $r \geq 1$)、

$$S \stackrel{\text{def.}}{=} \varphi(D) = \{\varphi(u,v); (u,v) \in D\}$$

を 2 次元 C^r-級**パラメーター曲面**という。また、このとき

$$\partial S \stackrel{\text{def.}}{=} \{\varphi(u,v); (u,v) \in \partial D\}$$

を S の**境界**という。S が**正則曲面**であるとは、

$$\varphi \text{ が単射で、} \operatorname{rank} \varphi' = 2$$

が成り立つことである[a]と定義する。

[a] このように、微分がフル・ランクである C^r-級の単射を C^r-級の**埋め込み**と呼ぶ。

注意 5.2.1 (「境界」という言葉について) 曲面の境界 ∂S は、$\mathbf{R}^n$ の部分集合としての S の境界とは、必ずしも一致しない。境界を表す記号 ∂ は二つの意味で混用されることが多いので、注意が必要である。 ■

以下では、S は C^r-級正則パラメーター曲面であるとする。

注意 5.2.2 (正則性の条件を眺める)

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix}$$

のランクが 2 であるとは、二つの列ベクトルが 1 次独立であること、言い換えると、2 次小行列式の中に少なくとも一つ 0 でないものがある:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial (x_i, x_j)}{\partial (u,v)} \right)^2 > 0$$

ということである (こう定義してある本も多い)。ただし $\varphi(u,v)=\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と書いた。
$\mathbf{R}^3$ 内の曲面の場合には、もっと分かりやすい条件で言い換えることが出来る (以下で示す)。
■

u 曲線、 v 曲線、法線ベクトル　$(u_0,v_0)\in D$ とするとき、

$$\{\varphi(u,v_0);(u,v_0)\in D\}$$

を $\varphi(u_0,v_0)$ を通る u 曲線、

$$\{\varphi(u_0,v);(u_0,v)\in D\}$$

を $\varphi(u_0,v_0)$ を通る v 曲線と呼ぶ。$\varphi(u_0,v_0)$ において、u 曲線の接ベクトルは

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u} \end{pmatrix},$$

v 曲線の接ベクトルは

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix}$$

である。

以下 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面のみ考察することにする ($n=3$ とするということ)。すると、u 曲線の接ベクトルと、v 曲線の接ベクトルの双方に垂直なベクトルとして

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)} \\[2mm] \dfrac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)} \\[2mm] \dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix}$$

が得られる。S が正則と仮定したので、このベクトルは $\vec{0}$ にならない。実際、

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2=\sum_{1\le i<j\le 3}\left(\frac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u,v)}\right)^2>0.$$

つまり

正則曲面においては、各点で 0 でない法線ベクトルが定まる

ことが分かった。

以上、正則パラメーター曲面を定義して、基本的な性質を調べて来たが、どの程度の一般性をもっているのか、吟味してみよう。

例 5.2.1 (2 変数関数のグラフは正則パラメーター曲面である) U, D を $\overline{D} \subset U$ を満たす $\mathbf{R}^2$ の領域で、$f\colon U \to \mathbf{R}$ を C^r-級の関数とする。このとき、

$$\operatorname{grad} f|_D = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\}$$

は C^r-級の正則曲面になる。実際、$\varphi(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ とおくと、これは明らかに単射で[4]、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成り立つ。ゆえに $\operatorname{graph} f|_D$ は正則パラメーター曲面である。■

例 5.2.2 (球面のパラメーターづけ — 極座標は北極、南極で条件が破綻している) ところが、球面は正則パラメーター曲面ではない。このことの証明はしないが、$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ の有名なパラメーターづけである極座標

$$\varphi\colon [0, \pi] \times [0, 2\pi) \ni \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\phi \\ R \sin\theta \sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$$

について、これが埋め込みの条件を満たさないことを見てみよう。まず φ は単射ではない。実際 $\theta = 0, \pi$ とすると、ϕ によらず $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ になる。さらには、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

[4] $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ ならば、$(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$.

ゆえに

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right\| = R^2 \sin\theta$$

であり、これは $\theta = 0, \pi$ のとき 0 になる。つまり、一意性にしても、微分のランクの条件にしても、北極、南極が条件を破る点である。そのため、厳密には、この二点の近傍を除いた範囲で考えてから極限を取るという手順を踏む必要がある。しかし積分に関係する議論 (例えば面積や面積分) は、二点からなる集合が零集合であることもあって、北極、南極で条件が破れることに目をつむって計算してしまって正しい答が得られることが多い。 ■

5.3 曲面積と面積分

$|t|, |s|$ が小さいとき、

$$\varphi(u+t, v+t) = \varphi(u,v) + t\frac{\partial \varphi}{\partial u} + s\frac{\partial \varphi}{\partial v} + O(t^2+s^2)$$

であるから、D 内の長方形 (縦 Δt, 横 Δs)

$$A = \{(u+t, v+s); (t,s) \in [0,\Delta t] \times [0, \Delta s]\}$$

が十分小さいとき、その像

$$\varphi(A) = \{\varphi(u+t, v+t); (t,s) \in [0,\Delta t] \times [0, \Delta s]\}$$

は平行四辺形

$$\left\{ x = \varphi(u,v) + t\frac{\partial \varphi}{\partial u} + s\frac{\partial \varphi}{\partial v}; (t,s) \in [0,\Delta t] \times [0, \Delta s] \right\}$$

で良く近似される。この平行四辺形の面積は

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \Delta t \Delta s$$

であるから、直観的には

$$\varphi(A) \text{ の面積} \fallingdotseq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \Delta t \Delta s.$$

そこで正則パラメータ曲面上の面積分、曲面積を次のように定義する。

定義 5.3.1 (正則パラメーター曲面上の面素に関する面積分, 曲面積) U, D, φ, S を上の通りとする。C^r-級正則パラメーター曲面 S 上定義された関数 $f\colon S \to \mathbf{R}$ の S 上の**面積分**を

$$\int_S f\ dS \overset{\text{def.}}{=} \iint_D f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$$

で定義する。また S の**曲面積** $\mu(S)$ を

$$\mu(S) \overset{\text{def.}}{=} \int_S 1\ dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$$

で定義する。また

$$dS \overset{\text{def.}}{=} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$$

とおき、これを**面積要素**と呼ぶ。

注意 5.3.1 (曲面が平らなときは、普通の面積に一致する) φ の像が xy 平面に含まれているとき、曲面積は 2 次元 Jordan 測度 (面積) に等しい。

証明　仮定より $\varphi_3 = 0$, すなわち $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ となっているので、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} \end{pmatrix}$$

となる。ゆえに $\mathbf{R}^3$ 内の曲面として S の曲面積は

$$\mu(S) = \iint_D \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right| dudv.$$

一方、$\mathbf{R}^2$ 内の図形としての S の面積は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(u,v) \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$ という変数変換によって、

$$\iint_S dx\,dy = \iint_D |\det \Phi'(u,v)| du\,dv = \iint_D \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right| du\,dv.$$

ゆえに、両者は一致することが分かる。 ■

注意 5.3.2 (面積要素の表し方の流儀) dS のかわりに $d\Gamma$ や $d\sigma$ などの記号を使うこともある。面積要素を使う場合は、どの記号を使うか、一言断っておくのがエチケットであろう。

例 5.3.1 (グラフの面積) すでに見たように関数 $f\colon U \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\varphi(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これから graph $f|_D$ は正則パラメーター曲面であることが分かり、その曲面積が以下のように計算できる。

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

であるから

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

が graph $f|_D$ の曲面積となる。 ■

例 5.3.2 (回転体の面積) xy 平面における $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ のグラフを x 軸の回りに回転して出来る曲面について考えよう。ただし、$f(x) \neq 0$ を仮定する。

$$\varphi\colon [a,b] \times [0, 2\pi] \ni \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

で定義される φ について、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x)\cos\theta \\ f'(x)\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x)\sin\theta \\ f(x)\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} f(x)f'(x) \\ -f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

$$\mu(S) = \iint_{x\in[a,b],\theta\in[0,2\pi]} |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\, dxd\theta = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx. \blacksquare$$

例 5.3.3 (球面の面積) 既に述べたように、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ は厳密には正則パラメーター曲面ではないが、細かいことには目をつむって機械的に曲面積を計算して見よう。前小節の例 5.2.2 の計算から

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi$$

であることが分かるから、

$$\mu(S) = \iint_{\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi]} R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi = R^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2. \blacksquare$$

5.4 ベクトル場の法線面積分

前小節で述べたことから、正則パラメーター曲面 $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^3$ の単位法線ベクトルは

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

で得られる。これから

$$\vec{n}\, dS = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, du\, dv$$

となるが、これを $d\vec{S}$ と書くことがある。

$$d\vec{S} \overset{\text{def.}}{=} \vec{n}\, dS = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dudv. \tag{5.1}$$

そして、S の開近傍において定義された連続なベクトル場 $\vec{f}$ に対して、$\vec{f}$ の S 上の**法線面積分**を

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS \overset{\text{def.}}{=} \iint_D \vec{f}(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dudv \quad (\cdot \text{ は内積を表わす})$$

で定める。

注意 5.4.1 (法線面積分の物理的な解釈) $\vec{f} \cdot \vec{n}$ は $\vec{f}$ の法線方向の成分である[5]。$\vec{f}$ が流速を表している場合、$\vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$ は、面積が dS である微小部分を単位時間によぎって流れる流体の体積 (流量)、したがって $\displaystyle\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$ は S 全体を単位時間に通過する体積である ($\vec{n}$ 方向を正として出入りの差し引きを求めている) [6]。法線面積分は、S が閉曲面である場合が特に重要である。物理的には、S が囲む領域から、ものがどれだけ出入りするかを意味することになる。これについては、次節の Gauss の発散定理が成り立つ。

ベクトル場 $\vec{f}$ の法線成分の S 上の曲面積分とも言う。

注意 5.4.2 (法線面積分の普通の重積分による表現) $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ と書くと、

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(f_1(\varphi(u,v)) \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u,v)} + f_2(\varphi(u,v)) \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u,v)} + f_3(\varphi(u,v)) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u,v)} \right) dudv.$$

---

[5] $\vec{n}$ は単位ベクトルであることに注意する。単位ベクトル $\vec{e}$ とベクトル $\vec{a}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{e}$ は、$\vec{a}$ の $\vec{e}$ への射影 (成分) を表している。例えば、 $\mathbf{R}^3$ で $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、$\vec{a} \cdot \vec{i} = \vec{a}$ の第 1 成分, $\vec{a} \cdot \vec{j} = \vec{a}$ の第 2 成分, $\vec{a} \cdot \vec{k} = \vec{a}$ の第 3 成分 となる。

[6] ここの説明は、藤田宏、今野礼二「基礎解析 II」、岩波講座 応用数学、から引用した。

注意 5.4.3 (計算するときに便利な形式的公式)

$$\vec{n}\,dS = d\vec{S} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,du\,dv = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix} du\,dv = \begin{pmatrix} dx_2\wedge dx_3 \\ dx_3\wedge dx_1 \\ dx_1\wedge dx_2 \end{pmatrix}.$$

(一番右の式は 2 次の微分形式と呼ばれるものを用いて表現してある。)

例 5.4.1 (球面 S 上の面積分) S を球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ として、次の各ベクトル場 $\vec{f}$ の、法線成分の S 上の面積分を求めよ。

(1) $\vec{f}(x,y,z)\equiv\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ (定数ベクトル場).

(2) $\vec{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}y\\ z\\ x\end{pmatrix}$.

(3) $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

解答 まず、球面 S を普通の極座標によってパラメーターづけしたときの面積要素は

(5.2) $$dS = R^2\sin\theta\; d\theta d\phi.$$

ここで欲しいのは $d\vec{S}=\vec{n}dS$ を表す公式であるが、それは

(5.3) $$d\vec{S}=\vec{n}\,dS=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}R^2\sin\theta\; d\theta d\phi$$

で与えられる。実際、S 上の点 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ における外向き単位法線ベクトルは

$$\vec{n}=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}=\frac{1}{R}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

であるから、これに (5.2) をかければ (5.3) が得られる。あるいは、最初に球面に対して dS を求めたところで (注意 5.2.2)、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}=R^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

という計算をしたので、その直接の結果と考えても良い (向きが外向きであることはちゃんと確かめておく必要がある)。

(1) $\vec{f} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (定数ベクトル場) であれば、

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi]} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi = \cdots = 0.$$

$\left(\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = \int_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\theta = 0\right.$ などを使った。)

(2) $\vec{f} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ であれば、

$$\begin{aligned} \int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS &= \iint_{\theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi]} \begin{pmatrix} R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \\ R\sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi \\ &= \iint_{\theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi]} R^3 (\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\cos\phi) \sin\theta\, d\theta d\phi \\ &= \cdots = 0. \end{aligned}$$

(3) $\vec{f} = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ のとき、S 上 $\vec{f} = \dfrac{1}{R^2}\vec{n}$ であるから、

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{R^2} \int_S dS = 4\pi.$$

これらの例を見て、面積分の計算は結構面倒なものだと感じる人もいるだろうが、実はこれらの問題は次小節で紹介する Gauss の定理を用いると簡単に計算できる (いわば、Gauss の定理の威力を示すための、サクラの問題としての性格が強い)。 ■

5.5 Gauss の発散定理

応用上重要な、閉曲面上の面積分に関しては、次の定理が成り立つ。

定理 5.5.1 (Gauss の発散定理) Ω を $\mathbf{R}^3$ の有界領域、 $S = \partial\Omega$ は有限個の C^1-級正則曲面からなるとするとき、$\overline{\Omega}$ の近傍で定義された C^1- 級のベクトル場 $\vec{f}$ に対して

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S}.$$

この定理は、Gauss の積分定理、Gauss-Green の積分公式とも呼ばれる。

3 次元の場合の定理を書いたが、何次元でも成立する。1 次元の場合は、$\vec{f} = F$, $\Omega = (a,b)$ として、

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

となるが、右辺が 1 次元の場合の $\displaystyle\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$ に相当する。$\partial\Omega = \{a, b\}$ であり、

$$\vec{n} = \begin{cases} 1 & (x = b) \\ -1 & (x = a) \end{cases}$$

となることを注意しよう。このことから分かるように、Gauss の発散定理は、微分積分学の基本定理の一般化である。

注意 5.5.1 (Gauss-Green の公式の別の表現) 上の定理のように「ベクトル場の発散の積分」に関する定理として書いてある本が多いが、

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_S u n_i\, dS$$

の形の公式で書く流儀もある。

例 5.5.1 (例 5.4.1 の見直し) 例 5.4.1 (1), (2) の計算は、$\Omega = B(0; R)$ に対して Gauss の定理を適用し簡単になる。

(1) $\vec{f}$ が定数ベクトル場であれば、明らかに $\operatorname{div} \vec{f} = 0$. ゆえに

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx = 0.$$

(2) $\vec{f} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ であれば、暗算で $\operatorname{div} \vec{f} = 0$. ゆえに

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx = 0.$$

(3) $\vec{f} = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ のとき、$\operatorname{div} \vec{f} = 0$ となるが、$\vec{f}$ は原点で定義されていないので、Gauss の定理は成り立たない。その代わに原点を包み込む任意の閉曲面 S に対して

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$$

が同じ値を持つことが分かる。■

例 5.5.2 (アルキメデスの浮力の原理) 一様な重力場の下で水中にある物体 Ω は水圧を受ける。$x \in S = \partial\Omega$ における微小面積 dS の受ける力は

$$-p\,\vec{n}\,dS.$$

ここで p は圧力で、

$$p(x) = -\rho g x_3 + C.$$

ただし、

$$\begin{cases} \rho: & \text{水の密度} \\ g: & \text{重力加速度} \\ C: & \text{積分定数} \end{cases}$$

Ω の全表面 S にかかる水圧による力の総和

$$\vec{F} \overset{\text{def.}}{=} \int_S -p\,\vec{n}\,dS$$

がいわゆる浮力となる。実は

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\mu(\Omega)g \end{pmatrix}$$

となる (すぐ後で示す)。つまり、方向は鉛直上向きで、大きさは物体が押しのける水の重さである (**アルキメデスの浮力の法則**)。

$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ とおく。まず、

$$F_3 = -\int_S p\,n_3\,dS$$

であるが、以下これを計算する。$\vec{f} \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$ とおくと

$$F_3 = -\int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx = \int_\Omega \rho g\,dx = \rho g\int_\Omega dx = \rho g\mu(\Omega).$$

同様にして $F_1 = F_2 = 0$ となることが分かる。 ■

例 5.5.3 (静電場の Gauss の法則の微分形と積分形の同値性) 静電場 $\vec{E}$ に関する Gauss の法則には、二通りの表し方がある。

微分形 $\vec{E}$ は次の微分方程式を満たす。ここで ρ は電荷密度である。

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

積分形 任意の閉曲面 S に関し、S を貫く電気力線の本数は Q/ε_0 である。ここで Q は S の内部にある総電荷量である。

Gauss の法則の微分形と積分形は同値な法則である。例えば、微分形から積分形を導くには

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\,dx = \int_\Omega \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{S\ \text{内部の総電荷量}}{\varepsilon_0}$$

とすればよい。 ■

5.6　2 次元の Gauss の定理 — Gauss-Green の定理 —

Green の定理

$$\int_{\partial D} P dx_1 + Q dx_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

において、$f_1 = Q,\ f_2 = -P$ と置くと、

$$\int_{\partial D} -f_2 dx_1 + f_1 dx_2 = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

$$\vec{n}\, ds = \begin{pmatrix} -dx_2 \\ dx_1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$-f_2\, dx_1 + f_1\, dx_2 = \vec{f} \cdot \vec{n}\ ds.$$

また

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \operatorname{div} \vec{f}$$

ゆえ、

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n}\ ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx_1 dx_2.$$

第6章　ベクトル解析

— やっと「微積分」が始まる —

6.1　序

6.1.1　ベクトル解析とは

ベクトル解析は

- 多変数の微積分 (=微分と積分がからまっているところ)
- 自然科学に広い応用を持つ[1]

という二つの意味で重要である。

現代の数学としては、外微分法としての定式化が普通であるが、ここではクラシックなベクトル解析と並行して説明する。

「微積分」とは？　歴史的には、微分積分学が一瞬にして誕生したわけではない。

微分法 関数の極値を調べる

積分法 図形の面積・体積を調べる

それぞれ独立に発展したが、アイザック・ニュートン (Sir Isaac Newton, 1642–1727) が逆の演算であることを発見してから、大発展した。それまでは

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

のような計算をするのも、アルキメデス (Archimedes, 287?–212 B.C.) のような天才を必要とした[2]。

6.1.2　1変数の微積分の復習 (微分積分学の基本定理)

定理 6.1.1 (微分積分学の基本定理 (1)) f が $\mathbf{R}$ の区間 $[a,b]$ で連続ならば、$\forall x \in [a,b]$ に対して

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

[1]大学初年級としては、電磁気学や流体力学、熱力学などで活用される。

[2]アルキメデスは放物線が囲む図形の面積を計算できた。現代では、微積分を知っている高校生なら機械的に計算できてしまうことである。

証明

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

とおく。

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt,\\ f(x) &= f(x)\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right|\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\\ &\le \begin{cases}\displaystyle\max_{t\in[x,x+h]}|f(t)-f(x)|\to 0 & (\text{as } h\downarrow 0)\\ \displaystyle\max_{t\in[x+h,x]}|f(t)-f(x)|\to 0 & (\text{as } h\uparrow 0)\end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに $F'(x)=f(x)$. ■

この定理は

- 積分したものを微分すると元に戻る (微分と積分は逆の演算である)
- 関数を積分すると、原始関数[3]が出来る

のようにヨメル。

定理 6.1.2 (微分積分学の基本定理 (2)) F が $\mathbf{R}$ の区間 $[a,b]$ で C^1-級ならば、

$$\int_a^b F'(x)\,dx=[F(x)]_{x=a}^{x=b}.$$

証明

$$G(x)\overset{\text{def.}}{=}\int_a^x F'(t)\,dt\quad(x\in[a,b])$$

とおくと、$G(a)=0$, さらに前定理より $G'(x)=F'(x)$ であるから

$$\exists C\in\mathbf{R}\quad\text{s.t.}\quad\forall x\in[a,b]\quad G(x)=F(x)+C.$$

これから

$$\int_a^b F'(x)\,dx=G(b)=G(b)-G(a)=F(b)-F(a).\blacksquare$$

この定理は次のようにヨメル:

[3]関数 f に対し、$F'=f$ となる関数 F のことを f の原始関数 (**primitive function**) と呼ぶのであった。

- 微分したものの積分は、元の関数の境界上の値から計算できる。
- 原始関数があれば積分計算は簡単に出来る。つまり $\int_a^b f(x)\,dx$ が計算したいとき、$F' = f$ となる関数 F を見つけることが出来れば $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_a^b$. 高等学校の数学ではこの事実を逆用して、積分を定義している。

また $F(x) = f(x)g(x)$ に適用すると、 (非常に重要な) 次の**部分積分の公式**[4]を得る。

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

6.1.3 多変数の場合の問題点 (1 変数との相違点)

1 変数実数値関数は微分しても 1 変数実数値関数であったが、n 変数実数値関数 $f\colon \mathbf{R}^n \supset \Omega \to \mathbf{R}$ は微分すると

$$\nabla f\colon \Omega \ni x \longmapsto \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

と n 変数 n 次元ベクトル値関数になってしまう。

というわけで、多変数となると、必然的に実数値関数だけを考えているわけにはいかなくなる。n 変数 n 次元ベクトル値関数を n 次元 **ベクトル場** (**vector field**) と呼ぶ。

6.2 ベクトル解析の用語・記号

ここでは伝統的なベクトル解析に現れる用語・記号をまとめて紹介する。

[4]ちなみに部分積分は英語で “**integration by parts**” と呼ばれる。

定義 6.2.1 n を自然数、Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。

(1)

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

のような n 変数実数値関数 f を n 次元**スカラー場** (**scalar field**) と言う。

(2)

$$\vec{v}\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

のような n 変数 n 次元ベクトル値関数 $\vec{v}$ を、n 次元**ベクトル場** (**vector field**) と言う。

(3) 形式的なベクトル

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を**ナブラ** (**nabla**) と呼び、記号 ∇ で表す[a]。

(4) n 次元スカラー場 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して

$$\Omega \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を f の**勾配ベクトル場** (**gradient vector field**) と呼び、記号 $\operatorname{grad} f$ や ∇f で表す。

(5) n 次元ベクトル場 $\vec{v}\colon \Omega \ni x \longmapsto v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

で定義される n 次元スカラー場 $\operatorname{div} \vec{v}\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\vec{v}$ の**発散** (**divergence**) と呼び、$\nabla \cdot \vec{v}$ とも表す:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}.$$

(これはつまり次のような形式的な内積計算を思い浮かべている。)

$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

[a] ∇ のことを Hamilton の微分作用素と呼ぶこともある。何でも、「ナブラ」とはシーア語 (と言われてもどこの言葉かピンと来ないが) で竪琴を意味する言葉だそうである (きっと形が似ているからだね)。

(6) 特に $n=3$ の場合、ベクトル場 $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

で定義される 3 次元ベクトル場 $\operatorname{rot}\vec{v}\colon\Omega\to\mathbf{R}^3$ を $\vec{v}$ の**回転ベクトル場** (**rotation vector field**) と呼び、$\nabla\times\vec{v}$ や $\operatorname{curl}\vec{v}$ とも表す:

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\nabla\times\vec{v}=\operatorname{curl}\vec{v}.$$

(これはつまり

$$\nabla\times\vec{v}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

という形式的なベクトル積計算を思い浮かべている。)

(7) n 次元スカラー場 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ に対して、

$$\triangle f \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

で定義されるスカラー場 $\triangle f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を f の **Laplacian** と呼ぶ。$\triangle$ を **Laplace 演算子** (**Laplace 作用素**, **Laplace operator**, **Laplacian**) と呼ぶ[a]。

(8) n 次元ベクトル場 $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ に対して、

$$\triangle\vec{v}\overset{\text{def.}}{=}\begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \vdots \\ \triangle v_n \end{pmatrix}$$

とおく。

[a]数学以外の分野では、Laplacian を $\nabla\cdot\nabla$ や ∇^2 などの記号で表すことも多い。

例 6.2.1 (自然科学からの例) ある瞬間において

- 気温はスカラー場

- 気圧はスカラー場
- 風速はベクトル場
- 電位はスカラー場
- 電界はベクトル場
- 磁界はベクトル場

例 6.2.2 (電磁気学からの例) 真空中において、電場 $\vec{E}$, 磁場 $\vec{B}$ は次の微分方程式 (**Maxwell の方程式**) を満たす:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0}\right). \end{cases}$$

ここで ρ は電荷密度、 $\vec{j}$ は電流密度、 c は光速度で、ε_0 は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2$$

で定義される定数で誘電率と呼ばれる。(例えば

ファインマン、レイトン、サンズ著「ファインマン物理学 III 電磁気学」、岩波書店

を参照せよ。Maxwell の方程式に現れる係数は、単位系の取り方によって異なるが、ここに紹介したのは MKSA 単位系によるものである。) ■

注意 6.2.1 (2 次元ベクトル場の回転) ベクトル積 $\times$ は $\mathbf{R}^3$ でしか定義されないので、rot は普通 $\mathbf{R}^3$ でのみ考えるが、 $n = 2$ の場合、$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

によってスカラー場 $\operatorname{rot} \vec{v}$ を定義することもある。

grad, div, rot のような微分演算子を二つ続けると何が起こるか？

定理 6.2.1 (微分演算子の合成) (1) $\nabla \cdot \nabla f = \triangle f$. すなわち $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \triangle f$.

(2) $\nabla \times \nabla f = \vec{0}$. すなわち $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$. (任意の f に対して $\vec{0}$ になるとは不思議)

(3) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \vec{0}$ すなわち $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$. (これまた不思議)

(4) $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \triangle \vec{v}$. すなわち $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \triangle \vec{v}$.

(5) $\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \triangle \vec{v}$. すなわち $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) + \triangle \vec{v}$.

(1), (2), (3) については是非とも自分の手で計算して確かめてみること (定義を覚えるためと、(2), (3) の理由を納得するため)。 (4), (5) は同じことを主張しているので ((5) は (4) を移項することにより直ちに得られる)、どちらか一方を示せば十分である[5]。

$\mathrm{grad}\, f$ の幾何学的な意味はすでに微分法のところで学んだ。$\mathrm{div}\, \vec{v}$, $\mathrm{rot}\, \vec{v}$ の意味は、後述する積分定理で明らかになる。

6.3 線積分とポテンシャル

関数を微分するとベクトル場になる。ではベクトル場を積分して原始関数を求めることは出来ないだろうか? この節では、

ベクトル場を接線線積分すると関数が得られ、
ある条件が成立していれば、それは原始関数 (ポテンシャルと呼ばれる) になる

ことを説明する。これは何次元でも同様に成立するが、ここでは簡単のため 2 次元で論じる。

定義 6.3.1 (1 次微分形式, 関数の外微分) Ω を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする。

(1) $f_1, f_2 \in C^\infty(\Omega)$ を用いて

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

の形をした式を Ω 上の **C^∞-級 1 次微分形式** (**C^∞ 1-form**, 略して **1-形式**) と呼び、

$$\wedge^1(\Omega) \stackrel{\text{def.}}{=} \Omega \text{ 上の } C^\infty\text{-級 1 次微分形式の全体}$$

とおく。

(2) Ω 上の 2 つの C^∞-級 1-form

$$\begin{aligned} \omega &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2, \\ \eta &= g_1 dx_1 + g_2 dx_2 \end{aligned}$$

と $\alpha, \beta \in C^\infty(\Omega)$ に対して、C^∞-級 1-form $\alpha\omega + \beta\eta$ を

$$\alpha\omega + \beta\eta = (\alpha f_1 + \beta g_1) dx_1 + (\alpha f_2 + \beta g_2) dx_2$$

で定める。

(3) $F \in C^\infty(\Omega)$ に対して

$$dF \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2$$

で定まる C^∞-級 1-form dF を F の**外微分** (**exterior derivative**) と呼ぶ。

C^∞-級 1-form $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ と C^∞-級 ベクトル場 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ は 1 対 1 に対応する。

[5] (4), (5) は (1), (2), (3) ほどは重要でない。

定義 6.3.2 (ベクトル場のポテンシャル) Ω を $\mathbf{R}^2$ の開集合、$\vec{f}\colon\Omega\to\mathbf{R}^2$ を Ω 上の C^∞-級ベクトル場とする。このとき

$$\operatorname{grad} F = \vec{f} \quad (\text{in } \Omega)$$

となるようなスカラー場 $F\colon\Omega\to\mathbf{R}$ のことを f の**ポテンシャル (potential)** と呼ぶ。

要するにポテンシャルとは多変数の場合の原始関数のことである。

定義 6.3.3 (完全形式) Ω を $\mathbf{R}^2$ の開集合、 $\omega \in \wedge^1(\Omega)$ とする。このとき、ω が**完全 (exact)** であるとは、

$$dF = \omega$$

となるような $F \in C^\infty(\Omega)$ が存在することであると定義する。

注意 6.3.1 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ とすると、$\nabla F = \vec{f}$ も $dF = \omega$ も

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$$

ということであり、「ベクトル場のポテンシャルが存在する」=「微分形式が完全である」。

例 6.3.1 (一様な重力場のポテンシャル)

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (g \text{ は定数})$$

とするとき

$$F(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def.}}{=} -g x_3$$

は $\operatorname{grad} F = \vec{f}$ を満たす。つまり F は $\vec{f}$ のポテンシャルである。$\omega \overset{\text{def.}}{=} -g\, dx_3$ で ω を定めると、$dF = \omega$ であるから、ω は完全である。 ■

例 6.3.2 (一つの恒星の作る重力場のポテンシャル)

$$\vec{f}(\vec{x}) = -\frac{GM}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x} \quad (M, G \text{ は定数})$$

とするとき

$$F(\vec{x}) = \frac{GM}{\|\vec{x}\|}$$

は $\vec{f}$ のポテンシャルである。(これを確かめるのは良い計算練習である。) ■

注意 6.3.2 (物理学の用語法) 物理学では、力の場 $\vec{f}$ に対して

$$-\operatorname{grad} V = \vec{f}$$

となるような関数 V が存在するとき、$\vec{f}$ は**保存力**であるといい、 V を $\vec{f}$ の**ポテンシャル・エネルギー**と呼ぶ。これは数学で言うポテンシャルと符号のみ異なっているわけである。上の二つの例は物理学で良く知られた例である。

注意 6.3.3 (ポテンシャルを持たないベクトル場) ポテンシャルは常に存在するとは限らない。例えばベクトル場

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

はポテンシャルを持たない。実際、もしもポテンシャル F が存在したとすると定義から

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x) = -x_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2(x) = x_1$$

となるが、これから

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$

で、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} \neq \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

となり矛盾する。(微分形式の言葉では: $\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2$ は完全ではない、ということ。)

このあたりの話は、

ベクトル場で表現しても、 1-form で表現しても、内容は全く違わない

ことを強調しておく[6]。

以下の話における問題意識を提示しておこう。

- ポテンシャルが存在するための条件は何か？
- ポテンシャルが存在するとして、どうすればそれは求められるか？
- ポテンシャルがあると、どういうイイことがあるか？

実際にポテンシャルを構成するには、線積分が必要になる。

[6]ならば一つのやり方だけ説明すれば十分のように思う人も多いだろうが、世の中では両方が使われているので、ここでは並行して説明している。最近は数学以外の分野でも微分形式が使われることが多くなってきた。

定義 6.3.4 (1-形式の線積分, ベクトル場の線積分) Ω を $\mathbf{R}^2$ の開集合、

$$C\colon x=\varphi(t)\quad(t\in[a,b])$$

を Ω 内の区分的に滑らかな曲線とする。

(1) Ω 上の C^∞-級 1-form $\omega=f_1dx_1+f_2dx_2$ に対して、ω の C 上の線積分を

$$\int_C\omega=\int_C f_1dx_1+f_2dx_2\overset{\text{def.}}{=}\int_a^b\left(f_1(\varphi(t))\frac{d\varphi_1}{dt}+f_2(\varphi(t))\frac{d\varphi_2}{dt}\right)\,dt$$

で定義する。

(2) Ω 上の C^∞-級ベクトル場 $\vec{f}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$ に対して、$\vec{f}$ の C 上の線積分を

$$\int_C\vec{f}\cdot d\vec{s}\overset{\text{def.}}{=}\int_a^b\left(f_1(\varphi(t))\frac{d\varphi_1}{dt}+f_2(\varphi(t))\frac{d\varphi_2}{dt}\right)\,dt$$

で定義する。

形式的ではあるが

$$\frac{d\vec{s}}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dt}\\\dfrac{dx_2}{dt}\end{pmatrix},\quad d\vec{s}=\frac{d\vec{s}}{dt}\,dt=\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dt}\\\dfrac{dx_2}{dt}\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\end{pmatrix}$$

と考えると覚えやすい。

命題 6.3.1 (線積分と変数変換) Ω を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする。

(i) 線積分の値は曲線のパラメーターの取り方によらない。すなわち Ω 内の区分的 C^1-級の曲線 C: $\vec{x}=\varphi(t)$ $(t\in[a,b])$ と C^1-級の写像 $\eta\colon[\alpha,\beta]\to[a,b]$ で

$$\eta'(s)>0\quad(\forall s\in[\alpha,\beta]),\quad \eta(\alpha)=a,\quad \eta(\beta)=b$$

なるものがあるとき、曲線 C' を

$$\vec{x}\overset{\text{def.}}{=}\varphi\circ\eta(s)=\varphi(\eta(s))\quad(s\in[\alpha,\beta])$$

で定めると、 $\forall\omega\in\wedge^1(\Omega)$ に対して

$$\int_C\omega=\int_{C'}\omega.$$

(ii) 逆向きの曲線に沿った線積分の値は (-1) 倍になる。すなわち Ω 内の曲線 C: $\vec{x}=\varphi(t)$ $(t\in[a,b])$ に対して、曲線 C'' を

$$\vec{x}\overset{\text{def.}}{=}\varphi(-s)\quad(s\in[-b,-a])$$

で定めると、 $\forall\omega\in\wedge^1(\Omega)$ に対して

$$\int_C\omega=-\int_{C''}\omega.$$

証明 証明は積分の変数変換をきちんとするだけである (講義で話す)。■

証明を省略した代わりに、実例で確認してみよう。

例 6.3.3

$$C_1\colon(x,y)=(t,t^2)\quad(0\le t\le 1)$$

$$C_2\colon(x,y)=(\sin t,\sin^2 t)\quad(0\le t\le \pi/2)$$

$$C_3\colon(x,y)=(\cos t,\cos^2 t)\quad(0\le t\le \pi/2)$$

とするとき、

$$\int_{C_1}\omega=\int_{C_2}\omega=-\int_{C_3}\omega.$$

現代の数学において「曲線は図形ではなく、区間を定義域とする連続写像のことである」、つまり「パラメーターづけそのものが曲線である」と定義するのが一応の建前であるが、線積分を考える時などはどういう「道」をどちらの向きにたどるかということだけが大事だ、ということ。(ずっと以前曲線の長さのところでもこういうことがあった。) こう書くと「じゃ、パラメーターづけなんてやめればいい」と考えたくなるが、曲線を微積分で扱うには、何でもいいから微分可能なパラメーターづけをしないことにはそもそも計算ができないので、パラメーターづけそのものを追放することは出来ない。

命題 6.3.2 (曲線をつなぐ) 曲線 C_1:

$$\varphi_1 \colon [a,c] \longrightarrow \Omega$$

と曲線 C_2:

$$\varphi_2 \colon [c,b] \longrightarrow \Omega$$

において、曲線 C_1 の終点と曲線 C_2 の始点が一致している、つまり

$$\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$$

であるとき

$$\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \varphi_1(t) & (t \in [a,c]) \\ \varphi_2(t) & (t \in (c,b]) \end{cases}$$

によって新しい曲線 C を定めると

$$\int_C \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega.$$

定理 6.3.1 (ポテンシャルが存在するための必要十分条件) Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域とする。

(1) $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ を Ω 上の C^∞-級ベクトル場とするとき、 $\vec{f}$ がポテンシャルを持つための必要十分条件は、Ω 内の任意の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

が成り立つことである。

(2) $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ を Ω 上の C^∞-級 1 形式とするとき、ω が完全であるための必要十分条件は、Ω 内の任意の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C \omega = 0$$

が成り立つことである。

証明

どちらでも同じことだから、(1) (ベクトル場の場合) を証明する。

(必要性) F を $\vec{f}$ のポテンシャルとすると、閉曲線 $C \colon \varphi(t)$ $(t \in [a,b])$ に対して

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} \;=\; \int_a^b f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + f_2(\varphi(t))\varphi_2'(t)\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t))\varphi_2'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt \\
&= [F(\varphi(t))]_{t=a}^{t=b} \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = 0.
\end{aligned}
$$

(十分性) 実際にポテンシャルを構成する。$\vec{p} \in \Omega$ を一つ取って固定する。$\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega$ に対して、

$$F(\vec{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\vec{p}}^{\vec{x}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

によって、F を定義する。ここで $\int_{\vec{p}}^{\vec{x}}$ は $\vec{p}$ を始点、 $\vec{x}$ を終点とする Ω 内の区分的に滑らかな曲線に沿って線積分することを表す。仮定から、この線積分が well-defined であること、すわなち、値が曲線の取り方によらずに定まることが分かる。さらに実は $\forall \vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \in \Omega$ に対して、

$$\nabla F(\vec{q}) = \vec{f}(\vec{q}) \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{q}) = f_i(\vec{q}) \quad (i = 1, 2)$$

であることも示すことが出来る。例えば $i = 1$ の場合にこれを (つまり $x_1 = x$ に関する偏導関数についての等式を) 示そう。十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して、$\begin{pmatrix} q_x - \varepsilon \\ q_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_x + \varepsilon \\ q_y \end{pmatrix}$ を端点とする線分 L は Ω に含まれる。$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ q_y \end{pmatrix} \in L$ に対して、

$$F(\vec{x}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{q}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{q}}^{\vec{x}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

と分解し、$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ から $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ q_y \end{pmatrix}$ への曲線として、 $[q_x, x] \ni t \to \begin{pmatrix} t \\ q_y \end{pmatrix}$ を取ることにすると、$\dfrac{d\vec{s}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、$\vec{f} \cdot d\vec{s} = f_1 dt$ となり、

$$\int_{\vec{q}}^{\vec{x}} f \cdot d\vec{s} = \int_{q_x}^{x} f_1(t, q_y)\,dt$$

となる。ゆえに

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{q}) = f_1(q_x, q_y) = f_1(\vec{q}).$$

もちろん $i = 2$ の場合の証明も同様にできる。 ■

この定理の必要性の部分の証明を見ると、次の命題が成り立つことが分かる (これは要するに微分積分学の基本定理の一つの拡張である)。

命題 6.3.3 (ポテンシャルが存在する場合の線積分は、始点と終点での値から計算できる) ベクトル場 $\vec{f}$ がポテンシャル F を持つならば、

$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = F(C\ \text{の終点}) - F(C\ \text{の始点}).$$

上の定理により、ポテンシャル F の求め方は分かったが (要するに線積分を実行する)、領域内の任意の閉曲線にそっての線積分が 0 になるという条件はチェックしづらい。ところが、簡単な判定条件がある (先の注意 6.3.3 がヒント)。

定理 6.3.2 (ポテンシャルが存在するための必要条件) Ω は $\mathbf{R}^2$ 内の領域とする。

(1) $\vec{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ は Ω 上の C^∞-級ベクトル場で、ポテンシャルを持つとすると、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

(2) $\omega = Pdx + Qdy$ は Ω 上の C^∞-級 1 次微分形式で、完全であるとすると、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

証明

これもどちらでも同じことだから、ベクトル場について証明する。$\operatorname{grad} F = \vec{f}$ とすると、

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

であるから、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

である。ここで C^2-級の関数の 2 階偏導関数は、偏微分の順序によらないことを用いた。■

上の定理の条件はチェックが簡単であるが、残念ながら十分条件ではない。

例 6.3.4 (完全でない閉形式の例) $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の関数 P, Q を

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

で定義すると、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

であるが、$\omega \overset{\text{def.}}{=} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ は完全ではない。実際、原点を中心とする単位円のまわりを正の向きに一周する曲線を C とするとき、

$$\int_C \omega = 2\pi \neq 0$$

である (簡単に計算できる)。ゆえに定理 6.3.1 から ω は完全ではない。(なお、この積分は複素関数論で有名な

$$2\pi i = \int_C \frac{dz}{z} = \int_C \frac{dx + idy}{x + iy} = \int_C \frac{(xdx + ydy) + i(-ydx + xdy)}{x^2 + y^2}$$

の虚数部分を取ったものである。)

しかし、領域 Ω が適当な条件を満足する場合は、十分条件になる[7]。

定理 6.3.3 (単連結領域においてポテンシャルが存在するための十分条件) Ω は $\mathbf{R}^2$ の単連結な領域とする。

(1) $\vec{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ が Ω 上の C^∞-級ベクトル場で、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすならば、$\vec{f}$ は Ω においてポテンシャルを持つ。

(2) $\omega = Pdx + Qdy$ が Ω 上の C^∞-級 1 次微分形式で

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすならば、ω は Ω において完全である。

この定理の証明は省略する。(線積分が、始点と終点のみで定まることを示すのが要である。これについては、次節で述べる Green の定理の例 6.4.2 を参照。)

発展: 定理 6.3.2, 6.3.3 の高次元化 (**注:** はじめて勉強するときは、この段落を読む必要はない。)

一般の n 次元では、定理 6.3.2, 6.3.3 はどうなるだろうか。まず

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

とおくとき、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n) \tag{6.1}$$

が必要条件であることはすぐ分かる。この条件が、領域が単連結である場合は、実は十分条件であることも証明できる。

[7] 複素関数論に詳しい人ならば、「単連結領域における正則関数は原始関数を持つ」という定理によく似ていることに気付くであろう。

3 次元のベクトル解析では、次の形で述べてある本が多い。

命題 6.3.4 (3 次元ベクトル場のポテンシャル存在条件) Ω を $\mathbf{R}^3$ の領域、 $\vec{f}$ を Ω 上の C^∞-級ベクトル場とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\vec{f}$ がポテンシャルを持つならば $\operatorname{rot}\vec{f}=\vec{0}$.

(2) Ω が単連結領域で $\operatorname{rot}\vec{f}=\vec{0}$ が成り立つならば、$\vec{f}$ はポテンシャルを持つ。

例 6.3.5 (静電位の方程式 — Poisson 方程式) 電場や磁場が時間によらないとき (変数 t に関する偏微分が 0 になるので)、Maxwell の方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla\times\vec{E}=\vec{0}, \\ \nabla\cdot\vec{B}=0, \\ \nabla\times\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \end{cases}$$

これから、時間に依存しない電磁場においては、$\vec{E}$, $\vec{B}$ は独立であること、言い換えると電場は電場だけ、磁場は磁場だけで独立に考えれば済むことが分かる。ここで $\mathbf{R}^3$ 全体における静電場に注目しよう。二つの方程式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla\times\vec{E}=\vec{0} \end{cases}$$

のうち、後の方は上に述べたポテンシャル存在のための条件 $\operatorname{rot}\vec{E}=\vec{0}$ に他ならないから、電場の $\vec{E}$ には少なくとも一つのポテンシャルが存在する。それを $-\phi$ と書くと[8]、$-\nabla\phi=\vec{E}$ であるから、一つ目の方程式は

$$\nabla\cdot(-\nabla\phi)=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

すなわち

$$\triangle\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

となる。この ϕ のことを**電位** (あるいは **静電ポテンシャル**) と呼ぶ。このように、未知関数のラプラシアンが既知関数 (ここでは $-\rho/\varepsilon_0$) になるという方程式を Poisson(ポアッソン) 方程式と呼ぶ。まとめると

「静電場においては、電場 $\vec{E}$ は電位 ϕ の (物理流儀の) ポテンシャルとして記述され、電位は Poisson 方程式

$$\triangle\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

の解として定まる。」

既に注意したように、rot は 3 次元に特有の微分作要素であるため、この命題の一般の次元への直接の拡張は難しいが、微分形式を用いた場合は、簡単に表現できる。

命題 6.3.5 (1 次微分形式が完全であるための条件) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域、ω を Ω 上の C^∞-級 1-form とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) ω が完全であるならば $d\omega=0$.

(2) Ω が単連結領域で $d\omega=0$ が成り立つならば、ω は完全である。

[8] つまり ϕ は、電場 $\vec{E}$ の、物理学の流儀によるポテンシャルである。既に書いたように、物理と数学ではポテンシャルの定義で符号が異なる。

ただし、1 次微分形式の外微分 $d\omega$ の定義は後にまわす。簡潔な形の命題があることだけ知っていてくれればよい。

この節は長くなったので、まとめておこう。

この節のまとめ

$\mathbf{R}^2$ の領域 Ω 上のベクトル場 $\vec{f}=\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ に対して

$$\operatorname{grad} F=\vec{f} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

を満たす関数 F を $\vec{f}$ のポテンシャルと呼ぶ。ポテンシャルは多変数版の原始関数である。任意のベクトル場はポテンシャルを持つとは限らない。(ポテンシャルを持つ場合は、定数差を除き一つに定まる。)

$\vec{f}=\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ がポテンシャルを持つには、

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad \text{in } \Omega \tag{6.2}$$

が成り立つことが必要である。条件 (6.2) は残念ながら十分条件ではない (つまり (6.2) を満たすベクトル場で、ポテンシャルを持たないものが存在する) が、 $\vec{f}$ の定義域 Ω が単連結である場合には、十分条件になる。つまり

$$\Omega \text{ が単連結、 } \vec{f} \text{ が (6.2) を満たす} \Longrightarrow \vec{f} \text{ はポテンシャルを持つ。}$$

$\vec{f}$ がポテンシャルを持つとき、それは線積分

$$F(\vec{x})=\int_{\vec{p}}^{\vec{x}} \vec{f}\cdot d\vec{s} \qquad \left(F(\vec{x})=\int_{\vec{p}}^{\vec{x}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right)$$

で得られる。ここで $\vec{p}$ は Ω から任意に選んだ点で、$\displaystyle\int_{\vec{p}}^{\vec{x}}$ は、$\vec{p}$ を始点、$\vec{x}$ を終点とする Ω 内の曲線にそって線積分することを表す。ポテンシャルを用いると、微積分学の基本定理の多変数版

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}=F(C \text{ の終点})-F(C \text{ の始点})$$

が成り立つ。

6.4 Green の定理

6.4.1 定理の陳述

この節では、微分積分学の基本定理 (2) の 2 次元版と言える Green の定理を説明する。

定理 6.4.1 (Green の定理) C を $\mathbf{R}^2$ における区分的に C^1-級の Jordan 閉曲線、Ω を C で囲まれる有界領域とする。このとき $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup C$ を含む開集合上で C^1-級の関数 P, Q に対して、

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{6.3}$$

が成り立つ。ただし、C の向きは、Ω を左側に見て進む向きとする。

注意 6.4.1 (Green の定理のベクトル解析の記号による表現) $\vec{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ とすると、(6.3) の左辺は $\displaystyle\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ と書ける。また右辺は、注意 6.2.1 の記法によれば $\mathrm{rot}\, \vec{f}$ と書けるから、(6.3) は

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_\Omega \mathrm{rot}\, \vec{f}\, dxdy$$

と書ける。

注意 6.4.2 (Jordan の曲線定理 (Jordan curve theorem)) Jordan の曲線定理については、おそらく複素関数論で聞いたことがあるであろう。

> 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の任意の Jordan 閉曲線 C は $\mathbf{R}^2$ を内、外二つの領域に分ける。詳しく言えば、$\mathbf{R}^2 \setminus C$ はちょうど二つの領域 Ω_1, Ω_2 の直和:
>
> $$\mathbf{R}^2 \setminus C = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$$
>
> となり、C は Ω_1, Ω_2 の共通の境界、Ω_i の一方は有界、他方は非有界、となる。なおこのとき p を C の任意の一点とすれば、 p を端点とする Jordan 曲線で p 以外の部分は Ω_i に含まれるものが存在する $(i = 1, 2)$。

しかし、この定理は主張していることが極めて明確であるにも関わらず、証明が結構面倒である。そのため証明まで込めて解説した本は案外少ない。

一樂 重雄、「位相幾何学」、朝倉書店 (1993)

は、数少ない例外として勧められる。

Green の定理は、複素関数論の Cauchy の積分公式でよくやるように、複数の閉曲線で囲まれる領域に対しても拡張できる。例えば、

のような形の領域についても Green の定理は成り立つ。しかし、この種の領域をきちんと特徴づけるのは大変なので、ここではシンプルな形の定理で我慢することにしよう。

6.4.2 縦線領域における証明

Green の定理の証明は、Ω が (例えば y 軸方向について) 縦線集合である場合には、次のように Fubini の定理を用いて簡単に証明できる。

閉区間 $[a,b]$ 上の二つの連続関数 φ, ψ が $\varphi \le \psi$ on (a,b) を満たしていて、領域 Ω は

$$\Omega = \{(x,y); a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

と表されるとする。このとき曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 を

$$\begin{aligned}
C_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (a \le t \le b) \\
C_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \quad (\varphi(b) \le t \le \psi(b)) \\
C_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ \psi(t) \end{pmatrix} \quad (a \le t \le b) \\
C_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \quad (\varphi(a) \le t \le \psi(a))
\end{aligned}$$

で定め、

$$C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4$$

とおくと、 C は Ω を囲む閉曲線で、Ω を左側に見て進む。

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx - \int_{C_3} P dx - \int_{C_4} P dx.$$

C_1 上では

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P(t, \varphi(t))\, dt.$$

同様に C_3 上では

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\int_{C_3} P dx = \int_a^b P(t, \psi(t))\, dt.$$

C_2, C_4 上では $\dfrac{dx}{dt} = 0$ であるから、

$$\int_{C_2} P dx = \int_{C_4} P dx = 0.$$

ゆえに

$$\int_C P dx = \int_a^b \left(P(t,\varphi(t)) - P(t,\psi(t))\right) dt.$$

一方、

$$\begin{aligned}\iint_\Omega -\frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy \\ &= \int_a^b \left[-P(x,y)\right]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}\, dx \\ &= \int_a^b \left(P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x))\right)\, dx.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_C P(x,y)\, dx = -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy.$$

同様にして

$$\int_C Q(x,y)\, dx = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\, dxdy$$

が得られるので、

$$\int_C P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\, dxdy$$

が示される。■

縦線領域についてしか証明されない定理は弱いように思うかも知れないが、次のように、**有限個の縦線領域に分割できる領域**に対しては、

Ω_i の境界の閉曲線を C_i と表すと

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (Q_x - P_y) dxdy &= \iint_{\Omega_1} (Q_x - P_y) dxdy + \iint_{\Omega_2} (Q_x - P_y) dxdy + \cdots + \iint_{\Omega_5} (Q_x - P_y) dxdy \\ &= \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy + \cdots + \int_{C_5} Pdx + Qdy \\ &= \int_C Pdx + Qdy\end{aligned}$$

のようにして Green の定理が証明できるので、実用上はかなり役に立つ。

6.4.3 Green の定理の適用例

例 6.4.1 (線積分で領域の面積を計算する) 区分的 C^1-級の閉曲線 C で囲まれる有界領域を Ω とすると、

$$\int_C x\,dy = -\int_C y\,dx = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \mu(\Omega)$$

である ($\mu(\Omega)$ は Ω の面積を表す記号であった) 。実際に

$$P(x,y)=0,\ Q(x,y)=x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

$$P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=0 \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

$$P(x,y)=-\frac{1}{2}y,\ Q(x,y)=\frac{1}{2}x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

であるから、 $\displaystyle\int_C x\,dy,\ -\int_C y\,dx,\ \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$ のいずれも

$$\iint_\Omega 1\,dxdy = \mu(\Omega)$$

に等しい。 ■

例 6.4.2 C_1, C_2 を始点 $\vec{p}$, 終点 $\vec{q}$ の滑らかな曲線とする。このとき $C=C_1-C_2$ は閉曲線になるが、これが Jordan 閉曲線で、内部 Ω の閉包を含む開集合で P, Q が C^1-級であれば

$$\int_{C_1} Pdx+Qdy-\int_{C_2} Pdx+Qdy=\int_C Pdx+Qdy=\int_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_\Omega 0dxdy=0.$$

ゆえに

$$\int_{C_1} Pdx+Qdy=\int_{C_2} Pdx+Qdy.$$

この事実を見ると、単連結領域では $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$ からポテンシャルの存在が導かれることが (線積分が曲線の取り方に依らないことを示すのが大事である)、納得しやすい。

6.4.4 Green の定理の証明

(はじめて学習するときは、ここは読まなくてもよい。) ここで紹介する証明は、

保野 博、微分と積分 3、岩波講座 現代数学への入門、岩波書店 (1996)

によるもので、要領がいいが、あまり分かりやすくない。(そもそも、この本には、一般性はないかわりに分かりやすい証明などを含めて、Green の定理の証明が全部で三通り載っている。このことは、 Green の定理の性格[9]を如実に物語っていると言えよう。)

[9]非常に重要であること。一般性を欲張らなければ簡単で分かりやすい証明があること。可能な限り一般的な定理を得ようとすると、記述も証明も難しくなること。

まず次の補題から始める。

補題 6.4.1 区分的 C^1-級の Jordan 閉曲線 $\mathbf{C}$ で囲まれた有界領域 Ω に対して

$$\mu(\Omega) = -\int_C y\,dx = \int_C x\,dy.$$

ここで積分路 C の向きは、領域 Ω を左手に見ながら進む向きとする。

補題の証明 xy 平面を間隔 δ の格子によって、1 辺 δ の正方形に分割する (正方形は境界を含めるものとする)。 曲線 C 上に点 $P_k = (x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ を、以下の三条件を満たすように取る。

(i) 点 P_1, P_2, $\cdots$, P_N は C の正の向きに並んでいる。

(ii) P_k, P_{k+1} を端点とする弧の長さは δ 以下である $(k = 1, 2, \cdots, N)$ (ただし $P_{N+1} = P_1$ とする)。

(iii) 各 k に対して、 P_k と P_{k+1} は同一の正方形に属するか、また辺を接して隣り合う正方形に属する。

さて $Q_k \overset{\text{def.}}{=} (x_k, y_{k+1})$ とおき、点 P_1, Q_1, P_2, Q_2, $\cdots$, P_k, Q_k, $\cdots$, P_N, Q_N, P_1 をこの順に線分で結んで得られる折れ線を γ_δ とすると、仮定 (iii) より、

$$\gamma_\delta \subset \bigcup_{S\cap C\neq\phi\text{なる正方形 }S} S.$$

γ_δ が、Jordan 閉曲線である場合、γ_δ で囲まれる領域を D_δ とおくと、

$$\mu(D_\delta) = \sum_{k=1}^{N} x_k(y_{k+1} - y_k) \tag{6.4}$$

である。

$$E_\delta \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{S\subset\Omega\text{なる正方形}} S, \quad F_\delta \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{S\cap\Omega=\phi\text{なる正方形}} S$$

とおくと、

$$E_\delta \subset D_\delta \subset F_\delta$$

となる。ゆえに

$$\mu(E_\delta) \leq \sum_{k=1}^{N} x_k(y_{k+1} - y_k) \leq \mu(F_\delta).$$

一方 γ_δ が Jordan 閉曲線でない場合、(6.4) の値には、同一部分の面積が重複して参入される箇所が生じるが、その場合も重複箇所の面積の総和は

$$\frac{\ell(\gamma_\delta)\delta}{2}$$

で押えられる (ここで曲線の長さを $\ell(\cdot)$ で表した)。これと、

$$\ell(\gamma_\delta) \le \sqrt{2}\ell(C)$$

によって、

$$\mu(E_\delta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ell(C)\delta \le \sum_{k=1}^{N} x_k(y_{k+1} - y_k) \le \mu(F_\delta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ell(C)\delta.$$

ここで $\delta \downarrow 0$ とすると、左辺、右辺ともに $\mu(\Omega)$ に収束するので、真中の辺も $\mu(\Omega)$ に収束する。すなわち

$$\int_C x\ dy = \mu(\Omega).$$

$-\displaystyle\int_C y\ dx = \mu(\Omega)$ についても同様にして証明できる。 ■

定理 6.4.1 の証明　$\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \varepsilon Q(x, y) \\ y \end{pmatrix}$$

によって、写像 $\varphi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を定めると、

$$\det \varphi' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon\dfrac{\partial Q}{\partial x} & \varepsilon\dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x}$$

であるから、ε を十分小さく取れば、$\det \varphi' \ne 0$ (in $\overline{\Omega}$). 必要ならば、さらに ε を小さく取ることにより、φ は Ω と C を $\xi\eta$ 平面上のある領域 D とその境界 γ 上に写すように出来る (これを示すのは、あまりやさしくはないが、確かに大丈夫)。

　すると、変数変換の公式によって、

$$\iint_D d\xi d\eta = \iint_\Omega \left(1 + \varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy. \tag{6.5}$$

一方

$$-\int_\gamma \xi\ d\eta = -\int_C (x + \varepsilon Q) dy. \tag{6.6}$$

上の補題から、

$$\int_\gamma \xi d\eta = \iint_D d\xi d\eta, \tag{6.7}$$

$$\iint_\Omega dxdy = \int_C x\ dy. \tag{6.8}$$

(6.5), (6.6), (6.7), (6.8) を加えて、

$$0 = \iint_\Omega \varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x}\ dxdy - \int_C \varepsilon Q\ dy,$$

すなわち

$$\int_C Q\,dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

同様にして

$$\int_C P\,dx = -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

も証明されるので、公式が証明できる。■

6.5　3 次元ベクトル解析

既に 1 次の微分形式を導入済みであるが、ここでは高次の微分形式の定義をのべる。簡単のため、空間の次元は 3 とする。

定義 6.5.1 (3 次元空間の中の微分形式の外微分) Ω を $\mathbf{R}^3$ の領域とする。Ω 上の関数 (0 次微分形式) f に対して、その外微分 (exterior differentiation) を

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

で定義する。Ω 上の 1, 2, 3 次微分形式には、これを用いて、外微分を次のように定義する。

$$d(Pdx + Qdy + Rdz) \overset{\text{def.}}{=} dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

$$\begin{aligned} d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) &\overset{\text{def.}}{=} dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

ここで rot, div が出て来ることに注目。

定義 6.5.2 (2 次元空間の中の微分形式の外微分) Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域とする。Ω 上の関数 (0 次微分形式) f に対して、その外微分 (exterior differentiation) を

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

で定義する。Ω 上の 1, 2 次微分形式には、これを用いて、外微分を次のように定義する。

$$d(Pdx + Qdy) \overset{\text{def.}}{=} dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

$$d(Rdx \wedge dy) \overset{\text{def.}}{=} 0.$$

6.6 ベクトル解析公式集

— 卒研生や院生のために —

6.6.1 2 次元

定理 6.6.1 (Green の定理)

(6.9)
$$\iint_D \mathrm{rot}\,\vec{u}\,dxdy = \int_{\partial D} \vec{u}\cdot d\vec{s}.$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ とすると、

(6.10)
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

実は本質的に同じ内容だが、3 次元の Gauss の発散定理に似た形に書き直すことが出来る (それで Gauss-Green の定理と呼ばれることもある)。

命題 6.6.1 (2 次元の Gauss の発散定理)

(6.11)
$$\iint_D \mathrm{div}\,\vec{u}\,dxdy = \int_{\partial D} \vec{u}\cdot\vec{n}\,ds.$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ とすると、

(6.12)
$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} (Pn_x + Qn_y)\,ds.$$

Green の定理の系として、ポテンシャル論で有用な公式が得られる:

系 6.6.1 (Green の積分公式)

(6.13)
$$\iint_D (f \triangle g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dxdy = \int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\,ds.$$

(6.14)
$$\iint_D \left(f \triangle f + |\nabla f|^2\right) dxdy = \int_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,ds.$$

(6.15)
$$\iint_D (f \triangle g - g \triangle f)\,dxdy = \int_{\partial D} \left(f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right) ds.$$

(6.16)
$$\iint_D \triangle f dxdy = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,ds.$$

6.6.2　3 次元

定理 6.6.2 (Gauss の発散定理)

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{u}\, dxdydz = \iint_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA. \tag{6.17}$$

この定理の簡単な系としてポテンシャル論で有用な次の諸公式が得られる:

系 6.6.2 (Green の積分公式)

$$\iiint_D (f \triangle g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dxdydz = \iint_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dA. \tag{6.18}$$

$$\iiint_D (f \triangle g - g \triangle f)\, dxdydz = \iint_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) dA. \tag{6.19}$$

$$\iiint_D \left(f \triangle f + |\nabla f|^2 \right) dxdydz = \iint_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial n}\, dA. \tag{6.20}$$

$$\iiint_D \triangle f\ dxdydz = \iint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA. \tag{6.21}$$

3 次元空間の中の（閉曲面でない）曲面上の面積分と境界曲線上の線積分について、2 次元領域における Stokes の定理の類似が成り立つ。

定理 6.6.3 (Stokes の定理)

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \int_{\partial S} \vec{u} \cdot \vec{ds}.$$

6.7　ポテンシャルの存在条件再説

(**注.** この小節も、はじめて学ぶときは読む必要はない。)

既にベクトル場のポテンシャルが存在するための条件については、第 3 節で説明したが、ここではその一般化を述べる。

例えば、3 次元のベクトル場 $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{v}$$

を満たすベクトル場 $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ が存在するとき、$\vec{A}$ を $\vec{v}$ の **ベクトル・ポテンシャル**と呼び、物理学でしばしば利用される。これは微分形式の言葉を使って書くと、2-form $\omega = v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2$ に対して

$$d\eta = \omega$$

を満たす 1-form $\eta = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ が存在するか、という問題になる[10]。

[10] この問題の完全な解答は、後述する小松「ベクトル解析と多様体」に載っている。

この問題を一般化するには、微分形式の言葉を使うのが便利である。

定義 6.7.1 (閉形式、完全形式) Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、 $\omega \in \wedge^k(\Omega)$ とする。

(1) $d\omega = 0$ が成り立つとき、ω は**閉形式** (**closed form**) であるという。

(2) $d\eta = \omega$ を満たす $\eta \in \wedge^{k-1}(\Omega)$ が存在するとき、ω は**完全形式** (**exact form**) であるという。

次の命題が成り立つ。

命題 6.7.1 完全形式は閉形式である。すなわち任意の $\eta \in \wedge^r(\Omega)$ について、

$$d(d\eta) = 0.$$

1-form $\omega = Pdx + Qdy$ について $d\omega = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ であるから、 定理 6.3.2 は、この命題の特別な場合であるわけである。

すると、

閉形式は、他にどういう条件があれば、完全形式になるか?

という問題が生じる。この問題は幾何学に属し、**de Rham の理論**により、ほぼ満足の行く解答が得られている。

比較的分かりやすく、かつまた使いやすい結果を紹介しておこう。

命題 6.7.2 (Poincaré の補題) Ω が可縮ならば、Ω 上の任意の閉形式は完全である。

ここで「Ω が可縮 (contractible)」とは、Ω が連続的な変形で一点に縮められることをいい、直観的には Ω に穴がないことである。例えば星型領域[11]は可縮である。

単連結という条件も、ある意味で、「穴のない」ことを表しているが、一般には可縮の方が強い条件である。つまり「穴」にも色々なものがあるということである。幾何学ではこの事実 (閉形式と完全形式とに差があるかどうかで、穴の有無が分かる) を逆手に取って、図形の形 (色々な穴の有無) を調べているわけである。

この節の内容を詳しく知りたいときは、

1. 森田 茂之、微分形式の幾何学 1、岩波講座 (1996)
2. 小松 彦三郎、ベクトル解析と多様体 I, II、岩波講座 応用数学

を参照するとよい。二つとも最近著された大変すぐれた本である。

[11]領域 Ω 内のある一点 p と、 Ω 内の任意の点を端点とする線分が必ず Ω に含まれる時、Ω は p に関して星型 (star-shaped, star-liked) であると呼ぶ。例えば、凸領域は、その任意の点に関して星型である。

付 録A　演習問題

1. (閉方体上の重積分)　次の重積分の値を求めよ。(a, b は正定数とする。)

(1) $\Omega = [0,1] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ とするとき $\displaystyle\iint_\Omega x \cos y dxdy.$

(2) $\Omega = \{(x,y,z); 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 3\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_\Omega xye^{x+y+z} dxdydz.$

(3) $\Omega = [-1,1] \times [0,2]$ とするとき $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x^3}{1+y^2} dxdy.$

(4) $\displaystyle\iint_{[0,a]\times[0,b]} (x^2+y^3) dxdy.$

(5) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi]} \sin(x+y) dxdy.$

(6) $\displaystyle\iint_{[0,a]\times[0,1]} \frac{dxdy}{\sqrt{y+x^2}}.$

(7) $\displaystyle\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/2]} x\sin(x+y) dxdy.$

(8) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[0,2]} x^2 y \sin(xy^2) dxdy.$

2. (上限和、下限和)　(講義の記号を用いる。) $A = [0,1]$, $f\colon A \to \mathbf{R}$ を $f(x) = x$ で定める。N を自然数、$\Delta = \left\{\dfrac{j}{N}\right\}_{j=0}^{N}$ とするとき、$U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ を求めよ。

3. (Jordan 可測集合上の重積分)　次の二重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega (2+x-y)\, dxdy$, Ω は 3 直線 $y = 2-x$, $y=0$, $x=0$ で囲まれる三角形。

(2) $\displaystyle\iint_\Omega y^2\sqrt{y-x}\, dxdy$, Ω は 3 直線 $y=x$, $y=1$, $x=0$ で囲まれる三角形。

(3) $\displaystyle\iint_\Omega x^3\, dxdy$, $\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 < a^2\}$. ただし a は正定数。

(4) $\displaystyle\iint_\Omega e^{x+y}\, dxdy$, Ω は 3 曲線 $y=0$, $y=\log x$, $x=2$ で囲まれる領域。

(5) $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,dxdy$, Ω は 2 曲線 $x=y^2$, $y=x^2$ で囲まれる領域。

(6) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{ax-y^2}\,dxdy$, $\Omega=\{(x,y);y^2<ax,x<b,y>0\}$. ただし a, b は正定数。

(7) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dxdy$, $\Omega=\{(x,y);x>0,y>0,\sqrt{x}+\sqrt{y}<1\}$.

(8) $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)\,dxdy$, Ω は 3 直線 $y=2x$, $y=\dfrac{x}{2}$, $x+y=2$ で囲まれる三角形。

(9) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy$, Ω は 3 曲線 $y=0$, $x=2a$, $2ay=x^2$ で囲まれる領域。 ただし a は正定数。

4. (積分の順序交換) つぎの二重積分の積分域を図示し、積分の順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy\right\}dx$, $a>0$. (2) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{y^2}^1 f(x,y)dx\right\}dy$. (3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\sin x} f(x,y)dy\right\}dx$.

(4) $\displaystyle\int_0^a\left\{\int_0^x f(x,y)dy\right\}dx$, $a>0$. (5) $\displaystyle\int_{-1}^1\left\{\int_0^{1-x^2} f(x,y)dy\right\}dx$. (6) $\displaystyle\int_0^4\left\{\int_{x/4}^{3-(x/2)} f(x,y)dy\right\}dx$.

(7) $\displaystyle\int_0^{2a}\left\{\int_{\sqrt{ax/2}}^{3a-x} f(x,y)dy\right\}dx$. (8) $\displaystyle\int_0^2\left\{\int_{x^2/4}^{3-x} f(x,y)dy\right\}dx$. (9) $\displaystyle\int_{1/2}^1\left\{\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right\}dy$.

(10) $\displaystyle\int_{-1}^2\left\{\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy\right\}dx$. (11) $\displaystyle\int_0^{2a}\left\{\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{x+a} f(x,y)dy\right\}dx$, $a>0$.

5. (変数変換のヤコビアン) つぎの変換のヤコビアンを求めよ。また xy 平面の領域 D はどのような図形に変換されるか。(a, b は正定数とする。)

(1) $x=u+v$, $y=u-v$; $D=(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする四辺形の内部。

(2) $x=a+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$; $D=\{(x,y);(x-a)^2+y^2<a^2,y>0\}$.

(3) $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$; $D=\left\{(x,y);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+<1,x>0,y>0\right\}$.

6. (重積分) 次の二重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);1<x<3,1<y<3\}$.

(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-2y}{(2x+y)^3}\,dxdy$, $\quad\Omega$ は $(0,2)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,3)$ を頂点とする四辺形。

(3) $\displaystyle\iint_\Omega y(x+y)\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2<a^2\}$.

(4) $\displaystyle\iint_\Omega x\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2<a^2,x>0,y>0\}$.

(5) $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2<1,x>0,y>0\}.$

(6) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);x^2+y^2<a^2\}.$

(7) $\displaystyle\iint_\Omega y\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1,x>0,y>0\}.$

(8) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy,\quad \Omega=\{(x,y);\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1,x>0,y>0\}.$

7. (重積分) [(1)] つぎの三重積分の値を求めよ。

1. $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2<1,x>0,y>0,z>0\}.$
2. $\displaystyle\iiint_\Omega (1-x^2-y^2-z^2)\,dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2<1\}.$
3. $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\,dxdydz$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2<1,x>0,y>0,z>0\}.$
4. $\displaystyle\iiint_\Omega dxdydz$, Ω は平面 $y=0$, $x\sin\beta-y\cos\beta=0$ $(y>0)$ および球面 $x^2+y^2+z^2=a^1$ で囲まれる楔形の領域。

8. (体積) 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ によって切りとられる第 1 象限 ($x>0$, $y>0$, $z>0$ の範囲のこととする) の体積を求めよ。(p143 4, 解答 p269 $\frac{2}{3}abc$)

9. (体積) 柱面 $x^2+y^2=4$ と二平面 $z=y+1$, $z=0$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。(p144 5, 解答 p269 $6\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$)

10. (体積) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ および $z=k-\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}$ で囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$. (p144 6, 解答 p269 $\frac{\pi}{2}k^2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$)

11. (体積) 曲面 $kz=x^2+y^2$ と平面 $x+z=1$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, $k>0$. (p144 7, 解答 p269 $\frac{\pi}{2}k\left(1+\frac{k}{4}\right)^2$)

12. (体積) 2 つの曲面 $kz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $x^2+y^2=c^2$, および平面 $z=0$ によって囲まれる立体の体積を求めよ。ただし, a, b, c, $k>0$. (p149 3, 解答 p269 $\frac{\pi c^4}{4k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$)

13. (体積) 曲面 $z=xye^{-(x^2+y^2)}$ $(x>0,\ y>0)$, 柱面 $x^2+y^2=1$ および $z=0$ で囲まれる立体の体積を求めよ。(p149 4, 解答 p269 $\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{e}\right)$)

14. (体積)　つぎの図形の体積を求めよ。a, b, c は正の定数とする。

(1) $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 < 1, x < z < 2x + 1\}$　(p153 1 (1), 解答 p269 π)

(2) $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 < z^2, 0 < z < a\}$　(解答 $\dfrac{\pi}{3}a^3$)

(3) $D = \{(x, y, z); 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < x + y\}$　(解答 1)

(4) $D = \{(x, y, z); \dfrac{1}{4} < \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1, x < z < a\}$　(解答 $\dfrac{3}{4}\pi a^2 b$)

(5) $D = \{(x, y, z); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1 - z, 0 < z < 1\}$　(解答 $\dfrac{\pi}{2}ab$)

(6) $D = \{(x, y, z); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1, z > \dfrac{c}{2}\}$　(解答 $\dfrac{5}{24}\pi abc$)

15. (体積)　楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$ の体積を求めよ。　(p154 4, 解答 $\dfrac{4}{3}\pi abc$)

16. (広義積分)　つぎの広義積分の収束、発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\log(1 + x^2 + y^2)}$,　$D = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$.　(p168 1(1), 解答 発散)

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin x}{y^2} dxdy$,　$D = \{(x, y); 0 < x < y < \pi\}$.　(p168 1(2), 解答 収束)

(3) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{-xy} dxdy$,　$D = \{(x, y); 0 < x < 1, y > x\}$.　(p168 1(3), 解答 収束)

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy$,　$D = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$.　(p168 1(4), 解答 発散)

(5) $\displaystyle\iint_D e^{-(x+y)} dxdy$,　$D = \{(x, y); x < 0, y > 0\}$.　(p168 1(5), 解答 発散)

(6) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$,　$D = \{(x, y); x + y > 0, y > 0\}$.　(p168 1(6), 解答 収束)

17. (広義積分)　積分せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2) dxdy$,　$D = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$.　(p169 4(1), 解答 $-\pi$)

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2 y^3} dxdy$,　$D = \{(x, y); x > 1, y > 1\}$.　(p169 4(2), 解答 $\dfrac{1}{2}$)

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$,　$D = \{(x, y); 0 < x < 2, x < y < \sqrt{2}x\}$.　(p169 4(3), 解答 $2[\log(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \log(\sqrt{2} + 1)]$)

(4) $\displaystyle\iint_D e^{-x} \cos xy dxdy$,　$D = \{(x, y); x > 0, 0 < y < 1\}$.　(p169 4(4), 解答 $\pi/4$)

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D=\{(x,y); x^2+y^2<1, x>0, y>0\}.$ (p169 4(5), 解答 $-\pi$)

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}dxdy, \quad D=\{(x,y); x^2+y^2>1\}.$ (p169 4(6), 解答 4π)

18. (広義積分) $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ において以下の問に答えよ。

(1) α を正の定数とする時、広義積分 $\displaystyle\int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^\alpha}dx$ の収束発散を調べよ。

(2) β を正の定数とする時、広義積分 $\displaystyle\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^\beta}dx$ の収束発散を調べよ。

(教師用)

番外 $\mathbf{R}^2$ の線分 $\Omega=\{(x,0); 0\le x\le 1\}$ は零集合であることを示せ。

19. f, g をスカラー場とするとき

$$\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g)$$

であることを示せ。

20. 次の 3 次元ベクトル場 $\vec{v}$ の、指定された点における発散 $\nabla\cdot\vec{v}$ を計算せよ。

(1) $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^2z \\ -2y^2z \\ xy^2z \end{pmatrix}, (1,-1,0).$

(2) $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix} x\sin y \\ y\sin z \\ z\sin x \end{pmatrix}, (\pi/2,\pi/2,\pi/2).$

(3) $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix} \log(x^2+y^2+z^2) \\ y\log(x^2+y^2+z^2) \\ z\log(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}, (1,1,1).$

21. 次の関数 f に対して、∇f, $\triangle f$ を計算せよ。

(1) $f(x,y,z)=x^2y^3z^5.$

(2) $f(\vec{x})=\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. ただし $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

(3) $f(\vec{x})=r^2e^{-r}$. ただし $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, r=\|\vec{x}\|.$

22. 次の定理の (1), (2), (3) を証明せよ。

定理 A.0.1 (1) $\nabla \cdot \nabla f = \triangle f$ すなわち $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \triangle f$.

(2) $\nabla \times \nabla f = \vec{0}$ すなわち $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \vec{0}$.

(3) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \vec{0}$ すなわち $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{v}) = 0$.

(4) $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \triangle \vec{v}$. すなわち $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{v}) - \triangle \vec{v}$.

(5) $\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \triangle \vec{v}$. すなわち $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{v}) = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{v}) + \triangle \vec{v}$.

23. 次のベクトル場 $\vec{v}$ に対して、回転 $\mathrm{rot}\, \vec{v}$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{v}$ を計算せよ。

(1) $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -2xz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$.

(2) $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin xy \\ \cos yz \\ xyz \end{pmatrix}$.

24. 次の関係式を示せ。

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f}$$

25. 曲線 C が次のそれぞれの場合について、線積分

$$\int_C xy\, dx - y^2\, dy$$

を求めよ。

(1) $x = \sqrt{t},\ y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$.

(2) $x = 2t,\ y = 4t \quad (0 \leq t \leq 1)$.

(3) $y = 2x,\ x = x \quad (0 \leq x \leq 2)$.

26. 曲線 C が次のそれぞれの場合について、線積分

$$\int_C y\, dx - x\, dy$$

を求めよ。

(1) $x = t^3 - 1,\ y = t^2 - t \quad (0 \leq t \leq 1)$.

(2) $(0, 0)$ から $(2, 4)$ への有向線分.

(3) 放物線 $y = x^2$ のグラフの $(0, 0)$ から $(2, 4)$ までの部分.

(4) 折れ線 $(0, 0) \to (-2, 0) \to (-2, 4) \to (2, 4)$.

27. 次の $\vec{f}, C$ に対して線積分 $\displaystyle\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を計算せよ。

(1) $\vec{f}(x,y)=(x^2-xy, y^2-xy)$, $C\colon y=x^2$, $-1\le x\le 1$.

(2) $\vec{f}(x,y)=(y^2, x+y)$, $C\colon y=x^3$, $0\le x\le 1$.

(3) $\vec{f}(x,y)=(x^2+2y, -x+\cos y)$, C: $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$ を頂点とする平行四辺形の周囲。

(4) $\vec{f}(x,y,z)=(x^2+y, -yz, z^2x)$, $C\colon (t,t^2,t^3)$, $0\le t\le 1$.

(5) $\vec{f}(x,y,z)=(xy, -z, 3x)$, $C\colon (t^2+1, t^2, t)$, $0\le t\le 2$.

28. 次のベクトル場はポテンシャルを持つことを示し、それを求めよ。

(1) $\vec{f}(x,y,z)=(y+z, z+x, x+z)$.

(2) $\vec{f}(x,y,z)=(2xy, x^2-z, -y)$.

(3) $\vec{f}(x,y,z)=(2xy\cos z, x^2\cos z, -x^2y\sin z)$.

(4) $\vec{f}(x,y,z)=(x,y,z)/r^3$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

参考 昨年度の微分積分学 II の試験に出した問題。
教科書・ノート等持込不可, 解答用紙のみ提出すること。
1 は必修。**2**〜**7** の 6 問の中から 5 問を選んで解答せよ。
1. 次の各問に答えよ。
(1) $A=[0,1]$, $f(x)=x^2$ $(x\in A)$ とする。自然数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta=\{j/N; j=0,1,\cdots,N\}$ で定義する。このとき、 f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であることの定義を記せ。(4) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の積分の定義を記せ。(5) 可積分でない関数の例をあげよ (できれば、上に書いた定義に従って、それが可積分でないことを示せ)。
2. $A=[0,1]$ とし、 $f\colon A\to\mathbf{R}$ を次式で定めるとき、f が A 上可積分 (積分可能) であることを示せ。

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

3. $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2\le x\}$ のとき、$\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$ を計算せよ。
4. (1) 3 次元極座標変換のヤコビアン (ヤコビ行列式) を求めよ。 (2) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ が収束するような正定数 α の範囲を求めよ。ただし $\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2>1\}$.
5. 極座標による曲線 $r=1+\dfrac{\sin\theta}{2}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

6. ベクトル場 $\vec{f}$ を

$$\vec{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$$

で定めるとき、以下の問に答えなさい。

(1) xy 平面における円 $x^2+y^2=a^2$ (a は正の定数) を正の向き (反時計回り) に一周する閉曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を計算せよ。

(2) $\mathrm{rot}\,\vec{f}=0$ であることを示せ。

(3) $\vec{f}$ はポテンシャルを持つか、理由をつけて答えよ。

(4) 円 $(x-2)^2+y^2=1$ を正の向きに一周する閉曲線を $\tilde{C}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\tilde{C}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を求めよ。

7. $\vec{f}(\vec{x})=\vec{x}$ ($\vec{x}\in\mathbf{R}^3$), $S=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^3; \|\vec{x}\|=a\}$ (a は正の定数) とするとき、面積分 $\displaystyle\int_S \vec{f}\cdot\vec{n}dS$ を以下の二通りの方法で計算せよ。(1) 面積分を直接計算する。(2) Gauss の定理を適用する。

付 録B　試験問題

B.1　1994年度微分積分学II・同演習

B.1.1　本試験問題

1, 5 は必修。2,3,4 の 3 問の中から 2 問を選択して解答せよ。

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体 (有界閉区間) 上の積分の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測 (体積確定) であることの定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の積分の定義を記せ。(4) Jordan 可測でない有界部分集合の例をあげよ。

2. 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y (y-x)^2 \log(1-x)dx$ について以下の問に答えよ。

(1) I の積分の順序交換をせよ。 (2) I の値を求めよ。

3. 極座標による曲線 $r = \sin 2\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ について以下の問に答えよ。

(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

4. (1) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ を計算せよ。(2) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ が収束するような正数 α の範囲を求めよ。

5. $\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y+2xy \\ x^3+x^2+2y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(1) $\mathbf{f}$ がポテンシャル持つことを示せ。(2) $\mathbf{f}$ のポテンシャルを (一つ) 求めよ。(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds}$ を求めよ。 C_1 : $(\cos 2t, \sin 3t)$　$(0 \le t \le 2\pi)$. C_2 : 折れ線 $(0,0) \to (-2,0) \to (-2,4) \to (2,4)$.

B.1.2　解説

1. 講義では、黒板に日本語の文章を (語尾まで含めて完全に) 書くのは大変なので (それに案外見やすくない)、普通は色々な記法を用いて、省略して書くわけだが、どうも読み損なっているいる人が多いようなので、ここでは文章で書いてみよう。

(1) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ とするとき、f が A 上積分可能であるとは、$U(f) = L(f)$ がなりたつことである (ここで $U(f)$ は f の A 上の上積分、$L(f)$ は f の A 上の下積分)。またこのとき (f が A 上積分可能であるとき)、$U(f)$ のことを f の A 上の積分と呼び、$\int_A f(x)dx$ で表す。

注意　上積分 $U(f)$、下積分 $L(f)$ の定義も要求されれば書けるようにしておいて欲しい。君達の答案に多かったミスとして、$U(f)$, $L(f)$ が何であるか一言も説明しなかったり (それでは説明文としてナンセンスである)、分割 Δ に関する上限和 $U(f,\Delta)$、下限和 $L(f,\Delta)$ と混同し

たことがあげられる。
(2) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合とするとき、Ω が Jordan 可測であるとは $\int_A \chi_{\Omega(x)}dx$ が存在することである (言い替えると χ_Ω が A 上積分可能であること)。ただし A は $\overline{\Omega} \subset A^i$ となる閉方体で[1]、χ_Ω は Ω の定義関数、すなわち

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

である。
(3) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が Ω 上積分可能であるとは、$\int_A \tilde{f}(x)dx$ が存在することである。ただし A は $\Omega \subset A$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$\tilde{f}$ は

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

で定義される関数 $\tilde{f}\colon A \to \mathbf{R}$ である。
(4) $\Omega = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ は Jordan 可測でない $\mathbf{R}$ の有界部分集合である。実際 $\overline{\Omega} \subset A^i$ となる任意の有界閉区間 A について $U(\chi_\Omega) = 1$, $L(\chi_\Omega) = 0$ となるから χ_Ω は A 上積分可能ではない (この理由は要求していなかったから書かなくてもよい)。
2. (1) 文字だけで書くと $\{(x,y); 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\} = \{(x,y); 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$ ということだが、図を描いて考えたほうが分かりやすいだろう。結果は

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 (y-x)^2 \log(1-x) dy.$$

(2) 上の結果を利用して[2]

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_x^1 (y-x)^2 dy \right) \log(1-x)dx = \int_0^1 \left[\frac{(y-x)^3}{3} \right]_x^1 \log(1-x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 \log(1-x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(-\frac{(1-x)^4}{4} \right)' \log(1-x)dx \\
&= -\frac{1}{12}\left[(1-x)^4 \log(1-x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{12}(1-x)^4 (\log(1-x))' dx \\
&= 0 + \frac{1}{12}\int_0^1 (1-x)^4 \cdot \frac{-1}{1-x} dx = \frac{1}{12}\int_0^1 (x-1)^3 dx = \frac{1}{12}\left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

(本当は被積分関数が $x=1$ のところが定義されていないので広義積分 $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon}$ として計算すべきであるが、省略して書いた。)
3. 極座標と言ったら、直交座標系を入れた xy 平面の中にあると考える (講義でも色々例を出したはず)。(1) これはごくごく大雑把でいい。(2) 考えている図形は極座標による条件では

$$0 \le r \le \sin 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

[1] A^i は A の内部を表す。
[2] 累次積分は Fubini の定理を用いて積分の順序を交換した方が簡単に積分できることがあるということを示す例。

と表されるから、

$$\begin{aligned}
\Omega \text{ の面積} &= \int_\Omega 1dxdy = \int_{0\le r\le \sin 2\theta, 0\le\theta\le\pi/2} rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sin 2\theta} rdr = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sin 2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

4. (1) $\Omega_n = \{(x,y); x^2+y^2 < n^2\}$ とおくと、$\{\Omega_n; n \in \mathbf{N}\}$ は $\mathbf{R}^2$ の近似列[3]になるので、

$$I = \int\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad I_n = \int\int_{x^2+y^2<n^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

とおくと $\lim_{n\to\infty} I_n = I$. そこで I_n を計算しよう。

$$I_n = \int\int_{0\le r<n, 0\le\theta\le 2\pi} \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2} = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{(1+r^2)^2} d\theta = 2\pi \int_0^n \frac{r}{(1+r^2)^2} dr.$$

ここで $u = 1+r^2$ とおくと $du = 2rdr$, r が $0 \to n$ と動くにつれて u は $1 \to n^2+1$ と動くので、

$$I_n = \pi \int_1^{n^2+1} \frac{du}{u^2} = \pi \left[-u^{-1}\right]_1^{n^2+1} = \pi \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right).$$

これから $I = \pi$.

(2) 少し簡単に書くと (本当は広義積分だから lim を持ち出して表現すべきだが、∞ のままやると)

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} = 2\pi \int_0^\infty \frac{rdr}{(1+r^2)^\alpha} = \pi \int_1^\infty \frac{du}{u^\alpha} = \begin{cases} \text{収束} & (\alpha > 1) \\ \text{発散} & (\alpha \le 1) \end{cases}$$

(ただし $u = 1+r^2$ という変数変換を行なった。) ゆえに収束するような α の範囲は $\alpha > 1$.

5. $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ とする。すなわち $P(x,y) = 3x^2y + 2xy$, $Q(x,y) = x^3 + x^2 + 2y$.

(1) $\mathbf{R}^2$ は星型領域であり、

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2+2x) - (3x^2+2x) = 0$$

であるから $\mathbf{f}$ はポテンシャルを持つ。

(2) 前項で確認した条件を満たすベクトル場について、ポテンシャルは線積分で与えられるのであった。つまり、$\mathbf{R}^2$ 内の定点を一つ選んで固定し、任意の $(X,Y) \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$F(X,Y) = \int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} \quad (C \text{ は定点と } (X,Y) \text{ を結ぶ滑らかな曲線})$$

[3]あまり一般的な言葉ではない。この講義でしか使えないと思った方がよい。

とおくと、F は $\mathbf{f}$ のポテンシャルになる。定点を原点 $O=(0,0)$ に選び、曲線 C を

$$\begin{cases} x = tX \\ y = tY \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

と取ると、

$$\begin{aligned}
F(X,Y) &= \int_C P dx + Q dy \\
&= \int_0^1 \left\{ \left[3(tX)^2(tY) + 2(tX)(tY)\right] X + \left[(tX)^3 + (tX)^2 + 2(tX)\right] YY \right\} dt \\
&= \int_0^1 \left(3t^3x^3y + 2t^2x^2y + t^3x^3y + t^3x^2y + 2ty^2\right) dt \\
&= \frac{3}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{4}x^3y\frac{1}{3}x^2y + y^2 \\
&= x^3y + x^2y + y^2.
\end{aligned}$$

(3) C_1 は閉曲線である。ベクトル場がポテンシャルを持つ必要十分条件は任意の閉曲線にそっての線積分が 0 になることであるから、

$$\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = 0.$$

（Green の定理を用いて $\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_D 0 dxdy = 0$ (D は C の囲む領域) としてもよい。また、次の C_2 上の線積分の計算と同様に考えてもよい。）ポテンシャルが存在するベクトル場について、線積分の値は曲線の始点と終点のみで決まる。ゆえに C_2 の代わりに、次の曲線 C_2' にそって積分すればよい。

$$C_2' \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

ところが、$\int_{C_2'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds}$ はまさにポテンシャル F を定義する積分であるから

$$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = \int_{C_2'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = F(2,4) = (2^3 \cdot 4 + 2^2 \cdot 4 + 4^2) = 64.$$

この C_2 上の積分は線積分の定義に基づいて計算してもよい。

B.1.3　追試験問題

1, **5** は必修。**2**, **3**, **4** の三問の中からいずれか二問を選んで解答せよ。(全部で四問解くことになる。)

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の有界な関数の積分の定義を記せ。ただし Riemann 和、上積分、下積分などの言葉を使う場合はその説明も書くこと。閉方体の分割の定義は既知としてよい。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であることの定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合

上の有界関数の積分の定義を記せ。(4) 可積分でない関数の例をあげ、上に書いた定義に従って、それが可積分でないことを示せ。

2. (1) $\Omega = \left\{(x,y); 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, 0 \le y \le \pi\right\}$ とするとき、次の積分の値を求めよ。

$$I = \iint_\Omega \frac{x}{\cos^2 xy} dxdy.$$

(2) Ω を $y=0$, $x=y$, $x=1$ で囲まれた領域とするとき、次の積分の値を求めよ。

$$I = \iint_\Omega \exp\left(\frac{y}{x}\right) dxdy.$$

3. 極座標による曲線 $r = \sin 2\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

4. $\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 < 1\}$ とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を計算せよ。(2) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ が収束するような正数 α の範囲を求めよ。

5. xy 平面における楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a,\, b > 0)$ を正の向き (反時計回り) に一周する曲線を C とするとき、以下の問に答えなさい。

(1) 線積分 $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C xdy - ydx$ を計算せよ。

(2) Green の積分公式を述べ、それを用いて I が曲線 C の囲む領域の面積であることを示せ。

B.2 1995 年度微分積分学 II・同演習 試験問題

(1996 年 1 月 29 日)

1 は必修。**2**〜**7** の 6 問の中から 5 問を選んで解答せよ。

1. 次の各問に答えよ。
(1) $A = [0,1]$, $f(x) = x^2$ $(x \in A)$ とする。自然数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta = \{j/N; j = 0, 1, \cdots, N\}$ で定義する。このとき、 f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。
(2) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であることの定義を記せ。(4) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の積分の定義を記せ。(5) 可積分でない関数の例をあげよ (できれば、上に書いた定義に従って、それが可積分でないことを示せ)。

2. $A = [0,1]$ とし、 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、f が A 上可積分 (積分可能) であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

3. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le x\}$ のとき、$\displaystyle\iiint_\Omega x\, dxdydz$ を計算せよ。

4. (1) 3 次元極座標変換のヤコビアン (ヤコビ行列式) を求めよ。 (2) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ が収束するような正定数 α の範囲を求めよ。ただし $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 > 1\}$.

5. 極座標による曲線 $r = 1 + \dfrac{\sin\theta}{2}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

6. ベクトル場 $\vec{f}$ を

$$\vec{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}\right)$$

で定めるとき、以下の問に答えなさい。

(1) xy 平面における円 $x^2+y^2=a^2$ (a は正の定数) を正の向き (反時計回り) に一周する閉曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を計算せよ。

(2) $\mathrm{rot}\,\vec{f} = 0$ であることを示せ。

(3) $\vec{f}$ はポテンシャルを持つか、理由をつけて答えよ。

(4) 円 $(x-2)^2+y^2=1$ を正の向きに一周する閉曲線を $\tilde{C}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\tilde{C}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を求めよ。

7. $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ $(\vec{x} \in \mathbf{R}^3)$, $S = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3; \|\vec{x}\| = a\}$ (a は正の定数) とするとき、面積分 $\displaystyle\int_S \vec{f}\cdot\vec{n}dS$ を以下の二通りの方法で計算せよ。(1) 面積分を直接計算する。(2) Gauss の定理を適用する。

B.3 1996 年度解析概論 II, 解析概論演習 II

B.3.1 本試験問題

(1997 年 2 月 4 日)

1〜6 に解答せよ。時間に余裕があれば **B1**〜 **B3** のうちから選択して解答せよ。

1. 次の各問に答えよ。
(1) $A = [0,1]$, $f(x) = x - x^2$ $(x \in A)$ とする。正の偶数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta = \{j/N; j = 0,1,\cdots,N\}$ で定義する。このとき、 f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合の Jordan 測度の定義を記せ。(4) $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合上の有界関数の積分の定義を記せ。(5) 閉方体の上で定義された定数関数が積分可能であることを、(2) の解答に記した定義に基づいて示せ。

2. $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{(1-x)(x-y)}}\,dy$ について、以下の問に答えよ。
(1) 積分順序を交換せよ。 (2) I の値を求めよ。

3. a, b, c を正の定数とするとき、$\Omega = \left\{(x,y,z); \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1\right\}$ の体積を求めよ。

4. 極座標で $r = 1 + \dfrac{\sin\theta}{2}$ で定義される曲線で囲まれる領域の面積を求めよ。

5. (1) α を正の定数とするとき、$\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ を求めよ。

(2) α を正の定数とするとき、$\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ の収束・発散を調べよ。

6. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - z \\ -y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(1) $\mathrm{rot}\,\vec{f}$ を求めよ。 (2) $\vec{f}$ はポテンシャルを持つかどうか調べよ (理由を述べよ)。持つ場合はそれを求めよ。(3) 折れ線 $(1,1,1) \to (2,3,1) \to (3,3,1)$ を C とするとき、$\displaystyle\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ を求めよ。

B1. $A = [0,1]$ 上の関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \in (0,1]) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ で定義するとき、f が A 上可積分であることを、「閉方体上の有界関数について、可積分であるための必要十分条件は、不連続点全体のなす集合が零集合である」という定理を用いずに示せ。

B2. $\mathbf{R}^2$ において、集合 $\Omega = \{(x,0); x \in [0,1]\}$ が零集合であることを、定義に基づいて示せ。

B3. $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$ に対して、次の式を満たす $(r,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ を 4 次元極座標と呼ぶ:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta_1 \\ y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ w &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \in I \overset{\text{def.}}{=} [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi).$$

(1) $\begin{cases} X &= r\cos\theta_1 \\ Y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ u &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ v &= \theta_3 \end{cases}$ とすると、写像 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix}$ のヤコビアンは $r^2\sin\theta_1$ であることを示せ。

(2) $\begin{cases} x &= X \\ y &= Y \\ z &= u\cos v \\ w &= u\sin v \end{cases}$ とするとき、写像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンを求め、$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンが $r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$ であることを示せ。

(3) 4 次元球 $\{(x,y,z,w); x^2+y^2+z^2+w^2 < R^2\}$ (R は正の定数) の 4 次元 Jordan 測度を求めよ。

B.3.2 特別試験問題

(1997 年 2 月某日)

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体上の有界関数の積分の定義を述べ、積分可能な例、積分可能でない例をあげよ。(それぞれ積分可能であること、積分可能でないことを示せ。) (2) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合が Jordan 可測であるとはどういうことか、定義を述べて、Jordan 可測である有界部分集合の例、Jordan 可測でない有界部分集合の例をあげよ。(それぞれ Jordan 可測であること、 Jordan 可測でないことを示せ。)

2. 極座標で $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ $(0 \le |\theta| \le \pi/4)$ と表される平面上の曲線 (これはレムニスケートと呼ばれる) の概形を描き、それによって囲まれる領域の面積を求めよ。(ただし a は正の定数とする。)

3. 次の積分の順序を交換せよ (a は正の定数である)。

$$\int_0^{2a} \left\{ \int_0^{2ax-x^2} f(x,y)\,dy \right\} dx.$$

4. 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ および $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ によって切りとられる第 1 象限 ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ の範囲のこととする) の体積を求めよ。ただし a, b, c は正の定数とする。

5. $A = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, $B = \mathbf{R}^3 \setminus A$ とするとき、次の二つの広義積分を求めよ (α, β は正の定数である)。

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz, \\ J &= \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\beta} dxdydz. \end{aligned}$$

6. (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b は正の定数) を正の向きに一周する閉曲線 C に対して、線積分 $I = \displaystyle\int_C x\,dy$ の値を求めよ。(2) I が楕円 C の囲む領域の面積であることを Green の定理を用いて説明せよ。(Green の定理をきちんと書いて、それに基づいて説明すること。)

付 録C　参考書案内

> 筆者が学生だった頃の教官の言葉に、「数学の勉強のための読書には精読と濫読の両方が必要である。まず、学生は理論の骨組みを理解するために、しっかりと書かれた教科書をきちんと通読する必要がある (とにかく一つのやり方で、首尾一貫とした話を理解すること、それは数学の勉強に絶対必要なことである)。その上で、その分野におけるさまざまな流儀に触れて、理解をより完全にするためにたくさんの本を読まねばならない」というのがあった。

まず、解析概論の講義内容を作るために直接参考にした本を紹介しよう。解析概論の前身である微分積分学・同演習の担当が決まった際に、微分積分学の本として定評のあるものを見直したのはもちろんであるが、書店で販売されていた本をかたはしから眺めていった。細かな点を参考にした本の数は多くなるが、本質的なところで参考にした本はあまり多くない。

1. 荷見守助、現代解析入門、内田老鶴圃
2. 中尾、微分積分学入門、近代科学社
3. 杉浦 光夫、解析入門 I, II、東京大学出版会
4. マイケル・スピヴァック、多変数解析学、東京図書
5. 俣野 博、微分と積分 3、岩波講座 現代数学への入門、岩波書店
6. 森田 茂之、微分形式の幾何学 1、岩波講座 現代数学の基礎、岩波書店
7. 小松 彦三郎、ベクトル解析と多様体 I, II、岩波講座 応用数学、岩波書店

1 は、数学科学生向けの一年次における微分積分学の講義向けの教科書としてなかなか良さそうだ、と感じている。この本を教科書に指定しなかった理由は、解析概論 I, II が二年生向けの「多変数の微分積分学」の講義だったという点に尽きる。

2 は教科書として使っていた年度もあったが (そのため、今でも解析概論 I の部分の内容への影響は最も大きい)、次の理由から止めにした。

- 積分のところの記述が重く (難しく)、忠実にたどるのに講義時間が不足しがちになる。また学生が自習する際にも「胃にもたれそうな」感じがした。
(積分は後期の内容の大部分を占めるので、これは大きな問題である。)
- いくつか致命的な誤植があり、講義でそれを指摘しても、間違えたまま暗記した学生が後を絶たなかった (こういうのを理由にあげるのはなさけないが)。

この本が改訂されてこれらの問題が解決された場合は、教科書に返り咲く可能性があるが、現時点では教科書にするつもりはない。

3 は、微積分のみならず複素関数論の優れた解説書であると思われる (大変な力作である)。必要になることは何でも書いてある。この講義の内容を練る際にこの本を参考にしたところは多い (自分でさんざん推敲した末にこの本を見ると、はるかに要領良く解説されていることが多く、最初から参考にした方が良かったかと思わされたことが何度かあった)。しかし、平均的な学生の学力を考えると、この本を教科書に指定することは無理があるように思われた (つまみ食いにも、それなりの能力が必要ということ)。卒研生や大学院生には大いに勧めたい。

4 は、有名な本で、筆者も学生の時に、多変数の微積分の参考書として読んだ。積分の定義や、可積分条件のところの説明は大いに採り入れた。しかし

- 全体として、あまりにも幾何学よりの記述であり、解析学の教科書としては抜け落ちたところが大きいこと。

- ベクトル解析部分の記述の仕方が高度に抽象的で、学生の自習書向きでないこと。

の二点から、やはり教科書として指定するのはためらわれた。この本は一度、幾何学で多様体論を学んでから、微分積分学を復習する際に読むのが良い。少なくとも最初に学ぶ際に読む本ではないと思う。
(3 の II の序文にも述べられているように、微分積分学の入門段階に多様体を持ち込むことは、必要性を大いに感じるものの、まだうまいやり方が発見 (開発?) されていないようである。最初に微分積分学を学ぶ際に少し中途半端になってしまうのは仕方がないことなのかも知れない。)

最近、岩波講座が更新中であるが、よい本がたくさん出ている。

5 は、新しい感覚の解析学入門の本である。現時点では、ベクトル解析の部分で参考にしたにとどまるが、今後この本の内容を解析概論の講義内容に取り込んで行く可能性は大きい。

6 は、外微分法に関する良い入門書である。筆者はこの手の幾何の入門書が好きで濫読しているのだが、これはとりわけ親切であると思う。特に色々な流儀についての翻訳をしてあって、長年の疑問が解消したところがいくつかある。読んでいて楽しい。幾何学で多様体を学ぶ際に副読本として読むのを勧める。

7 もサービス精神にあふれた本である (もっとも必要性を感じない人には、無味乾燥に感じられるかもしれない)。実は解析学者によって著されたベクトル解析の本は案外と少ない。これはその数少ない例外であって、解析学向きの記述が豊富である。

筆者はベクトル解析を最初物理として学んだ。その際は

1. ファインマン、レイトン、サンズ著「ファインマン物理学 III 電磁気学」、岩波書店

を読んだ。この本は物理学の本として優れているのは当然であるが、数学科の学生にとってもベクトル解析を学ぶ際の副読本として勧められる。
最近しみじみと感じていることだが、学ぶ (教える) 内容を絞ることは、一見楽になるようであるが、結局は理解するのをより困難にするのではないだろうか。

学部学生だった頃は、ベクトル解析に関する難しいことは次の本を参考にすることに決めていた。

1. 岩掘 長慶、ベクトル解析 — 力学の理解のために —、裳華房 (1960)

物理学に関わるベクトル解析は案外と面倒で難しいものであるが、この本はこれに真面目に取り組んでいる本である。

最近の学生は、案外と定評のある「古典」を知らないので、紹介しておく。

1. 高木 貞治、解析概論 (改訂第三版)、岩波書店、1983.
2. 寺沢 寛一、自然科学者のための数学概論 (増訂版)、岩波書店, 1983.
3. L. シュヴァルツ、解析学 1-7, 東京図書、1971.

1 は説明の必要のないほど高名な本であり、日本語による微積分の教科書を開くと必ずと言っていいほど絶賛されている。筆者もこの本で微積分を学んだ。しかし、筆者はこの本を解析概論の教科書に指定するつもりはない。この本は今ではやはり古典であって、副読本にはなっても、教科書にするには不足があると感じている。筆者が感じている問題点は

- この本の中で、積分論や関数論の章は読んでいて楽しいが、肝心の微分法のところは面白くないし、書き方が古い。
- 解説のための例は大変魅力的なものが多いが、もう少し解析的な例があっても良いのではないか。

少し脱線する。

私 (桂田) の持論だが、

> 「解析概論」には微分方程式の解説があってしかるべきだ。ルベーグ積分とか、外微分法とか、はたまた多様体入門とか、解析学の入門教程に押し込みたくなるものは多いが、それらカッコ良いものよりも、微分方程式論への入門の方がずっと大事である。

そもそも Newton の仕事の本当にすごいところは、微分積分学を (打ち立てただけではなくて) 使って、物理学の問題 (多くは微分方程式である) を解いて見せたところにある、と信じている。

(というわけで、現在、「解析概論」という名前の講義で、微分方程式抜きの話をしていることで、実はかなり居心地の悪い思いをしている。罪滅ぼしに、例の中では、微分方程式を色々と見せているわけだが、学ぶ側から見ると唐突な感じがするかもしれない。)

脱線ついでに、微分方程式の参考書を紹介しよう。

1. 笠原 晧司、微分方程式、朝倉書店
2. 俣野 博、微分方程式 I, II、岩波講座 応用数学、岩波書店
3. 高橋 陽一郎、微分方程式、東京大学出版会
4. 藤田 宏、応用数学、放送大学出版協会
5. アーノルド、古典力学の数学的方法、

1 は、数学科における常微分方程式論の標準的なテキストである。そつなく書かれていて、学習する際に手元に置いておくと便利であると思われる。(個人的には、あまりにも数学者のお勉強のための本という感じがして、段々詰まらなく感じるようになってきたが、ていねいに書かれた良い本であるのは確かである。)

2 は、I が常微分方程式論、II が偏微分方程入門である。偏微分方程式を無限次元力学系ととらえて、第一線で精力的に研究している著者の書いただけあって、スピリッツの感じられる本である。

3 もいい感覚の本である。この著者の常微分方程式の講義を私 (桂田) は受講したことがある。当時から「解の存在と一意性の話は大事な基礎であるが、それ以外のことも (が?) 大事だ。存在と一意性の証明は講義の最後に大急ぎで片付けることにして、まずは面白いことから始めよう」という主張をしていて、変わった先生だな、と感じた覚えがある。当時はそのスピリッツが十分に理解出来なかったが。

4 は、微分方程式で色々解析して見よう、という本である。万有引力の法則から、Kepler の三法則を導いてみせたりするなど、最近の解析系の研究者にとっては常識的な内容ばかりだが、このような形でまとまった本が他にあまりないのは、世の中奇妙に出来ていると思う。放送大学の教材なので、難度はあまり高くないので、独習も十分に可能であろう。

5 は現代の古典という感のある素晴らしい本である。解析のみならず幾何についても、大変な勉強をさせられる本だが、それに十二分に見合うだけのものを与えてくれる。自習するには若干難しいか?

閑話休題(ひまばなしはこれまで)。

1. 小平 邦彦、解析入門、岩波書店、 1991.

2. 溝畑 茂、数学解析 (上、下)、朝倉書店、 1976.

3. 一松 信、解析学序説、裳華房

4. 三村 征雄、大学演習 微分積分学、裳華房

5. 志賀 浩二、ベクトル解析 30 講、朝倉書店

6. シュヴァルツ、解析学 1〜7、東京図書