テイラー展開

桂田 祐史

2003 年 6 月 26 日

1 剰余項

$$f(x) \quad \text{と} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{は「近い」}.$$

このことを正確に述べるために両者の差

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を測ることにする。そのために名前 (記号) R_n をつけて、(n 次) **剰余項**と呼ぶことにする:

$$R_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

移項すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n.$$

実は R_n には (授業で習っただけでなく) 色々な「測り方」がある。しかし応用上最も大事なことは次の事実であろう。

剰余項の大きさは $O(x^n)$

f が C^n-級であるとき[a]、

$$R_n = O\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a)$$

この意味は、a の十分近くで、

$$|R_n| \le C|x-a|^n$$

となるような定数 C が存在するということである。

[a] f が C^n-級であるとは、f が n 回微分可能で、$f^{(n)}$ が連続であることを意味する。

2　テイラーの定理

a と x の間の c (つまり $a < c < x$ または $x < c < a$) が存在して、

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と表わされる。

この事実をまとめたものが、次のテイラーの定理である。

命題 2.1 (テイラーの定理) $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ が n 回微分可能であるとき、任意の $a, x \in I$, $x \neq a$ に対して、a と x の間の c が存在して、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

x のことを $a+h$ と書くことも多い。その場合は $x-a=h$ となる。

命題 2.2 (テイラーの定理) $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ が n 回微分可能であるとき、任意の $a, a+h \in I$ に対して、$0 < \theta < 1$ となる θ が存在して、

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n. \tag{2}$$

テイラーの定理で $n=1$ の場合は、平均値の定理に他ならない。

(1), (2) を、f の $\left\{\begin{array}{l} a \text{ の回りの} \\ x=a \text{ の回りの} \end{array}\right\}$ **テイラー展開**と呼ぶ。特に $a=0$ の場合、つまり

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \quad (c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間})$$

や

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (\theta \text{ は } 0 < \theta < 1 \text{ を満たす})$$

を f の**マクローリン展開**と呼ぶ。

3　テイラー級数

応用上多くの場合に (後で、複素関数論を学ぶと、「複素変数にして微分可能になる」[1]という簡潔な形の必要十分条件で表わすことができる)、

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

[1] このことを複素微分可能, 正則, 整型などと呼ぶ。

となる。つまり

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

このことを

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

あるいは文字を k から n に変えて

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で表わし、右辺の級数を f の**テイラー (級数) 展開** と呼ぶ。関数がテイラー級数展開できることを、その関数は「**解析的**である」と言うことがある。

特に $a=0$ の場合の

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を f の**マクローリン (級数) 展開**と呼ぶ。

個々の関数について $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ を確かめるために、次の補題がしばしば役に立つ。

補題 3.1 任意の正数 a に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

例えば $\left|f^{(n)}(a+\theta h)\right|$ が θ, n によらない定数 C で評価できれば、$a=|h|$ として使って、

$$|R_n|=\left|\frac{f^{(n)}(a+\theta x)}{n!}h^n\right|\le C\frac{|h|^n}{n!}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0.$$

4 テイラーの定理の証明

テイラーの定理を講義していると、c とか θ が何であるかという質問が頻出する (今年に限ったことではないが)。テイラーの定理は平均値の定理の一般化であって (だから平均値の定理にも c や θ が同様の仕方で登場する)、証明も平均値の定理の証明と同様に、ロールの定理が本質的に利用されている。このことは、平均値の定理の説明をした際にも注意した。(だから、学生は何回か話を聞いているはずで、このタイミングで質問が出るのは、本当はおかしいと思うのだが…)。そういうわけで、ここがピンと来ない人は、平均値の定理もおさらいしておくべきだと思う。

ここでは、(時間は切迫しているものの) テイラーの定理の証明を実行する。

既にテイラーの定理を書いてあるが、記号を少し変えた次の形の定理を証明する。

命題 4.1 (テイラーの定理) $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ が n 回微分可能であるとき、任意の $a, b \in I, a < b$ に対して、a と b の間の c が存在して、

(3) $$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

よく知られているテイラーの定理の証明には二種類あるが、(繰り返しになって少々くどいけれど) いずれも次のロールの定理を基礎としている。

命題 4.2 (ロールの定理) $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ は連続で、f は (a,b) で微分可能、$f(a) = f(b)$ とするとき、$a < c < b$, $f'(c) = 0$ を満たす c が存在する。

教科書では、コーシの平均値定理を介して証明しているが、ここではロールの定理を直接用いる証明を説明する。

$$g(x) = f(b) - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{\lambda}{n!}(b-x)^n\right]$$

とおく。定数 λ は $g(a) = 0$ となるような値を選ぶ。

$$g(a) = f(b) - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{\lambda}{n!}(b-a)^n\right]$$

であるから、つまりは

(4) $$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{\lambda}{n!}(b-a)^n.$$

が成り立つように選ぶわけである (これを λ についての方程式として解いた結果を書くことも出来るのが、それは後で直接役に立たないので省略する)。

さて (λ の値はおかまいなしに) $g(b) = 0$ がなりたつ。実際

$$g(b) = f(b) - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-b)^k + \frac{\lambda}{n!}(b-b)^n\right] = f(b) - f(b) = 0.$$

以上から、ロールの定理が適用できて、$g'(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在するが、

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}\cdot(b-x)^k + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot k(b-x)^{k-1}(-1)\right) + (-1)\cdot\frac{\lambda}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right] \\ &= f'(x) - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{\lambda}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right] \\ &= \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{\lambda}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} = (f^{(n)}(x) - \lambda)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

であるから、条件 $g'(c) = \lambda$ は

(5) $$\lambda = f^{(n)}(c).$$

に他ならない。

(4), (5) より

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \blacksquare$$

5 テイラーの定理の適用例

5.1 多項式

(本当は簡単だが、他と違って特別なのでとまどうかもしれない。)

$f(x)$ が x の m 次多項式であるとき、$n = m+1$ とすると、f は n 回微分可能で、

$$f^{(n)}(x) \equiv 0$$

なので、テイラーの定理の n 次剰余項 R_n は必ず 0 である。

ゆえに任意の a のまわりで

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

特に $a = 0$ の場合は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \blacksquare$$

5.2 指数関数 e^x

$f(x) = e^x$ のマクローリン展開を求めよう。

0 以上の任意の整数 n に対して、

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1 \tag{6}$$

である。

f は $\mathbf{R}$ 全体で無限回微分可能であるから、テイラーの定理より、任意の $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ に対して、$0 < \theta < 1$ なる θ で、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

を満たすものが存在する。(6) を代入すると、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}x^k + R_n, \quad R_n = \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n.$$

これから実は

$$|R_n| = \left|\frac{e^{\theta x}}{n!}\right| = \frac{e^{\theta x}|x|^n}{n!} \to 0 \quad (x \to 0)$$

であることが分かる (詳しいことは省略 — テストで要求しない) のでで、級数展開ができる:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots . \blacksquare \tag{7}$$

練習問題 a を 1 でない正定数とするとき、$f(x) = a^x$ をマクローリン展開せよ。

5.3 $\sqrt{x+1}$

$f(x) = \sqrt{x+1}$ をマクローリン展開せよ。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}, \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-3/2}, \\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x+1)^{-5/2}, \\
f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(x+1)^{-7/2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

であるから $n \geq 2$ に対して、

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(x+1)^{-(2n-1)/2}. \tag{8}$$

これから

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \frac{1}{2} & (n=1) \\ \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) & (n \geq 2). \end{cases} \tag{9}$$

f は $x > -1$ で無限回微分可能であるから、テイラーの定理より、任意の $n \in \mathbf{N}$, $x > -1$ に対して、$0 < \theta < 1$ なる θ で、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

を満たすものが存在する。(8), (9) を代入すると、

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{(-1) \cdot 1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 \\
&\quad + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)x^{n-1} + R_n,
\end{aligned}$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!}(\theta x + 1)^{-(2n-1)/2} x^n . \blacksquare$$

注目　n が自然数のとき、2 項定理より

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3} + \cdots$$

が成り立つが、この n に強引に $1/2$ を代入したものと良く似ている。2 項定理の一般化が成り立つことが示唆される。

5.4　対数関数 $\log(x+1)$

$f(x) = \log(x+1)$ のマクローリン展開を求めよう (これは本質的には $\log x$ の $x=1$ のまわりのテイラー展開と同等である)。

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(x+1)^{-2}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3}, \cdots$$

より

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} & (n \geq 1), \end{cases} \tag{10}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & (n \geq 1). \end{cases} \tag{11}$$

f は $x > -1$ で無限回微分可能であるから、テイラーの定理より、任意の $n \in \mathbf{N}$, $x > -1$ に対して、$0 < \theta < 1$ なる θ で、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

を満たすものが存在する。(10), (11) を代入すると、

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + R_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n} \cdot \frac{1}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(\theta x+1)^n}x^n.$$

$|x| < 1$ である任意の x に対して、$n \to \infty$ のとき R_n が 0 に収束することが証明できる (少々難しいが)、ゆえに $|x| < 1$ の範囲でマクローリン級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

が成り立つ。■

上で予告したことだが、

$$\log(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

の変数を変えて、

$$\log x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

5.5 双曲線関数 $\sinh x$

$f(x) = \sinh x$ のマクローリン展開を求めよう。

$$f'(x) = \cosh x, \quad f''(x) = \sinh x$$

より

(12) $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sinh x & (n \text{ が偶数, つまり } n = 0, 2, 4, \cdots) \\ \cosh x & (n \text{ が奇数, つまり } n = 1, 3, 5, \cdots), \end{cases}$$

(13) $$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数, つまり } n = 0, 2, 4, \cdots) \\ 1 & (n \text{ が奇数, つまり } n = 1, 3, 5, \cdots). \end{cases}$$

f は $\mathbf{R}$ 全体で無限回微分可能であるから、テイラーの定理より、任意の $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ に対して、$0 < \theta < 1$ なる θ で、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

を満たすものが存在する。

(12), (13) を代入して整理するのだが、例えば

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2j-1)!}x^{2j-1} \quad (2j-1 \text{ は } n-1 \text{ 以下の最大の奇数})$$

となるが、これは分かりにくいので、n の偶奇で場合分けして書くことにする。

(i) $n = 2j$ (j は自然数) のとき、$f^{(2j)}(x) = \sinh x$ だから、

$$R_n = R_{2j} = \frac{f^{(2j)}(\theta x)}{(2j)!} x^{2j} = \frac{\sinh \theta x}{(2j)!} x^{2j}.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + \frac{\sinh \theta x}{(2j)!} x^{2j}.$$

(ii) $n = 2j+1$ (j は自然数) のとき、$f^{(2j+1)}(x) = \cosh x$ だから、

$$R_n = R_{2j+1} = \frac{f^{(2j+1)}(\theta x)}{(2j+1)!} x^{2j+1} = \frac{\cosh \theta x}{(2j+1)!} x^{2j+1}.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + \frac{\cosh \theta x}{(2j+1)!} x^{2j+1}.$$

実は、任意の x に対して $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となることが証明できるので (詳しいことは省略)、テイラー級数展開

$$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

が成り立つ。■

練習問題　$f(x)=\cosh x$ をマクローリン展開せよ。

5.6　三角関数 $\sin x$

(実際に「答案」を書く立場のことを考えると、sin や cos にテイラーの定理を適用したときの剰余項を間違えずに書くのは、神経を使う必要があって、嫌味である。そういうわけで最後に持って来た。)

$f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよう。

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sin x & (n \text{ は } 4 \text{ で割り切れる})\\ \cos x & (n \text{ は } 4 \text{ で割って余り } 1)\\ -\sin x & (n \text{ は } 4 \text{ で割って余り } 2)\\ -\cos x & (n \text{ は } 4 \text{ で割って余り } 3)\end{cases} \tag{14}$$

であるから、

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n \text{ は } 4 \text{ で割り切れる})\\ 1 & (n \text{ は } 4 \text{ で割って余り } 1)\\ 0 & (n \text{ は } 4 \text{ で割って余り } 2)\\ -1 & (n \text{ は } 4 \text{ で割って余り } 3).\end{cases} \tag{15}$$

これを次のようにまとめておこう。

$$f^{(2j)}(x)=(-1)^j\sin x,\quad f^{(2j-1)}(x)=(-1)^{j-1}\cos x,$$

$$f^{(2j)}(0)=0,\quad f^{(2j-1)}(0)=(-1)^{j-1}.$$

f は $\mathbf{R}$ 全体で無限回微分可能であるから、テイラーの定理より、任意の $n\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{R}$ に対して、$0<\theta<1$ なる θ で、

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n,\quad R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

を満たすものが存在する。

これに (14), (15) を代入して整理するのだが、例えば

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{0}{0!}+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!}x^{2j-1}\quad (2j-1 \text{ は } n-1 \text{ 以下の最大の奇数})$$

となるが、これは分かりにくいので、n の偶奇で場合分けして書くことにする。

(i) $n=2j$ (j は自然数) のとき、$f^{(2j)}(x)=(-1)^j\sin x$ だから、

$$R_n=R_{2j}=\frac{f^{(2j)}(\theta x)}{(2j)!}x^{2j}=\frac{(-1)^j\sin\theta x}{(2j)!}x^{2j}.$$

ゆえに

$$f(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!}x^{2j-1}+\frac{(-1)^j\sin\theta x}{(2j)!}x^{2j}.$$

(ii) $n = 2j+1$ (j は自然数) のとき、$f^{(2j+1)}(x) = (-1)^j \cos x$ だから、

$$R_n = R_{2j+1} = \frac{f^{(2j+1)}(\theta x)}{(2j+1)!}x^{2j+1} = \frac{(-1)^j \cos\theta x}{(2j+1)!}x^{2j+1}.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!}x^{2j-1} + \frac{(-1)^j \cos\theta x}{(2j+1)!}x^{2j+1}.$$

ところで $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ より

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、マクローリン級数展開ができる。つまり

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}.\blacksquare$$

練習問題　$f(x) = \cos x$ をマクローリン展開せよ。

5.7 Arctan x

$f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ のマクローリン展開を求めよ。

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

であるが、この先、高階導関数の計算は簡単には行きそうもない (やってみると、頭を抱えることになる)。しかし、Leibniz の法則のところで計算したように、$f^{(n)}(0)$ は比較的簡単に求まる。復習すると、分母を払った

$$(x^2+1)f'(x) = 1$$

の両辺を n 回微分して

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(x^2+1\right)^{(k)} \left(f'(x)\right)^{(n-k)} = 0.$$

ここで

$$\left(x^2+1\right)^{(k)} = \begin{cases} x^2+1 & (k=0) \\ 2x & (k=1) \\ 2 & (k=2) \\ 0 & (k \geq 3) \end{cases}$$

に注意すると

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + n \cdot 2x \cdot f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x) = 0.$$

$x=0$ を代入すると

$$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0.$$

これから

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$$

という漸化式が得られる。まず $f(0)=0$ より、

$$f''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)=0,\cdots,f^{(2k)}(0)=0,\cdots.$$

つぎに $f'(0)=1$ より

$$\begin{aligned}
f'''(0) &= -2\cdot 1\cdot f^{(0)}(0)=-2\cdot 1,\\
f^{(5)}(0) &= -4\cdot 3\cdot f^{(3)}(0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\\
f^{(7)}(0) &= -6\cdot 5\cdot f^{(5)}(0)=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!.$$

これから f のマクローリン級数展開は

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

ただし残念ながら高階導関数 $f^{(n)}(x)$ が求まっていないため、n 次剰余項 R_n を評価することはできない (したがって、マクローリン級数展開が成り立つことを確かめるには、何か別の方法が必要になる — 複素関数論を用いると、あっけないくらい簡単であるが)。

あるいは、この時点では習っていない事項を二三用いると、次のようにしてマクローリン展開が求まる。

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

より、

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=0+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

6　テイラーの定理の応用

テイラーの定理は基礎的で、応用範囲は非常に広いが、手短にありがたみのわかる応用例を二三あげてみる。

6.1 超越関数の値の計算

指数関数、三角関数、対数関数がらみの数値も、テイラーの定理で単純な四則演算で計算できることがある。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

より

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

最初の 10 項で $2.7182815\cdots$ (誤差 3×10^{-7} 程度), 最初の 20 項で $2.71828182845904523 49\cdots$ (誤差 4.3×10^{-19} 程度) となる。

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

に $x=1$ を代入すると

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

ゆえに

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

ただし、この式は面白いが、収束が遅くて円周率の計算法としては役に立たない。

6.2 不定形の極限

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ より

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} - O(x^2)\right) = \frac{1}{2}.$$

$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = x + O(x^2)$ より

$$\lim_{x\to 0} \log(x+1)^{1/x} \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} (1 + O(x)) = 1.$$

A テイラーの定理の別証明

(準備中)

B　多項式のテイラー展開

例題 B.1 $f(x)$ を x の m 次多項式とするとき、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

となることを示せ。

テイラーの定理を使えば以下のように証明できる。まず f は $m+1$ 回微分可能であるから、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{m+1}$$

であるが、$f^{(m+1)} \equiv 0$ より $R_{m+1} = 0$ で、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

ここでは素朴に証明する。まず

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k$$

と書けることに注意する。

C　積分による剰余項表示

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

であるが、部分積分すると

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= [(t-x)f'(t)]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt \\ &= f'(a)(x-a) - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f'(a)(x-a) - \left(\left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt \right) \\ &= f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt. \end{aligned}$$

これを続けて

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + (-1)^{n-1} \int_a^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

であることがわかる (厳密には数学的帰納法で証明する)。