2014 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2014 年 6 月 26 日 2 限施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。
(1)「p ならば q」の否定は、「p であるが q でない」である。　(2) $\sqrt{3}$ は、実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属する。　(3) 写像 f による a の像は b である。　(4) A と B の合併集合 (和集合) は、A を含む。　(5) x が A と B の共通部分の要素であるためには、x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。　(6) $\tan x = 1$ を満たす x が $0 < x < \pi/2$ の範囲に存在する。
　(状況を説明しておくと、(1) で p と q は命題, (3) で f は写像 $f\colon A \to B$ であり $a \in A$ かつ $b \in B$, (4) と (5) では A と B は集合であり x は全体集合の要素)

2.　真である命題はそれを証明し、偽である命題はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 書いて証明せよ。
　(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y > x$　(2) $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ y > x$

3.　次の命題の否定命題を書け (ただし Ω は $\mathbb{R}$ の部分集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ とする)。
　$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall a \in \Omega)\ (\forall x \in \Omega\colon |x-a| < \delta)\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

4.　(1) 真理値表を用いて分配法則 $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を証明せよ。
(2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を証明せよ。
(3) $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ と (2) を利用して、連立方程式 $\begin{cases} x(x^2+4y+y^2) = 0 \\ (y+2)(y+x^2) = 0 \end{cases}$ を解け。

5.　(1) 以下の言葉の定義を述べよ ((b)〜(e) は二つの集合に関するものを答えよ)。
(a) 部分集合　(b) 和集合　(c) 共通部分　(d) 差集合　(e) 直積集合　(f) ベキ集合
(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ とするとき、$A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, 2^A, $A \setminus B$ を外延的に (つまり要素をすべて書き並べる方法で) 表せ。

6.　(1) 集合族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の和集合 $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。
(2) 任意の集合族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$ が成り立つことを証明せよ。
(3) $\displaystyle A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} < x < 2n\right\}$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ。

7.　(1) 写像 $f\colon X \to Y$ が (a) 全射であること、(b) 単射であること、それぞれどういう意味か説明せよ (定義の条件を書け)。　(2) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ とするとき、X から Y への全単射をすべて求めよ。　(3) $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加であれば f は単射であることを示せ。
(4) $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の (a), (b) を証明せよ。(a) f と g が全射であれば $g \circ f$ も全射である。(b) $g \circ f$ が全射であれば g も全射である。

8.　授業で説明したように、高校数学では暗黙のルールで関数の定義域を定める。そのルールを採用するとき、次の関数の定義域 X と値域 $f(X)$ は何か (集合の形で答えよ)。
(1) $f(x) = \log x$　(2) $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

2014 年 7 月 4 日販

一般的な注意

- 点が高くても油断しない。低くてもあきらめない。
- 中間試験は「模擬試験代わり」の性格がある。得点自体も気になるだろうけれど、自分の理解を正すべきところはないかの確認、弱点の発見のために活用してほしい。
- 記号・用語の定義を覚えていることが、数学的議論 (例えば証明) をするためのスタート・ラインに立つための資格である。試験で証明問題が出た場合、定義が書けないようであれば、その問題は捨てるしかないと覚悟すること。
- 証明すべきことを論理式で書いてみるのが役に立つ場合が少なくない。簡単な命題の証明は (この講義で証明をしてもらう定理は簡単なものが多い)、どう書けば良いか、ある程度その論理式を見れば分かる。

記号についての注意

- カンマ , が適切に使えない人が少なくない。ものを区切るのに空白を使うことは滅多になくて (例外は行列)、ほとんどの場合、カンマで区切る。だから a と b と c からなる集合は $\{a,b,c\}$ と書き、$\{a\ bc\}$ でも $\{a,b,c,\}$ でもない。(a, b, c が集合だったりする場合、こういう答案が結構あった。)
- 中括弧 $\{\}$ には注意が必要である。これは集合を記述するための特殊な記号と考えること (演算の結合を優先するためのカッコとして使わないことにすべきかも)。条件を書くべきところで集合を書いてしまっている人が複数いた。
- 記号や用語の使い方は、学校数学では文部科学省の決めたルールという絶対尺度があった。大学では、テキストや講義によって、ルールが異なることが多い。自分が本を読むときは幅広く受け入れる一方、書く時はそのとき決められたルール (自分が決める場合もある) にきちんと従って首尾一貫した書き方をする、という姿勢を持つことを勧める。

1. (1) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$ (2) $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (3) $f(a) = b$ (または $f\colon a \mapsto b$) (4) $A \cup B \supset A$ (5) $x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B)$ (6) $(\exists x)(0 < x < \pi/2) \wedge (\tan x = 1)$ あるいは $(\exists x : 0 < x < \pi/2)\ \tan x = 1$ あるいは $(\exists x \in (0, \pi/2))\ \tan x = 1$

解説 あまり出来が良くない。授業の中で良く出て来るもの、良く出てこないものがあり、後者の出来はどうしても低くなるけれど、そこは頑張って下さい。

(1) 命題について $=$ を使わないテキストが多く、授業でも $\equiv$ で通したつもりだけど、何故か $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge (\neg q)$ とした人が多い。「ならば ($\Rightarrow$)」は**非常に**重要なので、$p \Rightarrow q$ が $\neg p \vee q$ と同値であること、真理値表が書けること、否定が $p \wedge (\neg q)$ であることを計算で示せること、きちんと出来るようにしておこう。

(2) $\in$ が使えない人が結構いた。$\subset$ にしたり、$=$ にしたり (ちょっと驚いた)。$\mathbb{Q}$ を Q と書いてしまう人もちらほら ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はみな太字)。$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ と書いてしまった人もいた。$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ と書く人は今年は少なかった (差集合を $-$ で表すテキストは少なくない [1])。

[1] 和集合、積集合は $+$, $\times$ でなく $\cup$, $\cap$ なので、差集合に $-$ を使うのは、(個人的に) 気が進まない。

(3) $f\colon a \to b$ と書いた人が多かったが、要素の対応は $f\colon a \mapsto b$ と $\mapsto$ を用いるのが普通である。$f\colon A \to B$ (f は集合 A から集合 B への写像) との違いに注意すること。

(4) $\supset$ を $\ni$ と書いたり, $\subset$ を $\in$ と書くのは定番の間違い (今年は少なめだった)。$A \subset A \cup B$ とした人も多いが、それでも正解とした。(欧米人は、式は読むもの、読む時は式の順番に読む、と考えていて、それに従うと $X \subset Y$ は「X は Y に含まれる」, $X \supset Y$ は「X はY を含む」)

(6) : を | と書いたり、集合の記号と混同しているような人がいた。縦棒 | は、この講義では集合の内包的表現 $\{x \mid P(x)\}$ (条件 $P(x)$ を満たす x 全体の集合) でしか使っていない (それを $\{x : P(x)\}$ や $\{x; P(x)\}$ と書く本も多くてややこしい)。

2.

(1) 真である。(証明) x を任意の実数とするとき、$y := x + 1$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ かつ $y > x$ が成り立つ。■ (これで $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y > x$ が示せていることを理解しよう。)

(2) 偽である。否定命題は $(\forall y \in \mathbb{R})\ (\exists x \in \mathbb{R})\ y \leq x$ である。(証明) y を任意の実数とする時、$x := x + 1$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \leq x$ が成り立つ。(まあ、$x := y$ でも良いわけである。(1) と良く似ていて、(1) より弱い主張なので、「(1) から真である」と書いた人がいたが、それも正解とした。

解説 宿題でやったので、そこそこ出来ている人が多かった。(宿題と違って, (2) の否定命題も証明することを求めてあるけれど、無視した人が多かった。) この機会に完璧にマスターしよう。この手の量称 (∀, ∃) を含む命題の証明を書くためのヒント。

- その先頭が $(\forall x \in \mathbb{R})$ ならば「任意の実数 x に対して」、「x を任意の実数とする。」、その省略形「x を実数とする」が証明の定番の書き出し。諸君達の解答で最初に「$y = x + 1$ とすると」としてあるのが結構あったが、x の紹介をやらないでそう始めるのは本当はおかしい。

- $(\exists y ...)$ とあったら、y は何か尋ねられていると考えて、その答をなるべく具体的に求めるように努力すべきである。当然答は x によるわけで、今の場合は $y = x + 1$ で良いわけだが、「$y = x + z$ $(z > 0)$」のように書いた人もいた。これは良くない。「その z は何?どう選べば良いのか?そもそもその条件を満たす z は存在することは確かなの?」とツッコミが入る。書いた本人は $z > 0$ であれば何でも良いつもり、正数が存在することは当たり前のつもりで書いたのだろうけれど。

3. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall a \in \Omega)\ (\forall x \in \Omega\colon |x - a| < \delta)\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ の否定は

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \delta > 0)\ (\exists a \in \Omega)\ (\exists x \in \Omega\colon |x - a| < \delta)\ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

解説 これも宿題そのままですね (出来なかった人は勉強態度も反省すること)。
量称 ∀, ∃ を含む命題の否定を作るには、

(i) ∀ は ∃ に置き換える

(ii) ∃ は ∀ に置き換える、

(iii) 「最後の」条件を否定する (量称の中の付帯条件は否定しない)

をすれば良い。その根拠は、一般に $\neg((\forall x)P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$ と $\neg((\exists x)P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$ が成り立つことにある。

4. (1) 真理値表は

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\wedge r$	$p\wedge r$	$q\wedge r$	$(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

となり、$(p\vee q)\wedge r$ と $(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ の真理値がすべて一致するので、$(p\vee q)\wedge r\equiv(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$.
(2) (1) と交換律から $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ も成り立つので、

$$\begin{aligned}(p\vee q)\wedge(r\vee s)&\equiv((p\vee q)\wedge r)\vee((p\vee q)\wedge s)\\&\equiv((p\wedge r)\vee(q\wedge r))\vee((p\wedge s)\vee(q\wedge s))\\&\equiv(p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge s)\vee(q\wedge s).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\begin{cases}x(x^2+4y+y^2)=0\\(y+2)(y+x^2)=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow x(x^2+4y+y^2)=0\wedge(y+2)(y+x^2)=0\\&\Leftrightarrow(x=0\vee x^2+4y+y^2=0)\wedge(y+2=0\vee y+x^2=0)\\&\Leftrightarrow(x=0\wedge y+2=0)\vee(x=0\wedge y+x^2=0)\vee(x^2+4y+y^2=0\wedge y+2=0)\\&\quad\vee(x^2+4y+y^2=0\wedge y+x^2=0)\\&\Leftrightarrow(x,y)=(0,-2)\vee(x,y)=(0,0)\vee((x,y)=(2,-2)\vee(x,y)=(-2,-2))\\&\quad\vee((x,y)=(0,0)\vee(x,y)=(\sqrt{3},-3)\vee(x,y)=(-\sqrt{3},-3))\\&\Leftrightarrow(x,y)=(0,0),(0,-2),(2,-2),(-2,-2),(\sqrt{3},-3),(-\sqrt{3},-3).\blacksquare\end{aligned}$$

解説　(1) の真理値表で p, q, r の真理値の順番が「自分ルール」の人がいて読むのが大変でした。頭の中の樹形図に基づく「辞書式順序」を使うことを推奨します (コンピューターのプログラムで普通に真理値表を作ればそうなるわけだが、そういうのやってないのかな)。

(2) で真理値表を書いた人がいたけれど…真理値表はいわば必要悪で、$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ などの意味を確認したり、基本的な法則の証明に使った後は、なるべく使うのをやめたいわけです (後は基本的な法則を使って同値変形で済ませたい)。$2^4=16$ 行の真理値表なんて書くのも読むのもしたくない。宿題でやったはずなんですけど。

5. (1) (a)〜(e) では、A と B を集合とする。(a) A が B の部分集合であるとは、$(\forall x)\ x\in A\Rightarrow x\in B$ が成り立つことをいう。(b) $A\cup B:=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$ を A と B の和集合と呼ぶ。(c) $A\cap B:=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$ を A と B の共通部分と呼ぶ。(d) $A\setminus B:=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$ を A と B の差集合と呼ぶ。(e) $A\times B:=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$ を A と B の直積集合と呼ぶ。ここで (x,y) は x と y の順序対を表す。(f) A を集合とするとき、A の部分集合の全体 $2^A:=\{X\mid X\subset A\}$ を A のべき集合と呼ぶ。

(2)

$$
\begin{aligned}
&A \cap B = \{1,2\}, \quad A \cup B = \{0,1,2,3\}, \\
&A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}, \\
&2^A = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}, \\
&A \setminus B = \{3\}.
\end{aligned}
$$

解説

- この問題は満点を取って欲しい。22 点満点だが、18 点、16 点で「大体出来た」と思わないこと。

- (1) では (a) の部分集合だけ、他と違って一つに定まらないもので、二つの集合の「関係」を述べたものなので、書き方が他とかなり違う。たとえ話をすると演算の結果 (和とか積とか) と、大小関係の違い。…そのせいか、ここだけ間違えて 20 点という人が多い。

- 授業では

  「A, B を集合とするとき、$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の和集合と呼び、$A \cup B$ で表す。」

  のように書いた (つもり)。もちろんこう書いてくれれば問題ない。最後の「$A \cup B$ で表す」は書いても書かなくても良い。式を使わずに

  「A, B を集合とするとき、A と B の少なくとも一方に属するもの全体の集合を A と B の和集合と呼び、$A \cup B$ で表す。」

  としても良い。式を使う方が楽だし (特に複雑なものの定義を述べる場合)、曖昧さが発生する余地が少ないので、式を使うのがお勧めである。

  試験の場合の答案の書き方の注意を二三述べる。「集合 A, B の和集合の定義を述べよ」という問題だったら、単に

  $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ 　(これを答として良い場合と不適当な場合がある)

  と書けば良いが、この問題では単に「和集合の定義を述べよ」としてあるので、自分で「A, B を集合とするとき」を書く必要がある。また何を和集合というのか分かるようにすべきである。

  「A, B を集合とするとき、$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ <u>を A と B の和集合と呼ぶ</u>。」

  のようにする必要がある。

- 和集合を表す記号を書くことは要求しなかったので,「$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の和集合という。」でも正解としたが、記号だけしか書いていない「$A \cup B$ を A と B の和集合という。」は不正解とした。

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) 任意の x に対して

$$x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \Leftrightarrow \neg\left(x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \Leftrightarrow \neg\left((\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\right) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n^c$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n^c)$$

が成り立つので、$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n^c)$.

(3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 2\}$. (証明は省略 — よく似た $A_n = (-1/n, n)$ の場合を、授業中の説明と、配布したプリントで証明してある。後で引っ張り出して WWW に載せます。)

解説

- 問題のテーマは、集合族の和集合・共通部分と、集合が等しいことの証明である。
- イメージとしては、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ であるが (しっぽの $\cup \cdots$ のない人が多かったけど、$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ と混同している？)、“$\cdots$” があっては定義にならない。何か証明するには定義が必要になる。
- 集合が等しいことの証明。$A = B$ を証明するには、大きく分けて二つの方法がある。

  (a) $(\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$ を示す。

  (b) $(\forall x \in A) x \in B$ と $(\forall x \in B) x \in A$ を示す。

  (2) では (a) のやり方を用いることが出来る (一気に出来て便利)。(3) では (b) のやり方が必要になるだろう。
- 個人的には、量称の否定のルールはド・モルガン律である、と言って良いと思っている。イメージとしては

$$(\forall n \in \mathbb{N}) P(n) \quad \Leftrightarrow \quad P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n) \wedge \cdots .$$

  「両辺」を否定すると

$$(\exists n \in \mathbb{N}) \neg P(n) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg P(1)) \vee (\neg P(2)) \vee \cdots \vee (\neg P(n)) \vee \cdots .$$

7.

(1) (a) $(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ f(x) = y$ (b) $(\forall x \in X)\ (\forall x' \in X)\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

(2) 次のようにして定まる $f_1 \sim f_6$ が X から Y への全単射である (要するに 4, 5, 6 の順列をすべて書け、ということになるわけ)。

f	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
f_1	4	5	6
f_2	4	6	5
f_3	5	4	6
f_4	5	6	4
f_5	6	4	5
f_6	6	5	4

(3) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加とする。すなわち

$$(\forall x_1 \in [a,b])(\forall x_2 \in [a,b]) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

が成り立つと仮定する。$x, x' \in [a,b]$, $x \neq x'$ とする。$x < x'$ または $x > x'$ が成り立つ。

- $x < x'$ ならば、$x_1 := x$, $x_2 := x'$ として $f(x) < f(x')$ が導かれる。ゆえに $f(x) \neq f(x')$
- $x > x'$ ならば、$x_1 := x'$, $x_2 := x$ として $f(x') < f(x)$ が導かれる。ゆえに $f(x) \neq f(x')$.

いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$ であるから、f は単射である。

(4) (a) f と g は全射と仮定する。z を Z の任意の要素とする。g が全射であるから、$g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。それを一つ選ぶ。f が全射であるから $(\exists x \in X)\ f(x) = y$. このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. ゆえに $g \circ f$ は全射である。

(b) $g \circ f$ は全射と仮定する。z を Z の任意の要素とする。$g \circ f$ が全射であるから、$g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。それを一つ選ぶ。$y := f(x)$ とおくとき、$y \in Y$ かつ $g(y) = z$ である。実際、$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$. ゆえに g が全射である。 ■

解説 出来ない人が多かったが、習ったばかりだから仕方ないとは思っている。

- (1) (b) で $\Rightarrow$ でなく $\wedge$ や $\Leftrightarrow$ があった。
- (2) は書きにくいかも。答案で

  $$\{4,5,6\}, \{4,6,5\}, \{5,4,6\}, \{5,6,4\}, \{6,4,5\}, \{6,5,4\}$$

  というのがあったが、断りなく $\{\}$ を使うと集合になってしまうので、これらはすべて $\{4,5,6\}$ と等しくなってしまう。$\{\}$ の代わりに $()$ を使うのだろう。例えば

  $$(f(1), f(2), f(3)) = (4,5,6), (4,6,5), (5,4,6), (5,6,4), (6,4,5), (6,5,4) \text{ で定まる 6 個の } f$$

  とする。

  $$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f(2) = 5 \\ f(3) = 6 \end{cases}, \begin{cases} f(1) = 4 \\ f(2) = 6 \\ f(3) = 5 \end{cases}, \begin{cases} f(1) = 5 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 6 \end{cases}, \begin{cases} f(1) = 5 \\ f(2) = 6 \\ f(3) = 4 \end{cases}, \begin{cases} f(1) = 6 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 5 \end{cases}, \begin{cases} f(1) = 6 \\ f(2) = 5 \\ f(3) = 4 \end{cases} \quad \text{となる } f$$

  と書いた人がいた (なるほど)。

- (4) について。例えば $g \circ f\colon X \to Z$ が全射であることを証明する場合、結論の条件を論理式で書いたとき、先頭は $(\forall z \in Z)$ であるから、証明の書き出しは「z を Z の任意の要素とする」となる。
- この問題は全射を重点的に取り上げたが、単射でも出来るようにしておくこと。(こういうことは言われなくても自発的にそうするべきなのだけど、やらない人が少なくないので、あえて言っておく。)

8. (1) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $f(X) = \mathbb{R}$ (2) $f(x)$ の分母が 0 になるところは定義域から除外するので、分母を調べよう。$g(x) := x^2 - 2x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$ とおくと、$g(x) = (x-3)(x+1) = (x-1)^2 - 4$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3)$, $g(\mathbb{R}) = [-4, \infty)$. これから $X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$, $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \cup \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{1}{4}\right\}$. (最後のは $f(X) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \vee y \leq -\frac{1}{4}\right\}$ と書いても良い。)

解説

- 値域を Y と書いた人がいたけれど、値域は $f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$ (省略形は $\{f(x) \mid x \in X\}$) であって、Y ではない (一致するときもあるが、それは f が全射の場合)。

- $\{f(x) \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ と書いた人が多かった。宿題の解説でそれは駄目と説明したはず。そういう書き方はない (x は何でしょう？)。$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$ か、単に $\mathbb{R}$ と書くべきである。

- $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ は $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \land x \neq 3\}$ とも、$(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$ とも書ける。$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, 3\}$ でもいいかな。$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \lor x \neq 3\}$ と間違えた人がいたので、, でなく明確に $\land$ とする方が良いのかもしれないが。$x = -1, 3$ だと $x = -1 \lor x = 3$ だし、省略記法は難しい。$x \neq -1, 3$ は $\neg(x = -1, 3)$ ということなのでしょう。