数理リテラシー 第1回

〜 ガイダンス, 論理 (第1回) 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020 年 5 月 13 日

自己紹介

- 名前: 桂田 祐史 (かつらだ まさし)
- 研究テーマ: 数値計算法の数理 (数値計算の方法を数学的に解析する)
- メールアドレス: `katurada` あっとまーく `meiji.ac.jp`
- 研究室: 910 号室 (平日毎日来ていた…早くそれに戻れますように)
- 講義の WWW サイト:
  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/`
- いつもは「気軽に質問に来よう」と言うことにしてあるけれど…

  今学期は、試しに授業時間後半 (水曜 16:10〜17:00) に Zoom 会議を開いてみます。宿題やアンケート回答中に質問を書いてもらっても良いです。

ガイダンス (1) 数理リテラシー[1] とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力

具体的には、**論理**、**集合**、**写像**という、現代数学を記述するための言語

(写像というのは、関数を一般化したもの。)

なぜそれが大事か?

私なりの答え

高校では「公式主役の数学」をしていたが、大学では「定理が主役の数学」をする。定理は命題であり、それを記述するための言葉・文法があり、それを用いて読み書きが出来る必要がある。

言葉というと、伝達手段のようだが、実は、言葉は思考のための必須の道具でもある。

[1] literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

ガイダンス (2) 割とわかりにくいので補足

シラバスで参考書にあげた

新井紀子, 数学は言葉 — *math stories*, 東京図書 *(2009)*

は、そのあたりのことを上手に説明している (と思う)。

新井先生は次の文章も書いている。

- 『「数学は言葉」の対象は？』
  https://web.archive.org/web/20150916080120/http://researchmap.jp/jo8s7ljcd-78/
  「言語教育の方法論で数学を教える」という言葉が印象的
- 「数学の言葉への脱皮」
  https://tanemaki.iwanami.co.jp/posts/1360
  (脱皮はとても難しいけれど大事、がんばろう、という話)

ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

(例年のやり方をもじってやるつもりだけど、多分試行錯誤)

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。
- 出席を取る…代わりにアンケートに答えてもらう。
(ちなみに大学の原則「2/3 以上出席が期末試験受験の必要条件」)
- ほぼ毎回宿題を出す (授業中に演習時間は取れないので)。
締め切りは翌週月曜 13:30
添削して返却する。
提出したかどうか得点化する。
心構え 1　自分で解く。相談しても質問しても良いけれど、最後は自力。「写すな頭を通せ。」
心構え 2　添削されたものを読んで理解する (そのための 2 クラス制)。
- 例年、中間試験をしているが、今年度は無理と考えて計画していない。

ガイダンス (4) 自習についてアドバイス

- 予習・復習が有益。1 週間授業 1 コマだけで理解するのは困難。講義ノートがあるので予習はしやすいが、どちらかと言うと復習を勧める。
- 復習は、自分で取ったノート、講義資料、教科書、講義ノートなどを**きちんと読む**のが基本。

  読みながら (あるいは講義を聴きながら)「この言葉・記号は何だったけ？」「これはなぜ？」と自問自答する習慣をつけよう。

  あら筋をまとめたり、人に説明するのも効果がある。
- 小学校以来、練習問題 (ドリル) を解くことで勉強する、と言うやり方に慣れているだろうが、大学ではそれがあまり有効でない。
  (科目によっては、手頃な練習問題がなかったりする。1,2 年生のうちはまだ結構あるけれど、段々減っていく。計算問題 1 つを解くのに 1 時間かかったりするようになるので、数をこなして覚えるやり方は限界がある。)

ガイダンス (5) 授業の受け方について (雑談)

今学期は、少なくとも前半 (Q1) はオンライン授業であることが確定している。

この講義は、例年、教師 (桂田が) 黒板に板書して、学生はそれをノートに写すのが授業時間の大半を占める、という伝統的なスタイルでやってきた。

古めかしいという意見もありうるけれど、数理リテラシーにはむしろ向いている面もある、と考えている。(もしこの人数でも Zoom がちゃんと動くなら、オンラインでそれをやろう、と考えている。)

英会話のレッスンでは、先生が喋ったことの真似をする ("please repeat after me") という練習の比重が案外と大きい。

数理リテラシーにも似たような面がある。

- スライド資料の主な部分をノートに写す。
- 最低限、言葉や記号の定義や定理 (今日はない) などは自分の手で書く。

では講義に入る

数理リテラシーの内容は、大きく分けて次の 3 つのパートからなる。

I. 論理
II. 集合
III. 写像

(これ以外に IV. 同値関係 というのも補講で用意する。)

パートI. 論理

- 「論理」は次の2つからなる。
  1. 命題論理
     1. 命題とその真偽
     2. 「でない」(否定, $\neg$)
     3. 「かつ」(論理積, $\wedge$)
     4. 「または」(論理和, $\vee$)
     5. $\cdots$
  2. 述語論理
     (そのときになったら説明)

1.1 命題とその真偽

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example

$1+1=2$	正しい
円周率は有理数である。	正しくない
$\sin 1$ は 1 より大きい	正しくない

— 以上はいずれも命題

10 億は大きい	どうだろう？

— これは命題ではない！

真 (true), 偽 (false), 真理値

命題のことを $p, q, r, \cdots, p_1, p_2, \cdots$ のような記号で表す。

ある命題 p が正しいことを

p は**真** (true) である
p は成立する (成り立つ)
p の真理値は T である
p の真理値は 1 である
のように表す。

ある命題 p が正しくないことを

p は**偽**(ぎ) (false) である
p は成立しない (成り立たない)
p の真理値は F である
p の真理値は 0 である
のように表す。

(false [fɔ́ːls], 「フォールス」)

Example

p_1　$1+1=2$
p_2　円周率は有理数である
p_3　$e > 2.7$ (e は自然対数の底)
p_4　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

の真理値はそれぞれ T, F, T, T である。

命題が真であることを論理的に示すことを「**証明する** (to prove)」という。その論述を**証明** (proof) と呼ぶ。

余談1 証明のルーツ 古代ギリシャ

- キオスのヒポクラテス (B.C. 450—420)
  初めての証明？
- アレクサンドリアのエウクレイデス (B.C. 3C?, ユークリッド)
  「原論 (ストケイア)」

ギリシャ数学は、ヨーロッパでは一度忘れられて、ルネッサンスにアラビア世界から里帰りする。

余談 2 命題の呼び方の慣習

- 論理学では「正しい命題を定理 (theorem) という。」
- しかし数学の多くのテキスト、講義では、正しい命題以外書かないことが多く、次のように呼び分ける。

定理	大事なもの
補助定理, 補題 (lemma)	定理の証明用のもの
系 (corollay)	定理からすぐ分かる (導かれる) もの
命題 (proposition)	重要性が低いもの

1.2 「でない」(否定, negation)

命題 p について「p でない」は命題である。これを p の**否定**と呼び、$\neg p$ で表す。

「p でない」, "not p" と読む。

(高校では $\bar{p}$ と書いたかもしれない。どう書いてあっても読めた方が良いが、書くときは統一しよう。)

この講義では、$\neg p$ と書く。

Example

p が $1+1=2$ であるとき、$\neg p$ は $1+1\neq 2$.
q が $\sqrt{10}>\pi$ であるとき、$\neg q$ は $\sqrt{10}\leq\pi$.

否定の真理値, 真理値表

任意の命題 p について
p の真理値が T であれば、$\neg p$ の真理値は F
p の真理値が F であれば、$\neg p$ の真理値は T

このことを次のように表す。

p	$\neg p$
T	F
F	T

行ごとに読むことに注意

このような表を**真理値表**と呼ぶ。

排中律と無矛盾律

暗黙のうちに次を仮定している。

排中律（はいちゅうりつ） 「任意の命題 p について、p または $\neg p$ の少なくとも一方が成り立つ。」
どちらでもない、という中間の状態がない。

(無)矛盾律（むじゅんりつ） 「任意の命題 p について、p と $\neg p$ が同時に成り立つことはない。」

排中律も無矛盾律も認める！

- 無矛盾律が成り立たない、つまり p と $\neg p$ が同時に成り立つような命題 p が 1 つでも存在すると、すべての命題 p について、p と $\neg p$ が成り立つことが証明できる。
  その場合、例えば $1+1=3,\ 1+1\neq 3$ のどちらも真となる。ムチャクチャになる。
- 一方、排中律はやや微妙である。
  1 つの命題 p について、p も $\neg p$ もまだ証明できていない、ということはたくさんある。
  いつかは出来る？出来なくても、どちらかは成り立つと信じる??
- 我々は、以下では無矛盾律も排中律も認めて議論する。
  (このあたり、深い話があるが、そこには首を突っ込まないことにする。)

1.3 「かつ」 (論理積, 連言, logical conjunction)

2 つの命題 p と q について

「p が成り立つ、かつ q が成り立つ」 (p と q 両方とも成り立つ)

は命題である。

これを $p \wedge q$ で表し、「p かつ q」,「p and q」と読む。

Example

$\frac{1}{20}$ は有理数であり、かつ π は無理数である。

$2.7 < e \wedge e < 2.8$ (普通 $2.7 < e < 2.8$ と書くだろうけれど).

注意「そして」,「しかし」はどちらも「かつ」と同じ。事実としてそれぞれ成り立つか成り立たないかが問題で、順接も逆接も関係ない。

$p \wedge q$ の真理値表

$p \wedge q$ の真理値は、p と q の真理値がともに T であるとき T, そうでないとき F と約束する。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

真理値表の書き方についての注意

- 行の書き順は、辞書引き順序のような適当な順番を選ぶこと。樹形図を描いたと考えるのも良い。
- 罫線をもっと引きたくなるかもしれない。その場合

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

のように第2列と第3列の間を $\|$ にしたりして、第1,2列と、第3列は違うことを示すのを勧める。例えば最初の行

$$\mathrm{T} \mid \mathrm{T} \parallel \mathrm{T}$$

は、「p が T かつ q が T **のとき**、$p \wedge q$ は T である」ということを言っている。

1.4 「または」(論理和, 選言, or, logical disjunction, $\vee$)

2つの命題 p と q について

「p であるか、または q である」　(p と q の少なくとも一方が成り立つ)

は命題である。
これを $p \vee q$ で表し、「p または q」,「p or q」と読む。

$p \vee q$ の真理値は、次のように約束する。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(このスライドは、5/13 に解説していません。)

連絡事項

「お知らせ」に書いたことだけれど。

- 今日の講義に用いたスライド資料は、授業 WWW サイト

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2020/`

  に載せてあります。この URL は Oh-o! Meiji のお知らせにも書いてあります。そちらからリンクをたどるのが便利かもしれません。
- 今日は初回なので宿題はありません。
- 宿題がない代わりにアンケートに答えて下さい (Oh-o! Meiji にアクセスする)。アンケート回答締め切りは、5 月 13 日 23:59 とします。(初回なので遅れてもペナルティーはなしです。)
- 質問はアンケートの中に書けます。
- 本日 (5/13) 16:10〜17:00 に Zoom 会議を開いて、質問受け付けをします。参加するための情報は Oh-o! Meiji のお知らせの中に書いてあります。

  (この資料は一般公開してあるので、ミーティングに参加するための情報は載せられません。)