数理リテラシー 第3回

～ 論理 (3) ～

桂田 祐史

2020 年 5 月 27 日

連絡事項＆本日の内容

- S2 もオンライン授業になり、対面形式の期末試験は実施しないことが決定した。成績評価の方法を変更する。5 月 31 日までに「シラバスの補足」に記述する。
- 本日の授業内容
  - I. 1 章「命題論理」を終え、I. 2 章「述語論理」に入る。
  - 宿題 1 は既に 9 割の人が提出している (5/26 17:00 時点)。(思っていたよりも高率で安堵。でも例年よりは少し低い。)
    問 1 の解説は次回に回すので、未提出な人はこれからでもぜひ提出して下さい。
- 今後は宿題を出すときはアンケートを行わないことにする。講義動画を視聴しているかどうかは確認できるので。
  質問は (i) メール、(ii) 宿題に書く、(iii) 水曜 16:10〜17:00 に Zoom で質問、のいずれかを使って質問して下さい。

宿題 1 の解説

来週に回します。

1.8 「ならば」 ($\Rightarrow$)

($\neg$, $\wedge$, $\vee$ 以外の新しい演算 $\Rightarrow$ の紹介)

命題 p, q に対して、新しい命題を表す記号 $p \Rightarrow q$ を導入する。

読み方は「p ならば q (が成り立つ)」, "If p, then q (holds)."

(テキストによっては、$p \to q$ と表すこともある。また、$p \to q$, $p \Rightarrow q$ 両方導入し、違う意味にしたりすることもある。)

次のように $p \Rightarrow q$ の真理値を定める。

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1.8 「ならば」($\Rightarrow$)　(続き)

(再掲 $p \Rightarrow q$ の真理値表)

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

前半の 2 行は特に違和感は感じないであろう。

後半の 2 行は不思議な感じがするかもしれない。
$p \Rightarrow q$ を考えるとき、p が成り立たない場合のことは「考えない」ことが多いのでは？

p が成り立たないときは、q はどちらでも良い、と表を埋めておく (p が成り立たないときも真偽を定める)。

(世の中には「p ならば q」だったら、「p でなければ q でない」という人が少数いそうだけれど、数学の世界ではそうでないのは知っているよね？)

1.8 「ならば」 ($\Rightarrow$) 大事な式 $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

実は次式が成り立つ。

(1) $$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q \quad (\text{覚えるべき式})$$

(証明) $(\neg p) \vee q$ の真理値表を書き、前のページの $p \Rightarrow q$ と比較する。

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

(第 3 列は第 1 列から、第 4 列は第 2,3 列から求めた。第 5 列は前ページで紹介した定義である。) 第 4 列と第 5 列の真偽が一致するので、$(\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$. □

(注) 我々は $p \Rightarrow q$ の真偽を真理値表で与えて $p \Rightarrow q$ を定義したが、$p \Rightarrow q$ とは $(\neg p) \vee q$ のことである、として $p \Rightarrow q$ を定義するテキストもある。いずれにしても、違いは最初だけで、ここから後はどちらでも同じである。

1.8 「ならば」($\Rightarrow$)　有名な問題 $p \Rightarrow q$ の否定は？

$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ であるから

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg\left((\neg p) \vee q\right) \\ &\equiv (\neg(\neg p)) \wedge (\neg q) \\ &\equiv p \wedge (\neg q). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q) \quad \text{(覚えるべき式)}. \tag{2}$$

すなわち「p ならば q」の否定は、「p and not q」，「p かつ (q でない)」である。単に「p かつ q でない」と言うと $\neg(p \wedge q)$ のことと混同されてしまいそうである。

逆接を用いて「p であるのに、q でない」と書くと、間違えにくく、覚えやすいかもしれない。— これは暗記術みたいで真顔で言うものではないかも。

1.8 「ならば」($\Rightarrow$)　対偶

宿題　$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$ を示せ。　（「対偶は元の命題と同値。」）

いきなり例から始める。

Example

x は実数の範囲を動く変数とするとき、$x > 3$ という式は、変数 x の値を定めると命題となる。

$x = 1$ のとき、 $x > 3$ は $1 > 3$ であるから偽な命題、$x = 10$ のとき、$x > 3$ は $10 > 3$ であるから真な命題である。

このように、変数 x の値を定める (x に代入する) と命題となる式を、x についての**条件** (condition), **述語** (predicate), **命題関数**などと呼ぶ。

x についての述語を $p(x)$, $q(x)$, $\cdots$ のように表す。

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ を述語に対しても用いる。

(普通の関数については慣れているであろう、として以下の説明を行う。)

述語に関して論じる**述語論理**では、2 つの**量称記号** (quantifier, 限定記号) $\forall$, $\exists$ が非常に重要である。

2.2 「任意の」,「すべての」, ∀

ある一定の範囲内で、何かあることが、一つの例外もなく成立する、ということがある。

例: 「三角形の内角の和は 180° である。」(平面内のすべての三角形の 3 つの内角の和は 180° である。)

つまり、次のような形の命題がしばしば現れる、ということである。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{任意の}\\ \text{すべての}\end{array}\right\}\square\ \text{に}\left\{\begin{array}{l}\text{対して}\\ \text{ついて}\end{array}\right\}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{が成り立つ。}\\ \text{が成立する。}\\ \text{である。}\\ .\end{array}\right\}$$

「任意の x について $p(x)$ が成り立つ」、「For all x, $p(x)$ holds.」という言い方をする。これを

$$\forall x \quad p(x)$$

と表す。

∀ は、All の頭文字 A を逆立ちさせて作った記号である。

$\forall$ の例と $(\forall x : p_1(x)) \quad p_2(x)$ という書き方

Example

$$\forall x \quad (x \text{ は実数} \Rightarrow x^2 \geq 0)$$

この例がそうであるように、多くの場合、$\forall x\ p(x)$ の $p(x)$ は、$p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$ という形をしている。つまり

$$\forall x \quad (p_1(x) \Rightarrow p_2(x))$$

これを次のように書くことにする。

$$(\forall x : p_1(x)) \quad p_2(x)$$

これを「$p_1(x)$ を満たすようなすべての x に対して $p_2(x)$ が成り立つ」と読むと分かりやすいかもしれない。$p_1(x)$ を x についての前提条件、付帯条件のようにみなすわけである。

$$(\forall \Delta : \Delta \text{ は平面内の三角形}) \quad \Delta \text{ の 3 つの内角の和は } 180^\circ.$$

集合の記号の前倒し導入

集合についてパート II で詳しく説明するが、使うと記述に便利である。

ものの集まりを集合という。

a が集合 A の要素であることを $a \in A$ と表す (高校で習ったはず)。

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	*(自然数 natural number)*
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	*(ドイツ語で数 Zahl)*
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合	*(比 quotient)*
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	*(実数 real number)*
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合	*(複素数 complex number)*

「x が実数である」ことを「$x \in \mathbb{R}$」と短く表すことができる。

例で慣れよう

集合の記号を密輸入する: 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

Example

$(\forall x\colon\ x$ は実数$)\ x^2 \geq 0.$
$(\forall x\colon\ x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$
$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

Example

$$(\forall x\colon\ x > 0)\ x + \frac{1}{x} \geq 2.$$
$$(\forall x > 0)\ x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

1 つうっかりしがちな大事なことがある。
$p_1(x)$ を満たす x が 1 つも存在しないときは、$(\forall x : p_1(x))p_2(x)$ の真偽はどう定める？→ これについては後述する。

2.3 「ある$\boxed{}$が存在して…」，「…であるような$\boxed{}$が存在する」

「$p(x)$ が成り立つような x が (少なくても 1 つ) 存在する。」

$$\text{ある}\ x \left\{ \begin{array}{l} \text{が存在して} \\ \text{について} \end{array} \right\} p(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

There exists x such that $p(x)$ holds.

これを次のように表す。

$$\exists x \quad p(x)$$

$\exists$ は exists の頭文字の大文字 E の鏡文字である。
$\exists\, x$ s.t. $p(x)$ と書く人も多い。この辺は気分の問題である。

∃ の例と $(\exists x\colon\ p_1(x))\ p_2(x)$ という書き方

Example (方程式の実数解の存在)

ある x が存在して、x は実数かつ $x^3 - x + 1 = 0$.
ある実数 x が存在して (に対して)、$x^3 - x + 1 = 0$.
$x^3 - x + 1 = 0$ が成り立つような実数 x が存在する。
$\exists x\ (x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0)$.

この例がそうであるように、多くの場合、$p(x)$ は $p_1(x) \land p_2(x)$ の形をしていて、$p_1(x)$ が考察の範囲などを表している。このとき

$$\exists x \quad (p_1(x) \land p_2(x))$$

を次のように表す。

$$(\exists x : p_1(x)) \quad p_2(x).$$

Example (続き)

$(\exists x\colon\ x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0.$
$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^3 - x + 1 = 0.$

例

Example

$\exists x \quad (x > 0 \wedge x^2 = 2)$
$(\exists x\colon\ x > 0) \quad x^2 = 2$
$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2$

宿題2

締め切り 6 月 1 日 (月) 13:30. 今回も締め切り後の提出も認める。
解答を A4 サイズの PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。
問題文は

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2020/toi2.pdf

にあります (Oh-o! Meiji のレポート課題 2)。

出題の狙い:

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/