数理リテラシー 第4回

〜 論理 (4) 〜

桂田 祐史

2020 年 6 月 3 日

連絡事項&本日の内容

- 対面形式の期末試験は実施しないことが決定した。
成績評価の方法を次のように変更する。
【成績評価の方法】
宿題 *20* %，期末レポート *80* %とし，得点の成績評価への換算には大学の基準に従う *(60* 点以上が合格*)*。

- 本日の授業内容は、複数の量称を含む命題の読み方と証明の仕方。
非常に重要である。

- 宿題 1(問 1) の解説を行う。

- 宿題 3 を出す。締め切りは 6 月 8 日 (月曜)13:30 とする。ネットワークやサーバーの障害などの問題が発生しない限り、宿題 3 の解説は次回授業で行う。そのため、6 月 9 日 18 時以降の提出は認めない。(困ったことがあったら連絡して下さい。)

- 前回「宿題を出す日はアンケートは行わない」と言ったが、今週は大学から「オンライン授業に関する学生アンケート」を行うよう指示があった。回答期限は 6 月 10 日 (水) 17:00 である。

2 つ以上の変数を含む述語 (条件)　がある。

Example

$xy = x$ は、x と y に数を代入すると命題になる。
$x = 0,\ y = 0$ を代入すると $0 \cdot 0 = 0$ となり、真な命題である。
$x = 1,\ y = 0$ を代入すると $1 \cdot 0 = 1$ となり、偽な命題である。

2 変数 $x,\ y$ を含む述語は、$p(x, y)$ のように表せる。

2.4.1 2 変数の述語で 1 つの変数に量称記号をつける (束縛)

2 変数 x, y を含む述語 $p(x,y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x,y) \quad と \quad \exists y \quad p(x,y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

Example

(1) $$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

(2) $$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

いずれも、x についての述語である。例えば

(1) に $x = 0$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(1) に $x = 1$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは偽な命題
(2) に $x = 0$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(2) に $x = 1$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは真な命題

2.4.2 2 つの変数を持つ述語に 2 つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x, y))$ 「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$ 「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x, y))$ 「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$ 「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x, y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。
3 つ以上の変数を持つ述語に対しても同様である。

2.4.3 慣れるための練習 (1)

Example

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$
「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」
これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

Example

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$
「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」
これも実は真。$y = -1$ とすれば…

Example

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

「任意の実数 x, 任意の実数 y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」
「任意の実数 x, y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

2.4.3 慣れるための練習 (2)

Example (3 変数の場合、ピタゴラス数)

3 つでも同様で

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land z \in \mathbb{N} \land x^2 + y^2 = z^2)$$

を次のように書く。

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

「ある自然数 x, y, z が存在して $x^2 + y^2 = z^2$」

この命題は真である。$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ とすると条件を満たす。

読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

(a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

(b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言ったはず)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

注　$\exists x\ P(x)$ を英語で読むと、"There exists x such that $P(x)$ holds." となる。関係代名詞を使って書かれた文は、後ろの節から訳す、という話を思い起こさせる。この辺は日本語と英語の違いに係るところである。

読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これはやや危ない。なぜか？
次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\quad x < y.$$

(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)
読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。
青と水色はとても紛らわしい。読点「、」を見落とさなければ大丈夫 (区別できる) という意見もあるけれど、それは聴いただけでは分からない。

機械的な読み方 (a) を採用して、(*) や (**) のように読むことを勧める。

同じ例で重要な注意　∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

　上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

　一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の$\boxed{}$とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。)

例

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　*(とにかくこう書いてみる。)*

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」と書き出せばよい。

例

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$
(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)
証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0.$ □

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆ 3　複数の量称 $(\forall, \exists)$ がある場合は、前から順に処理する。

例

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。*($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)*
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z}) \cdots$ を見て、y を探す…整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。
y として $y = -x$ が見つかる。そこで…)
　$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (3)

もう一つ例をあげる。

例

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明 $x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

宿題3の紹介

締め切り 6月8日(月) 13:30. 特別な事情がない限り、遅れても6月9日(火) 18:00まで(何かあったら連絡して下さい)。

解答をA4サイズのPDFファイルにして、Oh-o! Meijiで提出すること。

問題文は

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2020/toi3.pdf`

にあります(Oh-o! Meijiのレポート課題3)。

出題の狙い: 複数の量称を含む命題の読み方と証明

PDFファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは

「授業の提出物をPDF形式で用意する方法」
`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/`

宿題１の解説, 宿題への向き合い方

これは手書きで説明する。

初めて返却するのでいくつか説明しておく。

添削して返却することで、理解を深めてもらうことを目的としている。

特に得点をつけてはいない。直した方が良いと思われることは、細かいこと、字の書き方についてまでコメントしてある (読み取りやすい、読み間違いの起こりにくい字を書くように心がけて欲しい)。

マル３つ書いて添削終了と言う答案もあるが、色々なことを指摘されて真っ赤になる答案も少なくない。例年軽いショックを受ける人もいるようだ。個々の指摘については、冷静に理解して、「そうか、次から直そう」と受け取ってもらいたい。

繰り返しになるけれど、指摘が多い答案の点を低くするつもりはまったくない。**指摘されたことを理解して直すことに注力**して欲しい。

問 1 (1)

問 1 (1) 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。

問1 (2)

注: (1) で $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ は示してある。

(2) (1) の結果を用いて、$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ。

問 1 (3)

(1) と (2) の結果を用いて、次式を示せ。

$$(p \lor q) \land (r \lor s) \equiv (p \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land r) \lor (q \land s)\,.$$

宿題 1 答案を見ての具体的注意

- 真理値表の真偽を間違えた人は少ないが、p, q, r の順番が樹形図を書いて出来るもの (辞書式順序) と異なる人がかなりいた。理解して改めるべきである。
- やっていることは計算であるが、目的は証明なので、途中でむやみに省略しないこと。
- $\wedge, \vee$ が $\cap, \cup$ に見えたり、F が「下」に見えたり、q が数字の 9 に見えたり、おかしなものは指摘しておいた。深刻に受け取る必要はないけれど、気をつけて下さい。
- 論理式で、演算の結合順を指定するカッコは ( ) だけを使うのが普通 (これは言い忘れた)。
  - その点は数式での習慣と違うので頭を切り替えること。
  - そもそも一種類で十分なはず。深さで変えることにしていたら、いくつあっても足りない。
  - 特に中括弧 (braces) { } は、集合を表すために使われるため、演算の結合順の指定に使用するのは極力さけるべき。せいぜい ( ) (parentheses) と [ ] (brackets) くらいにしよう。
  - ちなみに数式でも、英語圏では ( ), [ ], { } の順に使うのが普通である。めったに { } は出て来ない。