数理リテラシー 第7回

～ 集合 (3) ～

桂田 祐史

2020 年 6 月 24 日

本日の内容＆連絡事項

- 本日の授業内容: 集合族 (特に無限集合族の合併と共通部分), 集合についての定理の証明。少し難しめかもしれません。
- 宿題 5(問 5) の解説を行います。
- 宿題 6 を出します。締め切りは 6 月 29 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 1 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっとまーく `meiji.ac.jp`)。
- 質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで尋ねて下さい。

13 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

例. $\mathcal{A}=\{\{1\},\{1,2,3\}\}$　2 つの集合 $\{1\}$, $\{1,2,3\}$ からなる集合

例. A を集合として、$\mathcal{A}=2^A$ (A のベキ集合).

ここで $\mathcal{A}$ は A のカリグラフィック・フォント (の 1 つ) である。

(これまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィク・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。)

無限個の集合からなる集合族の和集合 (合併集合)、積集合 (共通部分) に慣れることを目標とする (必要だから)。特に自然数で番号をつけられる集合 A_1, A_2, $\cdots$ に対して、和集合 (合併集合) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 積集合 (共通部分) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を扱いたい。

$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

後のために少し整理する。

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、和集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とも書く), 積集合 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ($\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とも書く) を次のように定める。

(1)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

(2)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が納得できるかな？

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例　$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = (-1, 1).$$

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -n < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = (-1, 0].$$

証明できるかな？直観だけでは間違えそう。少し準備しよう。

14 集合についての定理, それらの証明

定理 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、A, B, C は X の部分集合とする。

1. $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \land B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律), $A \subset B \land B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
2. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律)
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
7. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
8. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (ド・モルガン律)
9. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

14 集合についての定理, それらの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。この講義では、図は考えるときの参考にはするけれど、図を使った説明は証明にならない、というスタンスで進める。

以下の定義が基礎となる。

1. $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \land (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A))$
2. $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
3. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ の証明

任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $\square$

ド・モルガン律 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ の証明

任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^{\complement} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^{\complement}) \wedge (x \in B^{\complement}) \\ &\Leftrightarrow x \in A^{\complement} \cap B^{\complement} \end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$. $\square$

14 集合についての定理, それらの証明

空集合であることの証明は、知らないと戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^{\complement} = \emptyset$ **を示せ。**

証明 1 背理法を用いて証明する。$A \cap A^{\complement} \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して $x \in A \cap A^{\complement}$. ゆえに $x \in A$ かつ $x \in A^{\complement}$. すなわち $x \in A$ かつ $x \notin A$. これは矛盾である。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

証明 2 (本質的には同じことであるが)

$$A \cap A^{\complement} = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \wedge x \in A^{\complement} \right\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}.$$

任意の x に対して $x \in A \wedge x \notin A$ は偽である。言い換えると、条件 $x \in A \wedge x \notin A$ を満たす x は存在しない。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ の証明

準備として、一般に

$$A \cap B \subset B \tag{$\sharp$}$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、$A \cap B \subset B$. □

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A$ と仮定する。上で注意したように、一般に $A \cap B \subset B$ が成り立つので、仮定と合わせて $A = A \cap B \subset B$. ゆえに $A \subset B$. □

$A \cap B = A \Leftarrow A \subset B$ の証明

(i) $A \subset B$ と仮定すると、$A \subset A \cap B$ (実際、$x \in A$ とするとき、仮定から $x \in B$ が成り立つので、$x \in A \wedge x \in B$, すなわち $x \in A \cap B$ が成り立つ。).
(ii) 一方、一般に $A \cap B \subset A$ が成り立つ (やはり ($\sharp$) を使う)。

(i), (ii) から $A \cap B = A$ が成り立つ。 □

15「集合族　無限集合の合併と共通部分 再挑戦」は、6 月 24 日には講義しないことにしました。7 月 1 日に講義します。

15 集合族 無限集合の合併と共通部分 再挑戦 (1)

次は良く使う。

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(a) の証明　一般に $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ が成り立つ。これは直観的に明らかに感じる人も多いだろう。次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. 特に ($n = 1$ として) $x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

逆向きの包含関係 $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は次のように示せる。$x \in A_1$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、仮定を用いて

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \quad \text{であるから} \quad A_1 \subset A_n.$$

ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

(続き)

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ の証明

一般に $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_1$ が成り立つ。実際、$x \in A_1$ とすると、$n=1$ に対して $x \in A_n$. ゆえに $(\exists n \in \mathbb{N})$ $x \in A_n$ が成立する。ゆえに $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

一方 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ は次のように証明できる。$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$x \in A_n$. 仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$. ゆえに $A_n \subset A_1$. ゆえに $x \in A_1$. 従って $\bigcup_{n\in A} A_n \subset A_1$. □

15 集合族 無限集合の合併と共通部分 再挑戦 (3)

$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つ。以下、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

- (i) $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であること: $x \in \{0\}$ とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ であるから $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- (ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{0\}$ であること: $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. ゆえに $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $\underline{x = 0}$. ゆえに $x \in \{0\}$.

(続き)

$x \in \mathbb{R}$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば $x = 0$ であることの証明を 2 つ与える。

1. アルキメデスの公理「$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」 を認めての証明. 背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. ゆえにある自然数 n が存在して $n|x| > 1$. ゆえに $|x| > \frac{1}{n}$. これは $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ に矛盾する。ゆえに $x = 0$.
2. はさみうちの原理と、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を認めての証明: $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理によって $0 \leq x \leq 0$. ゆえに $x = 0$. $\square$

問 5 解説

手書きで解説する。

問6紹介

今回の問題文は

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2020/toi6.pdf`