数理リテラシー 第8回

〜 集合 (4), 写像 (1) 〜

桂田 祐史

2020 年 7 月 1 日

本日の内容＆連絡事項

- 今回からスライド PDF に目次をつけます。
- 宿題 (問 5 まで) を添削していて気づいたことを書いておきます。
- 本日の授業内容: 集合族 無限集合族の合併と共通部分について、証明に取り組みます。これで第 II 部「集合」はおしまいです。その後、いよいよ最終第 III 部「写像」に入ります。
- 宿題 7 を出します。締め切りは 7 月 6 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 8 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっと `meiji.ac.jp`)。
- 宿題 6(問 6) の解説を行います。
- 質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで。
- 期末レポートは (時間短め、量多めになるので) 手書き提出の方が良いかもしれません。コンピューター打ち込みの人が少なくないですが、手書き＆スキャンも (宿題で) 練習しておくことを勧めます。

目次

宿題へのコメント (1)

:= について　問 (3) で := を使う人が少なくなかったです。でも、それは間違いです。:= については、こちらの説明不足でした (今年はうっかりしてしまいました)。これは定義する時に使う記号です ($\stackrel{\text{def.}}{=}$ と書く人もいます)。:= は等式の一種で、左辺を右辺に書いてある式によって定義する、と言う意味です。$f(x) := x^2 + 2x + 3$ は、$f(x)$ を $x^2 + 2x + 3$ に等しいとして定める、ということです。逆に、右辺を左辺に書いてある式によって定義するときは =: とします。

　問 5 (1) のように定義を書きたいとき、$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$ と書くのに使うのはぴったりです。一方問 (3) は、日本語で「定義する」と書いていないので、:= でなく、ただの = を使うべきです。

必要十分　高校生以来使っているはずなので簡単に済ませたのですが、論理の言葉ですから、時間をかけて説明すべきだったかもしれません。$p \Rightarrow q$ ($q \Leftarrow p$ とも書ける) が成り立つとき、「p は q であるための十分条件」、「q は p であるための必要条件」といいます。必要条件かつ十分条件であるとき必要十分条件といいます。つまり $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$ が成り立つとき、「p は q であるための必要十分条件」という。$p \Rightarrow q$ かつ $p \Leftarrow q$ と言う気持ちで $p \Leftrightarrow q$ と書きます。

宿題へのコメント (2)

呼び方について　例えば $A \cup B$ は「和集合」でなく、「A と B の和集合」と言うように心がけて下さい。(これは他でもそうです。「f のグラフ」，「f の導関数」，「多項式 $p(x)$ の係数」，「f の点 $(a, f(a))$ における接線」などを「グラフ」，「導関数」，「係数」，「接線」だけで済ませないで、きちんと書けるようになって下さい。)

カンマ “,” について　点 (ポイント、ピリオド、ドット) “.” や読点 「、」に見えるように書く人が多いです。また省略してしまう人もいます。気をつけて下さい。小さくても省略はできません。点 . に見えると誤解される危険もあるので (1.2 は「いってんに」と言う一つの実数になる)、ちゃんとすること。

宿題へのコメント (3)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ **なぜ二重線か**　例えば自然数全体の集合は、$\boldsymbol{N}$ のように太字 (bold face) にするか、$\mathbb{N}$ のようにどこかを二重線にして表す (blackboard bold と言ったりします)、と説明しました。本当は毎回「自然数全体の集合を... と表す」のように断るのが良いのでしょうが、それが面倒なので、省略しても了解してもらえるように、少し変わった書き方をしている、ということだと思います。ところで集合など、単に A のように書けば良いのに、$\mathbb{A}$ のように書く人が何人かいました。問題文となるべく同じように書くべき、というのと、そういうことをすると、せっかく $\mathbb{N}$ とした効果が薄れるので、良いことではないと思います。

念のためもう一度　添削の手間を考えると、**単一の PDF を提出**して欲しいです。もう Mac が使えるので、PDF に変換するのは難しくないはず (例えば [ファイル] → [プリント] → [PDF] → [PDF として保存])。紙の表裏を別々のファイルにしている人がいますが、1 つの PDF ファイルにまとめるのは簡単です (プレビュー で、サムネール表示してドラグ&ドロップ, 保存)。

次のパートの注意

次の「15 集合の合併と共通部分 再挑戦」は、前回 (6 月 24 日) に講義するつもりで用意しましたが、時間が長くなりすぎたので、今回に回すことにした、というものです。

動画の中で「さっき」といっているのは、6 月 24 日の講義のことをさしています。それから、使っているスライドのページ番号がずれてしまっています。

訂正　動画中の PDF の 13/17 ページ (この PDF では 9 ページ) の下から 2 行目
「仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_1$」
は
「仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$」
が正しい。

15 集合族 無限集合の合併と共通部分 再挑戦 (1)

次は良く使う (単調な集合列の場合の共通部分と合併)。

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.
- (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(a) の証明　一般に $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ が成り立つ。これは直観的に明らかに感じる人も多いだろう。次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. 特に ($n = 1$ として) $x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

逆向きの包含関係 $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は次のように示せる。$x \in A_1$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、仮定を用いて

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \quad \text{であるから} \quad A_1 \subset A_n.$$

ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

(続き)

(b) $(\forall n\in\mathbb{N})$ $A_n\supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ の証明

一般に $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\supset A_1$ が成り立つ。実際、$x\in A_1$ とすると、$n=1$ に対して $x\in A_n$. ゆえに $(\exists n\in\mathbb{N})$ $x\in A_n$ が成立する。ゆえに $x\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

一方 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\subset A_1$ は次のように証明できる。$x\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して、$x\in A_n$. 仮定より $A_n\subset A_{n-1}\subset\cdots\subset A_2\subset A_1$. ゆえに $A_n\subset A_1$. ゆえに $x\in A_1$. 従って $\displaystyle\bigcup_{n\in A} A_n\subset A_1$. □

15 集合族 無限集合の合併と共通部分 再挑戦 (3)

$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つ。以下、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

(i) $\displaystyle\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であること: $x \in \{0\}$ とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ であるから $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. 従って $\displaystyle x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{0\}$ であること: $\displaystyle x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. ゆえに $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $\underline{x = 0}$. ゆえに $x \in \{0\}$.

15 集合族 無限集合の合併と共通部分 再挑戦 (4)

(続き)

$x \in \mathbb{R}$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば $x = 0$ であることの証明を 2 つ与える。

1. アルキメデスの公理「$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」 を認めての証明. 背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. ゆえにある自然数 n が存在して $n|x| > 1$. ゆえに $|x| > \frac{1}{n}$. これは $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ に矛盾する。ゆえに $x = 0$.
2. はさみうちの原理と、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を認めての証明: $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理によって $0 \leq x \leq 0$. ゆえに $x = 0$. $\square$

写像とは　関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

で x と y が数でないものも扱うことにして、それを**写像**(しゃぞう)と呼ぶ、ということ。

「関数は写像である」は正しい。

「数列は写像である」も正しい。

写像のことを関数と呼ぶ人、テキストもある。この講義ではそうしない (関数は写像であるが、写像の中には関数でないものもある、という立場)。

2 写像の定義

定義 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。 $f(x)$ を ***x の f による像*** (the image of x under f)、あるいは ***f の x における値*** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では "f of x" と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことが出来るが、$f\colon x \mapsto y$ と表すこともある。

X を f の**定義域** (the domain of definition of f, the domain of f) と呼ぶ。

この講義では、Y を ***f の終域***と呼ぶことにする (英語では codomain と呼ばれたりする)。

集合

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\}$$

を写像 ***f の値域*** (the range of f), ***f による X の像***と呼ぶ。

注 1　これはユルイ定義で、厳密な定義 ($X \times Y$ の部分集合としてグラフを定義して、写像とはグラフである、と定める) は後で行う。

注 2　実は Y に名前をつけないテキストが多い。特に和書。「レインジ」は教科書 (中島 [1]) で採用してあるが、ちょっと変わっている。真似をしない方が良いかも。range の訳語のつもりだろうけれど、それは普通「値域」と訳され、後の $f(X)$ の意味であることが多い (高校の数学でもそういう意味である)。

注 3　定義域、値域は高校でも出て来たが、値の範囲ということで、答は不等式で書くのが普通であった。上の X, Y, $f(X)$ は集合である！

例 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

$f(x) = x + 2$ の場合、すべての実数 x に対して、$x + 2$ が意味を持つので、$\mathbb{R}$ が定義域である。

$f(x) = \frac{1}{x}$ の場合は、$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が定義域である。

$f(x) = \sqrt{x}$ の場合は、$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ が定義域である。

3 写像の例　Dirichlet の関数, 多角形の面積

例 (Dirichlet の関数)

写像 $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。例えば $D(1) = 1$, $D(1/2) = 1$, $D(\sqrt{2}) = 0$, $D(\pi) = 0$.

D を **Dirichlet(ディリクレ) の関数**と呼ぶ。(歴史上、関数概念を見直す大きな契機となったことで有名な関数である。)

例 (多角形の面積)

$X :=$ 平面内の多角形全体の集合, $Y := \mathbb{R}$, $f(A) := A$ の面積, として、$f\colon X \to Y$ が定まる。

$f(A)$ を具体的に式で書けなくても、写像 (関数) とみなす。 □

例 ($\mathbb{R}^2$ の 1 次変換)

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とするとき、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める。
$f(x, y) = (x', y')$ として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした f を $\mathbb{R}^2$ の **1 次変換**という。$ad - bc \neq 0$ のとき、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に)、平面全体を平面全体に写す。合同な変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。

例 (恒等写像)

X は空集合でない集合とする。写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を

$$\mathrm{id}_X(x) = x \quad (x \in X)$$

で定める。id_X を X の**恒等写像** (the identity map of X) と呼ぶ。
恒等写像というのは、集合ごとに 1 つ定まるものである。

例 (包含写像)

$X \subset Y$ のとき、$i\colon X \to Y$ を $i(x) = x$ $(x \in X)$ で定める。この i を
ほうがんしゃぞう
包含写像 (the inclusion map) と呼ぶ。i の代わりに ι と書くことも多い。

問 6 解説

手書きで解説する。

問 7 について

問題文は以下にあります。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi7.pdf

今日で集合の話はおしまいなので、本日の話題「無限集合族の合併・共通部分」以外に、簡単だけれど、うっかり間違えそうな問を 1 つつけてあります。

この授業のスライドや宿題は、LaTeX で作成していますが、宿題のソースも公開することにします。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi7.tex

これに答えを書き加えて提出してくれたらと思いますが、今年度は LaTeX まで行かないかなあ…

参考文献

中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).