数理リテラシー 第10回

～ 写像 (3) ～

桂田 祐史

2020年7月15日

目次

本日の内容&連絡事項

- 宿題 7 について補足します。
  (間が空いてしまっていますが、多分一番難しいところなので…)
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射
- 宿題 8(問 8) の解説を行います。
- 宿題 9 を出します。締め切りは 7 月 20 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 22 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっと `meiji.ac.jp`)。
- 質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで。

宿題 7 について補足 (1)

まず (1) $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\complement} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n^{\complement}\right)$ について。

- 集合の等式 $A = B$ の証明は、

  任意の x に対して、$x \in A \Rightarrow x \in B$ と、$x \in B \Rightarrow x \in A$ を示す

  のが基本 (まず考えるべきやり方という意味) と言ってある。しかしそうしない人がとても多い。それで出来る場合は良いが、集合の等式のまま式変形しようとして、おかしな式 (集合を否定する等) を書いたり、飛躍 (説明できないから？書ける式までジャンプ) したりしている。その辺は改めて下さい。
- 「ドモルガン律から正しい」と書いた人がいたが、(1) はド・モルガン律そのもので、それを証明しなさい、という問題である。集合のド・モルガン律は、2 個の場合を証明してあって、それから数学的帰納法で、有限個の集合の場合に成り立つことは簡単に分かるけれど、数学的帰納法で無限個の場合の証明はできない。
- 集合族の合併、共通部分は、直観的には $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$ ということだが、$\cap \cdots$ や $\cup \cdots$ は曖昧で、証明するときは使えないと考えること。一方、$\cup \cdots$ や $\cap \cdots$ を書かなければ (結構多かった)、はっきり間違いである。

問 7 について補足 (2)

(2) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x \leq \frac{1}{n}\right\}$ について $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ を証明する。

集合が空集合であることの証明は、少しやりにくい。これについては、特別に説明をしている (6 月 24 日の講義スライド Link の 10/18)。「空集合でないと仮定すると」と背理法にするのがお勧めである。

任意の自然数 n に対して $0 < x \leq \frac{1}{n}$ が成り立つことから、どうやって矛盾を導くか。授業中の類題では、アルキメデスの公理を使う方法と、極限の議論 (そこでは、はさみうちの原理) に持ち込む方法を紹介した。はさみうちの原理とは、次の定理である。

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ と実数 A に対して

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

と

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = A$$

が成り立つならば、$\lim_{n \to \infty} b_n = A$.

(同じ極限 A を持つ 2 つの数列にはさまれた数列は、A に収束する。)

この定理を正しく使えていると判定できる答案は少なかった。この場合は次の定理の方が使いやすかったかもしれない。

問 7 について補足 (3)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n$$

が成り立つならば、$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

注意　仮定を $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < b_n$ に変えても、結論は $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ である。

この定理を、a_n として x, b_n として $\frac{1}{n}$ を当てはめると、$x \leq 0$ が得られる。

(3) は完答した人も多かったが、とりこぼした人も結構いる。

- $\{0\}$ は 0 というただ 1 つの要素を持つ (それ以外の要素は持たない) 集合である。ゆえに $0 \in \{0\}$ は正しい。
- しかし $0 \neq \{0\}$ であるから、$\{0\} \in \{0\}$ は成り立たない。
- $\{0\} \subset \{0\}$ を偽と間違えた人が多い。まず、明らかに $\{0\} = \{0\}$. ところで、一般に $A = B \Leftrightarrow A \subset B \land A \supset B$ であるので、$A = B$ のとき $A \subset B$ は真である。
- (d) $\{4,3,2,1\} = \{1,2,3,4\}$, (e) $\{1,2,2,3,3,3\} = \{1,2,3\}$ について。集合を要素を書き並べて表すとき、順序は問わない、重複しても良いことにする、という注意をした。どちらも真である。
- (f) $(1,2,3,4) = (4,3,1,2)$ は順序対なので、順番を入れ換えたら等しくなくなる。

4 単射, 全射, 全単射

4.1 単射, 全射, 全単射の定義

定義 (単射, 全射, 全単射)

(i) $f\colon X \to Y$ が **単射** (たんしゃ) (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1 対 1** (one to one) であるとは、

$$(\sharp) \qquad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad \left(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\right)$$

が成り立つことをいう。

(ii) $f\colon X \to Y$ が **全射** (ぜんしゃ) (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは**上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(\flat) \qquad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことをいう。

(iii) $f\colon X \to Y$ が**全単射**あるいは**双射** (a bijection, 形容詞は bijective) であるとは、f が全射かつ単射であることをいう。

(**注**　最近はあまり使われないが、**1 対 1 対応** (one-to-one correspondence) という言葉があり、これは全単射という意味である。)

余談　$'$ の読み方

日本の高校では、x' を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では “x prime” 「エックス プライム」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “–” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

「ことばの話 1835「ダッシュ」」 Link によると

渡辺正, 「ダッシュ」と「活動寫眞」, 『数学セミナー』*1985* 年 *11* 月号, *p. 13*

にある程度詳しい事が載っているとか。

個人的に、古い英語 (England で使っているやつ) では、dash と読んだらしい、というのはどこかで目にした覚えがあったので、納得出来た。 □

4.1 単射, 全射, 全単射の定義　図によるイメージ

写像が単射であるとは、2 つ以上の矢が刺さっている的がないこと。

写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

単射の条件 ($\sharp$) $(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ は

$$(\sharp\sharp) \qquad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad \left(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right)$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

全射の条件 ($\flat$) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$ は

$$(\flat\flat) \qquad Y = f(X)$$

とも書ける (ぜひ覚えよう)。実際

$$((\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad Y \subset f(X) \quad \Leftrightarrow \quad Y = f(X).$$

($\Leftrightarrow$ は、$f(X) = \{y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\}$ を思い出すと分かる。また、一般に $Y \supset f(X)$ が成り立つので、$\Leftrightarrow$ の $\Rightarrow$ 方向が分かる。)

問

1. $f\colon X \to Y$ が単射でないことを論理式で表わせ。
2. $f\colon X \to Y$ が全射でないことを論理式で表わせ。

解答

1. $(\exists x \in X)\ (\exists x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) = f(x')$.
   あるいは $(\exists x \in X)\ (\exists x' \in X)\ (x \neq x' \land f(x) = f(x'))$.
2. $(\exists y \in Y)\ (\forall x \in X)\ y \neq f(x)$. □

4.2 単射, 全射, 全単射の例

例　$X = Y = \{1, 2\}$ とする。X から Y への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方　X の各要素 1, 2 の像が何か (Y のどの要素か) 調べる。

解答　次の f_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ が X から Y への写像である。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1			
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2			

f_1, f_4 は

- 2 つ以上の矢が刺さっている的があるので単射でない。
- 矢の刺さっていない的があるので全射でない。

f_2, f_3 は

- 2 つ以上の矢が刺さっている的がないので単射である。
- すべての的に少なくとも 1 つの矢が刺さっているので全射である。

4.2 単射, 全射, 全単射の例

例

$X =$ ある時点での明治大学の学生全体, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ 学生 x の学生番号 とするとき、f は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。) □

例 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間 I で定義された実数値関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射である。**

証明 $x, x' \in I$, $x \neq x'$ とする。このとき、(i) $x < x'$ (ii) $x > x'$ のいずれかが成り立つ。

(i) のとき $f(x) < f(x')$. (ii) のとき $f(x) > f(x')$. いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$. ゆえに f は単射である。 □

同様に狭義単調減少関数が定義されて、**狭義単調減少関数は単射である。**

4.2 単射, 全射, 全単射の例

次の f_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f_1(x) = x^2$			
$f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,	$f_2(x) = x^2$			
$f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$,	$f_3(x) = x^2$			
$f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty)$,	$f_4(x) = x^2$			

- f_1, f_3 は単射でない $\because x = -1$, $x' = 1$ とすると、$x, x' \in \mathbb{R}$, $x \neq x' \land f_j(x) = f_j(x')$.
- f_2, f_4 は単射である $\because f_j'(x) = 2x > 0$ $(x \in (0, \infty))$ であるから、f_j は定義域 $[0, \infty)$ で狭義単調増加である。ゆえに f_j は単射である。
- f_1, f_2 は全射でない $\because y = -1$ とすると $y \in \mathbb{R}$ であり、$y = f(x)$ を満たす x が存在しない。
- f_3, f_4 は全射である $\because$ 任意の $y \in [0, \infty)$ に対して、$x := \sqrt{y}$ とおくと、$x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R} \land y = f(x)$.

4.2 単射, 全射, 全単射の例

例

X を空でない集合とする。恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は全単射である。

実際、$x_1, x_2 \in X$ に対して、$\mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2)$ ならば、$x_1 = x_2$ が成り立つので、id_X は単射である。

また、任意の $y \in X$ に対して、$x := y$ とおくと、$x \in X$ であり、$\mathrm{id}_X(x) = x = y$ であるから、id_X は全射である。

以上から、id_X は全単射である。

例

$\emptyset \neq X \subset Y$ とするとき、包含写像 $i\colon X \to Y$ は単射である。
(恒等写像の単射性の証明と同様。)

例

空でない集合 X, Y に対して、射影作用素 $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$ は全射である。
(すでに $\mathrm{pr}_X(X \times Y) = X$ を示してある。ゆえに pr_X は全射である。)

問 8 解説

手書きで解説する。

問 9 紹介

問題文は以下にあります。

- `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi9.pdf` (PDF)
- `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi9.tex` (TEX ソース)

参考文献

中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).

付録　有限集合の間の写像の全射性、単射性

(講義時間に余裕があれば講義するが、フツーは宿題のネタにする程度。)

実は次の命題が成り立つ。

命題 (有限集合の間の写像の全射性、単射性)

X, Y が有限集合であるとする。X と Y の要素の個数をそれぞれ $\#X$, $\#Y$ と書く。このとき、以下の (1)–(4) が成り立つ。

1. X から Y への単射が存在する $\Leftrightarrow \#X \leq \#Y$.
2. X から Y への全射が存在する $\Leftrightarrow \#X \geq \#Y$.
3. X から Y への全単射が存在する $\Leftrightarrow \#X = \#Y$.
4. $\#X = \#Y$ ならば、任意の写像 $f\colon X \to Y$ について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。

(i) f は単射　(ii) f は全射　(iii) f は全単射

証明　$n := \#X$, $m := \#Y$, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$ とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

1. $f\colon X \to Y$ が単射であれば、$f(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ はどの二つも相異なり、$\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、要素の個数を比較して $\#X = n \leq \#Y$. 逆に $n \leq m$ とすると、$f(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ とおくことで、$f\colon X \to Y$ を定義すると、f は単射となる。
2. $f\colon X \to Y$ が全射であれば、$\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$ であるから、$\#X = n \geq \#Y$. 逆に $n \geq m$ とすると、$f(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq m)$, $f(x_i) = y_1$ $(m < j \leq n)$ とおくことで、$f\colon X \to Y$ を定義すると、f は全射となる。
3. X から Y への全単射が存在すれば、(1) から $\#X \leq \#Y$, (2) から $\#X \geq \#Y$ であるから $\#X = \#Y$. 逆に $\#X = \#Y$ とすると、(1) から X から Y への単射 f が存在する。(3) から f は全単射である。
4. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示せば良い (それが出来ると、(i)$\Rightarrow$(iii) と (ii)$\Rightarrow$(iii) が導かれる)。
   $f\colon X \to Y$ が単射とする。$f(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ が相異なるので、$|\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}| = n$, 仮定からそれが $\#Y$ に等しく、$\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、$\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$. ゆえに f は全射である。
   一方、$f\colon X \to Y$ が全射とする。$\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$. 仮定から $n = \#Y$ であるから、$f(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに f は単射である。 □

付録　(参考) 線形代数バージョン

命題 (参考: 線形代数バージョン)

X, Y が体 K 上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ $\dim X$, $\dim Y$ と書く。

1. X から Y への単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$.
2. X から Y への全射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$.
3. X から Y への全単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$.
4. $\dim X = \dim Y$ ならば、任意の線形写像 $f\colon X \to Y$ について、以下は同値である。

   (i) f は単射　(ii) f は全射　(iii) f は全単射