

数理リテラシー 第11回

～ 写像 (4) ～

桂田 祐史

2020年7月22日

目次

1 本日の内容&連絡事項

2 写像

- 単射、全射、全単射 (続き)
 - 単射, 全射, 全単射の合成
- 逆写像
 - 定義
 - 逆行列の話と比べてみよう
 - 一意性
 - 全単射 \Leftrightarrow 逆写像存在
 - $(f^{-1})^{-1} = f, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
 - $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

3 問9解説

4 問10紹介

本日の内容&連絡事項

- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射 (続き) と逆写像
- 宿題 9(問 9) の解説を行います。
- 宿題 10 を出します。締め切りは 7 月 27 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 29 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっと meiji.ac.jp)。
- 質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで。

先週の復習: 定義を思い出す

$f: X \rightarrow Y$ とする。

f が**単射**であるとは

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことである。この条件は

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (二つの矢が刺さる的はない)。

f が**全射**であるとは

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことである (どの的にも矢が刺さる)。

4.3 単射, 全射, 全単射の合成

次の定理は基本的である。時間がないときは、(6) 以降は後回しで良い。

定理 (単射, 全射, 全単射の合成)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とする。

- ① f と g が単射ならば、 $g \circ f$ は単射である。
- ② f と g が全射ならば、 $g \circ f$ は全射である。
- ③ f と g が全単射ならば、 $g \circ f$ は全単射である。
- ④ $g \circ f$ が単射ならば、 f は単射である。
- ⑤ $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射である。

- ⑥ $g \circ f$ が単射でも、 g は単射とは限らない。
- ⑦ $g \circ f$ が全射でも、 f が全射とは限らない。
- ⑧ $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、 g は単射である。
- ⑨ $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、 f は全射である。

証明 パート 1

まず (1), (2) を図に描いて説明する。それから文章で説明する。

- ① f と g が単射と仮定する。 $x, x' \in X$ が $x \neq x'$ を満たすとする。
 f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$ 。
 g が単射であるから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ 。
すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。ゆえに $g \circ f$ は単射である。
- ② f と g が全射と仮定する。
任意の $z \in Z$ に対して、 g が全射であることから、 $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。
 f が全射であることから、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。
このとき、
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$
ゆえに $g \circ f$ は全射である。
- ③ f と g が全単射と仮定する。 $g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

証明 パート 2

- ④ $g \circ f$ が単射と仮定する。 $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ を満たすとする。
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ であるから
 $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、 $x = x'$. ゆえに f は単射である。
- ⑤ $g \circ f$ が全射と仮定する。 任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、 $z = g \circ f(x)$ が成り立つ。 このとき、 $y := f(x)$ とおくと、 $y \in Y$ であり、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

証明 パート 3 (おまけ)

- ⑥ $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ と
して、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を定めると、 $g \circ f: X \rightarrow Z$,
 $g \circ f(1) = 1$ である。 $g \circ f$ は単射であるが、 g は単射でない。
- ⑦ (6) と同じ写像が反例となる。 $g \circ f$ は全射であるが、 f は全射で
ない。

証明 パート 4 (おまけ)

(ここは授業ではカットするかも。教科書にはもっと書いてあるけれど…)

- ⑧ $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。 $y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。 f が全射であるから、 $f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。 $y \neq y'$ であるから、 $x \neq x'$ である。 $g \circ f$ が単射であるから、 $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。これから

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g(f(x')) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

- ⑨ $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、 $z = g(y)$ とおくと、 $z \in Z$ である。 $g \circ f$ が全射であるから、 $g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、 $g(f(x)) = z = g(y)$ であるが、 g が単射であるから、 $f(x) = y$ 。ゆえに f は全射である。 □

3.5 逆写像 定義

逆関数の概念は、写像にも拡張される。まずは定義をしよう。

定義 (逆写像)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の逆写像 (the inverse mapping of f) であるとは

$$(1) \quad g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y$$

を満たすことをいう。

逆写像は無条件では存在しない。 f の逆写像が存在するためには、 f が全単射であることが必要十分である (後で証明する)。

3.5 逆写像 後のために逆関数の例を思い出して予告

X, Y を共に $[0, \infty)$ として、 $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = x^2$ ($x \in X$) で定義する。

f は全射である。すなわち、任意の $y \in Y = [0, \infty)$ に対して、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X = [0, \infty)$ が存在する (証明には、 $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と中間値の定理を用いる — 1年生は気にしない)。

また f は単射である。実際、 $f'(x) = 2x > 0$ ($x > 0$) であるから、 f は $X = [0, \infty)$ 全体で狭義単調増加であり、 f は単射である。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ はただ一つ存在する (もちろん $x = \sqrt{y}$ である)。その x を $g(y)$ として、関数 $g: Y \rightarrow X$ が定まる。これを f の逆関数と呼ぶのであった。

この定義から、任意の $y \in Y$ に対して、 $x := g(y)$ とおくと、 $f(x) = y$ 。ゆえに $f(g(y)) = f(x) = y$ 。したがって $f \circ g = \text{id}_Y$ 。

一方、任意の $x \in X$ に対して $y := f(x)$ とおくと、やはり g の定義から $g(y) = x$ 。ゆえに $g(f(x)) = g(y) = x$ 。ゆえに $g \circ f = \text{id}_X$ 。

以上の議論は一般化される: $f(x) = e^x$ と $g(y) = \log y$, $f(x) = \tan x$ ($x \in (-\pi/2, \pi/2)$) と $g(y) = \tan^{-1} y$ について、ほとんど同様。さらに一般化できる、という話を以下で見る。

3.5 逆写像 逆行列の話と比べてみよう

これからする話は、線形代数で聞いた話とよく似ている、と思うかもしれない。それで先回りして説明しておく。

n 次実正方行列 A に対して、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^n$) で定義できる。このとき、次のことが成り立つ。

- A の逆行列は存在するならば 1 つしかない。(それを A^{-1} で表す。)
- f が全単射 $\Leftrightarrow A$ の逆行列が存在する。
- A の逆行列が存在するならば $(A^{-1})^{-1} = A$ 。
- A, B がともに逆行列を持つならば $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 。

以上のことは、まだ教わっていないかもしれないけれど、そのうちに教わるはず。この話と同じようなことが逆写像についても成り立つ。

以下 3 枚のスライドで一気に証明する。

3.5 逆写像 一意性

命題 (逆写像の一意性)

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像は存在すれば1つしかない。

証明 $g, g': Y \rightarrow X$ が

$$g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y, \quad g' \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g' = \text{id}_Y$$

を満たすとする。これらのことと、結合法則から

$$g' = g' \circ \text{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

ゆえに $g' = g$. □

定義 (逆写像の記号)

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 f^{-1} で表す。

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ であり

$$(2) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

3.5 逆写像 全単射 \Leftrightarrow 逆写像存在

命題 (逆写像が存在 \Leftrightarrow 全単射)

- ① $f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するならば、 f は全単射である。
- ② $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば f の逆写像が存在する。

証明 (1) 一般に恒等写像は全単射であることを思い出す。

$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ は全射だから、 f は全射である。 $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ は単射だから、 f は単射である。

(2) f は全射だから、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ 。このような $x \in X$ はただ1つしかない。実際 $x, x' \in X$ かつ $y = f(x)$ かつ $y = f(x')$ とすると、 $f(x) = f(x')$ であり、 f が単射であるから $x = x'$ 。

$g: Y \rightarrow X$ を $g(y) = x$ (x は $x \in X \wedge f(x) = y$ を満たす) で定めると、 $g = f^{-1}$ 。実際

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \wedge \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

が成り立つ。その証明は3枚前の前のスライド「後のために逆関数の例を思い出して予告」の議論と同じである。□

3.5 逆写像 $(f^{-1})^{-1} = f, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

命題 (逆写像の逆写像は元の写像, 合成写像の逆写像)

- ① $f: X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、 $(f^{-1})^{-1} = f$.
- ② $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ の逆写像がともに存在するならば、 $f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

証明 (1) $g := f^{-1}$ とおくと、 $g: Y \rightarrow X$ かつ

$$g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y.$$

ゆえに f は g の逆写像である。ゆえに $f = g^{-1} = (f^{-1})^{-1}$.

(2) 逆写像の定義の条件を確かめる。

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{-1} \circ \text{id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= ((g \circ f) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \text{id}_X) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z. \end{aligned}$$

ゆえに $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

3.5 逆写像 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

次の関係はしばしば用いる。

命題

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、任意の $x \in X$, 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

証明

(\Rightarrow) $y = f(x)$ ならば

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = \text{id}_X(x) = x.$$

(\Leftarrow) $x = f^{-1}(y)$ ならば

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = \text{id}_Y(y) = y. \quad \square$$

問9 解説

手書きで解説する。

問 10 紹介

問題文は以下にあります。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi10.pdf> (PDF)

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi10.tex> (TeX ソース)

(7/22 11:50) 問題を公開しました。(3) のヒントは一日待って、7/23 19:00 発表予定です。

-  中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).