2020 年度 数理リテラシー 期末レポート課題

2020 年 8 月 5 日 (水曜) 15:00 公開, 担当　桂田 祐史

問題は 2 ページ目以降にある。

- 締め切りは 8 月 6 日 15:00、Oh-o! Meiji で提出すること。
(なるべく 8 月 5 日のうちに目を通して、疑問点があればその日のうちにメールで質問することを勧める。)

- 解答は A4 サイズの PDF で提出すること。最初のページの一番上に学年・組・番号 (学生番号ではない 1〜2 桁の数) ・氏名を記入すること。式が正しく表記される限り、PDF の作成方法は問わない (手書き、TEX, ワープロソフト、何でも良い)。原則として単一の PDF で提出すること。サイズが 10MB を超える場合は、複数のファイルにすることを認める (Oh-o! Meiji で追加提出して下さい)。

- 締め切りまでは、訂正のための追加提出を 1 回まで認める。
(時間ギリギリまで見直しをして最後に提出とすると、失敗しかねないので、時間に少し余裕のある段階で提出し、見直して訂正したくなったことが出て来たら、最後にそれを追加提出する、と言う手順を勧めます。)

- 解答の順番は自由。ただし小問 (かっこ付きの番号をつけてあるもの) をバラバラの位置に解答するのは避けて、例えば **1.** の場合、(1),(2),(3),(4) の解答を 1 箇所にまとめて書いて下さい。

- 講義資料、参考書など、何を参考にしても構いません。たまたま同じ問題の解答が見つかった場合はそれを書いても構いません (ただし記号はこの科目で使っているものに従って下さい。解答が正しいかどうかは自己責任です。)。

- 問題の内容について、自分以外の人に質問・相談しないこと。

- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構いません。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと。

- 特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良いです (授業内容のコピー&ペーストをする必要はない)。授業中に説明していない定理を用いるときは、証明してから用いること。

- いわゆる「持ち込み不可」の試験ではないので、定義や宿題などをそのまま写せば良いような問題は避けました。そのため、例年とは少し傾向が変わって見えるかもしれませんが、大部分は基本的な問題なので落ち着いて問題文を読めばどうすれば良いか分かると思います。当たり前ですが、解きやすい問題から解いていって下さい。

- 問題の配列は、解答に必要なものが授業で説明した順となっています。そのため、後の方に簡単な問題があったりするので、まずは全体に目を通すことを勧めます。

- 計算結果の確認にコンピューターを使っても良いです。その場合も、必要なことはレポートに書くこと (あくまでも計算の途中経過は書いてあって、コンピューターは計算結果の確かめに使うことにとどめなさい、ということです)。

- 疑問点があればメールで質問して下さい (アドレスは Oh-o! Meiji のシラバスの補足に書いてあります)。
  - 8/5 18:00 までに届いたものは、8/5 21:00 までに回答します。
  - 8/5 22:00 までに届いたものは、8/6 0:00 までに回答します。
  - 8/6 0:00 までに届いたものは、8/6 9:00 までに回答します。
  - 8/6 9:00 までに届いたものは、8/6 12:00 までに回答します。

  主な質問とそれに対する回答は授業 WWW サイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/` で公開する予定です。

- 8/6 10:00〜12:00 に Zoom で質問を受け付けます (参加方法は授業の質問 Zoom ミーティングと同じです)。

1. 次の各文を記号のみで表せ (i は虚数単位、p, q は命題、A, B は集合とする)。
(1) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は複素数であり、実数ではない、さらに $\frac{1}{7}$ は有理数であり、整数ではない。 (2) 「p ならば q である」の否定は「p であるのに q でない」と同値である。 (3) A と B の共通部分が空集合であるためには、A が B の補集合に含まれることが必要十分である。 (4) ある複素数 z が存在して、任意の複素数 x に対して、$x+z=x$ が成り立つ。

2.

(1) p と q を命題とするとき、$p \Rightarrow q$, $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$, $q \Rightarrow p$, $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ の真理値表を書け (真理値の求め方は問わない)。

(2) 「p ならば q である」の否定は「p であるのに q でない」と同値であることを示せ。

(3) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, さらに任意の自然数 n について、写像 $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1]) \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

の否定を書け。

3. (1) A, B, C, D は複素数とする。$AB=0$ と $CD=0$ が同時に成り立つことと

$$(A=C=0) \vee (A=D=0) \vee (B=C=0) \vee (B=D=0)$$

は同値であることを示せ (有名な論理の法則を使います。それが分かるように書いて下さい)。
(2) 連立方程式

$$\begin{cases} (2x^2-1)(y^3-y)=0 \\ (2y^2-1)(x^3-x)=0 \end{cases}$$

を解け。

4. 次の各命題を日本語で表し (数式の部分は数式のままで良い)、真である場合はそれを証明し、偽である場合はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 論理式で書いて、その否定命題を証明せよ。
(1) $(\forall x \in \mathbb{Z})$ $(\exists y \in \mathbb{Z})$ $y > x^2$ (2) $(\forall z \in \mathbb{C})$ $(\exists w \in \mathbb{C})$ $zw = 1$

5. (1) P と Q を集合とするとき、以下の集合の定義を述べよ。(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$ (c) $P \setminus Q$ (d) $P \times Q$
(2) P を集合とする。P の部分集合、P の冪集合とは何か、それぞれ定義を述べよ。
(3) $P = \{a,b,c\}$, $Q = \{x,y,z\}$ とするとき、$P \times Q$, 2^P を求めよ。

6.

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $n > x$ を証明せよ。(アルキメデスの公理 $(\forall a > 0)$ $(\forall b > 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $na > b$ は認める。)

(2) 実数 x が条件

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad |x| < \varepsilon$$

を満たすならば $x=0$ であることを証明せよ。

(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \right\}$ が成り立つとする。$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ。結果だけでなく証明もすること。

注意 (1), (2), (3) の間に直接の関係はない。独立した問題である。

7. $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を集合族とする。(1) 任意の自然数 k に対して、$A_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であることを示せ。 (2) 任意の自然数 ℓ に対して、$A_\ell \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であることを示せ。 (3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が成り立つならば、すべての自然数 m に対して、$A_m = A_1$ が成り立つことを示せ。

8. 次の [A], [B] のいずれか一方を選んで解答せよ。いずれも $\boxed{}$ の中に、a, b, c, d についての条件を入れて下さい。説明 (理由) は書かなくて良いです。

[A] (1) $a, b \in \mathbb{R}$ とする。$f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めた $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全単射であるためには、a, b が $\boxed{\text{ア}}$ を満たすことが必要十分条件である。

(2) $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする。$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めた $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全単射であるためには、a, b, c が $\boxed{\text{イ}}$ を満たすことが必要十分条件である。

(3) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とする。$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めた $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全単射であるためには、a, b, c, d が $\boxed{\text{ウ}}$ を満たすことが必要十分条件である。

[B] $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \cos(ax)$, $g(x) = \cos(ax + b)$ で $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$, $g\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ を定義する。

(1) f が単射であるためには、$\boxed{\text{ア}}$ が必要十分である。また全射であるためには $\boxed{\text{イ}}$ が必要十分である。ゆえに全単射であるためには $\boxed{\text{ウ}}$ が必要十分である。

(2) g が全単射であるためには、$\boxed{\text{エ}}$ が必要十分である。

9. $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ $(x \in [0, 2\pi])$ とする。

(1) $X \subset [0, 2\pi]$, $Y \subset \mathbb{R}$ に対して、$f(X)$, $f^{-1}(Y)$ の定義を書け。

(2) $f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)$, $f\left(\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right)$, $f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right)$, $f^{-1}\left(\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right]\right)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ を求めよ。

10. 次の [A], [B] のいずれか一方を選んで解答せよ。

[A] (1) 任意の写像 $f\colon X \to Y$ と、X の任意の部分集合 A に対して $f^{-1}(f(A)) \supset A$ が成り立つことを示せ。また、$f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立たないような $f\colon X \to Y$ と A の例をあげよ。

(2) 任意の写像 $f\colon X \to Y$ と、Y の任意の部分集合 B に対して $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ が成り立つことを示せ。また、$f\left(f^{-1}(B)\right) = B$ が成り立たないような $f\colon X \to Y$ と B の例をあげよ。

[B] $f\colon X \to Y$ は全単射とする。Y の部分集合 B に対して、

$$A_1 := \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \quad A_2 := \left\{x \in X \;\middle|\; (\exists y \in B)\ x = f^{-1}(y)\right\}$$

とおく (ただし f^{-1} は f の逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ である)。

(1) A_1, A_2 のことをそれぞれ何と呼ぶか。

(2) $A_1 = A_2$ であることを示せ。

注意 実は $A_1 = A_2$ が成り立つことは授業で紹介してありますが、証明はしていません。それをやって下さい、という問題です。