

数理リテラシー 第5回

～ 論理 (5) ～

桂田 祐史

2022年5月18日

目次

① 連絡事項 & 本日の内容

② 述語論理 (続き)

- 複数の量称を含む命題 (つづき)
 - \forall と \exists を入れ替えると違ってしまう
- 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

③ 述語論理

- 量称を含む論理の法則, 特に否定命題
- 補足: 論理式における演算の結合の優先順位

④ 集合

- はじめに
- 集合の定義、要素
- 集合の相等
- 集合の表し方
 - 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)
 - 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

⑤ 参考文献

連絡事項 & 本日の内容

- 本日の授業内容: (前半) 複数の量称を含む命題の否定, (後半) 第 II 部 (§3) 集合に入ります (桂田 [1]).
(けわしい道は終わり、しばらくは平坦?)
- 宿題 3 の解説を行います。
今回は、書き間違いなどをのぞき、間違っている人はほとんどいなかった。
 - 式を日本語にするときに、なるべくこう書くようにして下さい、を無視した答案がちらほら。「ある $\bigcirc\bigcirc$ が存在して」
 - 「 x が正の数ということを単に $x > 0$ と書いていいことにしよう (例えば $(\forall x > 0)$ とか $(\exists L > 0)$ とか)」というのを無視して、 $x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$ のようなことをした人がちらほら。
($\forall x: x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$) は良いけれど、 $(\forall x \in \mathbb{R} \wedge x > 0)$ と書かれたのは見たことがない。
マイナーな分野では、実数でない x に対して、 $x > 0$ という記号を使うことがある。だから、単に $x > 0$ とだけ書くのは誤解される心配がある、ということだけれど、それは無視しよう、ということ。
「コミュニケーションで難しいなあ」と思う。…そうそう。「スキャンして PDF」をよろしく。
- 欠席した場合。宿題ルール。Oh-o! Meiji シラバスの補足に書いた。

2.4.5 \forall と \exists を入れ替えると違ってしまう

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y \quad (\text{実は真})$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y \quad (\text{実は偽})$$

で分かるように、 \forall と \exists の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2つの連続する \forall や、2つの連続する \exists を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

2.4.5 \forall と \exists 入れ替えると違ってしまいう 例

例 5.1 (じゃんけん)

3点からなる集合 $J = \{\text{ぐう}, \text{ちょき}, \text{ぱあ}\}$ に、次のような 2 項関係 \succ を導入する。

ぐう \succ ちょき, ちょき \succ ぱあ, ぱあ \succ ぐう

これ以外の場合は、 \succ は不成立とする ($\not\succeq$)。例えば、ぱあ $\not\succeq$ ちょき (要するに「じゃんけん」の勝ち負けの判定)。こうすると、

$$(\forall t \in J)(\exists k \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても、それに勝つ手 k がある) は真であるが、

$$(\exists k \in J)(\forall t \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても勝ってしまう “必勝手” k がある) は偽である。



2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1 $\forall x$ を見たら「 x を任意の□とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。)

例 5.2

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0.$$

証明 x を任意の実数とする。 (とにかくこう書いてみる。)

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も $x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

注意 (当たり前) \forall を使って書かれた命題を日本語に翻訳するときは、「すべての」と「任意の」のどちらも使えるが、証明を書くときは「任意の」一択である。「 x をすべての実数とする」はおかしい。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2 $\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「 x を とおくと」あるいは「 x を とすると」と書き出せばよい。

例 5.3

$$(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 - 3x + 2 = 0.$$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの……方程式を解くと、 $(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

証明 $x = 1$ とおくと、 x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0$. □

注 方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3 複数の量称 (\forall, \exists) がある場合は、左から順に処理する。

例 5.4

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明 x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z}) \dots$ を見て、 y を探す。整数で、 $x + y = 0$ を満たすもの。 y として $y = -x$ が見つかる。そこで...)
 $y = -x$ とおくと、 y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (3)

もう一つ例をあげる。

例 5.5

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、 x を探す気持ちになる。 $(\forall y \in \mathbb{Z}) x + y = y$ を満たす x として、 $x = 0$ が見つかる。そこで…

証明 $x = 0$ とおくと、 x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (一番大事なことをこの1枚で)

問 次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

(ただし I は \mathbb{R} の区間で、 f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは??

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答 (\forall は \exists に、 \exists は \forall に置き換え、最後の条件を否定する。)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

自分が理解していない理論を使った議論は、わからなくても、そこに現れる数式の計算自体はできることが珍しくない。論理についても、式で表現してあれば、(意味がわからなくても) その計算は機械的にできる。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題

定理 5.6

以下の (1)~(7) が任意の述語 $P(x)$, $P(x, y)$ について成り立つ。

- ① $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$
「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
- ② $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x (\neg P(x))$
「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、 $P(x)$ が成り立たない」
- ③ $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$
- ④ $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
- ⑤ $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

特に (1),(2),(3) が重要である。(3) は同値でないことだけでも覚える。
それ以外はその都度考えれば十分。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

定理 5.6 (続き)

$$\textcircled{6} \quad \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$$

$$\textcircled{7} \quad \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

- (6) で \wedge の代わりに \vee としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \quad (\text{真とは限らない})$$

- (7) で \vee の代わりに \wedge としたものは成り立たない。

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \quad (\text{真とは限らない})$$

(例えば整数について考えていて、 $P(x)$ は「 x が偶数である」、 $Q(x)$ は「 x は奇数である」とすると、偽であることが分かる。)

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

$$\textcircled{i} \quad \neg((\forall x : P(x)) Q(x)) \equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x)$$

$$\textcircled{ii} \quad \neg((\exists x : P(x)) Q(x)) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$$

2022/5/18 の授業は、ここでタイムアウト

(i) の証明

$$\begin{aligned} \neg((\forall x : P(x)) Q(x)) &\equiv \neg(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))) \\ &\equiv \exists x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ &\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x). \end{aligned}$$

(ii) も同様に証明できる。興味あればやってみよう (解答はこの PDF の最後)。

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (1)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、 $p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$ 。

しかし、括弧が多いと式が読みにくくなるので、数の四則演算でそうしたように、論理式についても、括弧を減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

ある本によると、優先順位の高い順に

- ① $=, \in$
- ② $\neg, \forall x, \exists x$
- ③ \wedge, \vee
- ④ \Rightarrow
- ⑤ \Leftrightarrow, \equiv

(\Leftrightarrow はテキストによっては、 \Rightarrow と同じ、となっている。)

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

上のルールにおいても、 \wedge と \vee は同じ優先順位なので、 \wedge と \vee が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必要であることに注意しよう。(\wedge を論理積、 \vee を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から \wedge を優先して、 $(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

この講義では (練習時間は取れないので) 括弧を省略しない。
(ただし、 \equiv の優先順位が一番低いことは仮定している。)
理解している自信がある人が括弧を省略するのは認める。

2022/5/18 の授業はここまで進まなかった。

集合は割と新しい。

Georg Cantor (1845–1918) が創始者。色々難しいことをやった。
ここでは数学の言葉としての集合を習得することが目的である。

次のキーワードは覚えておくべき(?)

素朴な集合論 \longleftrightarrow 公理的集合論

3.2 集合の定義、要素

集合 (set) とは、範囲が明確に定まったものの集まりのことである。

ただし、1個だけでも集合である。また0個でも集合である (後で説明する空集合)。

A, B, \dots などの文字で表す (大文字を使うことが多い)。

集合 A に属するものを A の**要素**あるいは**元**^{げん}と呼ぶ (英語では element あるいは member と呼ぶ)。

a が集合 A の要素であることを

$$a \in A \quad \text{あるいは} \quad A \ni a$$

と表し、「 a は A に属する」、「 a は A に含まれる」、「 a belongs to A 」、「 a is in A 」、「 A は a を含む」、「 A includes a 」、「 A contains a 」などという。なるべく最初の「 a は A に属する」を使うことにする。

$a \in A$ の否定は、 $a \notin A$ あるいは $A \not\ni a$ と表す。

3.2 集合の定義、要素 (続き)

例 5.7

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (覚えているかな?)

それぞれ自然数全体の集合、整数全体の集合、有理数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合

例 5.8

「大きい数の全体の集合」は NG.

例 5.9

$1 \in \mathbb{N}, -1 \notin \mathbb{N}, -1 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}, i \notin \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}$.
(ただし i は虚数単位である。)

3.2 集合の定義、要素 (続き) 読み方補足

$x \in A$ を「 A に属する x 」, “ x which belongs to A ” と読むのが適当な場合がある。

「任意の $x \in A$ に対して、 $x \in B$ 」は「 A に属する任意の x に対して x は B に属する。」あるいは「 A の任意の要素 x に対して x は B に属する。」

その他の例をあげる。

$x \in \mathbb{R}$ を「 \mathbb{R} に属する x 」, 「実数 x 」 と読む。

$x > 0$ を「正の数 x 」 と読む。

3.3 集合の相等

2つの集合 A と B に対して、

$$\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

が成り立つとき、 A と B は**等しい**と定義し、 $A = B$ で表す。

\Leftrightarrow を用いると

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

と書くこともできる。

教科書 (中島 [2]) では、 A と B が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つこと、と書いてあるが、 $\forall x$ が省略されていると考えるべき。

$A = B$ の否定は $A \neq B$ で表す。

3.4 集合の表し方

3.4.1 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)

要素を書き並べて (複数あるときは, で区切る)、 $\{\}$ (braces) で囲む。

例 5.10

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{0\}.$$

このとき $1 \in A$. しかし $0 \notin A$.

順番は不問にする (変えても同じ集合), 重複も認める

例 5.11

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この方法は、要素が無限にたくさんあるときは困る。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

と書くこともあるが、あいまいなことは否めない。

3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

条件 $P(x)$ を満たす x 全体の集合は

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。本によっては $\{x; P(x)\}$, $\{x : P(x)\}$ とも書く。

例 5.12

$$\{x \mid x \text{ は実数}\}$$

$$\{y \mid y \text{ は } 1 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の自然数}\}$$

$$\{n \mid n \text{ は自然数かつ } 2 \text{ で割り切れる}\}$$

例 5.13

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\}$$

3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

1つの集合を表す内包的定義の書き方は無数にある。

例 5.14

$$\begin{aligned}\{1, 2, 3\} &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } 0.3 < x < 3.7\} \\ &= \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}\end{aligned}$$

おまけ $\neg(\exists x : P(x)) Q(x) \equiv (\forall x : P(x))\neg Q(x)$ の証明

$$\begin{aligned}\neg((\exists x : P(x)) Q(x)) &\equiv \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \\ &\equiv \forall x\neg(P(x) \wedge Q(x)) \\ &\equiv \forall x((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))) \\ &\equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \\ &\equiv (\forall x : P(x))\neg Q(x). \quad \square\end{aligned}$$

(解説) この証明では、次の4つのことを使っている。

- $(\exists x : P(x))Q(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- $(\forall x : P(x))Q(x) \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$
- $\neg(\exists xP(x)) \equiv \forall x\neg P(x)$
- ド・モルガンの法則 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

参考文献

- [1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合,
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/set.pdf>
(2013–2021).
- [2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).