数理リテラシー 第6回

～ 集合 (1) ～

桂田 祐史

2022 年 5 月 25 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 本日の授業内容: 集合の基本用語 (定理はほぼない、習うより慣れろ) 桂田 [1] の §3.1–3.7 くらい？
- 宿題 4 の解説を行う。
- 宿題 5 を出します。〆切は 5 月 30 日 (月曜)13:30 です。原則として、6 月 1 日 15:20 以降の提出は受け付けません。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっと `meiji` ドット `ac` どっと `jp`)。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

定理 6.1 (再度掲示)

以下の (1)〜(7) が任意の述語 $P(x)$, $P(x, y)$ について成り立つ。

1. $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x))$
   「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
2. $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x))$
   「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、$P(x)$ が成り立たない」
3. $\exists y \forall x\ P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y\ P(x, y)$
4. $\forall x \forall y\ P(x, y) \equiv \forall y \forall x\ P(x, y)$
5. $\exists x \exists y\ P(x, y) \equiv \exists y \exists x\ P(x, y)$

これらは付帯条件つきでも成り立つ。例えば (1), (2) について

(i) $\neg\left((\forall x : P_0(x))\, P(x)\right) \equiv (\exists x : P_0(x)) \neg P(x)$

(ii) $\neg\left((\exists x : P_0(x))\, P(x)\right) \equiv (\forall x : P_0(x)) \neg P(x)$

おまけ　$\neg(\exists x : P_0(x))\, P(x) \equiv (\forall x : P_0(x))\neg P(x)$ の証明

前のスライドの (ii) を証明しよう。

$$
\begin{aligned}
\neg\left((\exists x : P_0(x))\, P(x)\right) &\equiv \neg\left(\exists x(P_0(x) \wedge P(x))\right) \\
&\equiv \forall x \neg\left(P_0(x) \wedge P(x)\right) \\
&\equiv \forall x\left((\neg P_0(x)) \vee (\neg P(x))\right) \\
&\equiv \forall x(P_0(x) \Rightarrow \neg P(x)) \\
&\equiv (\forall x : P_0(x))\neg P(x). \quad \square
\end{aligned}
$$

(解説) この証明では、次の 4 つのことを使っている。

- $(\exists x : P_0(x))P(x) \equiv \exists x(P_0(x) \wedge P(x))$
- $(\forall x : P_0(x))P(x) \equiv \forall x(P_0(x) \Rightarrow P(x))$
- $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$
- ド・モルガンの法則 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

集合は割と新しい。

Georg Cantor (カントール) (1845–1918) が創始者。色々難しいことをやった。

ここでは数学の言葉としての集合を習得することが目的である。

次のキーワードは覚えておくべき (？)

素朴な集合論 $\longleftrightarrow$ **公理的集合論**

3.2 集合の定義、要素

集合 (set) とは、範囲が明確に定まったものの集まりのことである。

ただし、1 個だけでも集合である。また 0 個でも集合である (後で説明する空集合)。

$A, B, \cdots$ などの文字で表す (大文字を使うことが多い)。

集合 A に属するものを A の**要素**あるいは**元**(げん)と呼ぶ (英語では element あるいは member と呼ぶ)。

a が集合 A の要素であることを

$$a \in A \quad \text{あるいは} \quad A \ni a$$

と表し、「a は A に属する」,「a は A に含まれる」, "a belongs to A", "a is in A", 「A は a を含む」, "A includes a", "A contains a" などという。

なるべく最初の「a は A に属する」を使うことにする。

$a \in A$ の否定は、$a \notin A$ あるいは $A \not\ni a$ と表す。

例 6.2

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$　(覚えているかな？)
それぞれ自然数全体の集合、整数全体の集合、有理数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合

例 6.3

「大きい数の全体の集合」は NG.

例 6.4

$1 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $i \notin \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$.
(ただし i は虚数単位である。)

3.2 集合の定義、要素 (続き)　読み方補足

$x \in A$ を「A に属する x」, “x which belongs to A”, 「A の要素 x」と読むのが適当な場合がある。

「任意の $x \in A$ に対して、$x \in B$」は「A に属する任意の x に対して x は B に属する。」あるいは「A の任意の要素 x に対して x は B に属する。」

その他の例をあげる。

$x \in \mathbb{R}$ を「$\mathbb{R}$ に属する x」, 「$\mathbb{R}$ の要素 x」, 「実数 x」と読む。

(やや脱線？) $x > 0$ を「正の数 x」と読む。

3.3 集合の相等

2 つの集合 A と B に対して、

$$\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \land (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

が成り立つとき、A と B は**等しい**と定義し、$A = B$ で表す。
$\Leftrightarrow$ を用いると

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

と書くこともできる。

教科書 (中島 [2]) では、A と B が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つこと、と書いてあるが、$\forall x$ が省略されていると考えるべき。

$A = B$ の否定は $A \neq B$ で表す。

3.4 集合の表し方

3.4.1 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)

要素を書き並べて (複数あるときは , で区切る)、{} (braces) で囲む。

例 6.5

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0\}$.
このとき $1 \in A$. しかし $0 \notin A$.

順番は不問にする (変えても同じ集合), 重複も認める

例 6.6

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この方法は、要素が無限にたくさんあるときは困る。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

と書くこともあるが、あいまいなことは否めない。

3.4.1 要素の条件を書く方法 (内包的定義) 授業後の補足

日常語で書いてあるだけでは不十分か。

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

とするとき

$$\forall x \left(x \in A \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \cdots \vee x = a_n \right).$$

3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

条件 $P(x)$ を満たす x 全体の集合は

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。本によっては $\{x; P(x)\}$, $\{x : P(x)\}$ とも書く。

例 6.7

$\{x \mid x$ は実数$\}$
$\{y \mid y$ は 1 以上 3 以下の自然数$\}$
$\{n \mid n$ は自然数かつ 2 で割り切れる$\}$

例 6.8

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \land y \geq 0\}$$

3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

1 つの集合を表す内包的定義の書き方は無数にある。

例 6.9

$$
\begin{aligned}
\{1,2,3\} &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 3\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } 0.3 < x < 3.7\} \\
&= \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}
\end{aligned}
$$

$\{x \mid P(x)\}$ において、$P(x)$ が複数の条件を ∧ (かつ, and) で結んだ条件であるとき、∧ をコンマ , で済ませることが多い。

例えば

$$\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < 2\right\}$$

を

$$\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2\right\}$$

のように書く。

この講義では省略せずに書く。

(時々、文章中の , の意味が ∧ か ∨ か、文脈で判断することを期待されているときもある。)

いくつか変種がある。

1. $\{f(x) \mid P(x)\}$ は $\{y \mid (\exists x : P(x))\ \ y = f(x)\}$ という意味とする。これは高校数学でもすでに使っていたはず。

例 6.10 (正の偶数全体の集合)

$$\{2n \mid n \text{ は自然数}\} = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x = 2n\}\,.$$

例 6.11 (平方数の全体)

$$\left\{n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{x \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{N})\ x = n^2\right\}.$$

2. $\{x \mid x \in A \land P(x)\}$ を $\{x \in A \mid P(x)\}$ とも書く。

例 6.12

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \land 1 \le x \le 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 3\}\,.$$

例 6.13

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \land x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

ただし、最後に開区間の記号 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を用いた。

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

右側が $\infty)$, 左側が $(-\infty$ となっている場合も用いる。実数 x について、$x < \infty$ と $-\infty < x$ はつねに成り立つので、その条件は書かなくても同じこと (例えば $a < x < \infty$ は $a < x$ と書けば良い)。

$$
\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \quad \text{(無条件なので実数全体)}.
\end{aligned}
$$

注意　(a, b) は点の座標の記号とかぶる。フランスでは (の代わりに],) の代わりに [を使う。例えば $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. 合理的かもしれない。

3.7 和集合と積集合

定義 6.14 (和集合, 積集合)

A, B を集合とする。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

を A と B の**和集合**あるいは**合併集合** (union of A and B) と呼ぶ。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

を A と B の**積集合**, **共通部分**あるいは**交わり** (intersection of A and B) と呼ぶ。

例 6.15

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

定義 6.16 (差集合, 補集合)

A, B を集合とする。

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

を A と B の**差集合** (set-theoretic difference of A and B) と呼ぶ。$A - B$ と表すこともある。

考察する対象全体の集合 X が定まっている場合がある。そのとき X を**全体集合** (universal set) と呼び、X の任意の部分集合 A に対して、$X \setminus A$ を A の**補集合** (the complement of A) と呼び、$A^{\complement}$ で表す。

$$A^{\complement} := X \setminus A = \{x \mid x \in X \land x \notin A\}.$$

例 6.17

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合と考えるとき、

$$A^{\complement} = \{4, 5, 6\}, \quad \left(A^{\complement}\right)^{\complement} = \{4, 5, 6\}^{\complement} = \{1, 2, 3\} = A.$$

後で説明するが、$\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$ は一般に成り立つ。 □

余談　実は補集合の記号には色々なものがある。A の補集合を表すのに、$\complement A$ とか $\overline{A}$ とか、A' などを用いる。高校数学では $\overline{A}$ を用いたが、大学ではそれほどメジャーではない。(個人的には、$\overline{A}$ を別の意味に使いたいの

ヴェン図 (Venn diagram) で表すと

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。

(# はシャープ ♯ でなく、number sign である。その他 $|A|$ という記号で表すこともある。)

例 6.18

$$\#\emptyset = 0,\ \#\{1\} = 1,\ \#\{1,2\} = 2,\ \#\{a,b\} = \begin{cases} 2 & (a \neq b) \\ 1 & (a = b). \end{cases}$$

命題 6.19 (直積集合の要素数)

有限集合 A, B に対して、$\#(A \times B) = \#A\#B$ が成り立つ。

命題 6.20 (冪集合の要素数)

有限集合 A に対して、$\#\left(2^A\right) = 2^{\#A}$ が成り立つ。

問 4 解説

手書きで解説する。

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/set.pdf (2013–2021).

[2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).