数理リテラシー 第8回

～ 集合 (3), 写像 (1) ～

桂田 祐史

2022 年 6 月 8 日

目次

本日の内容&連絡事項

- 宿題6(問6)の解説を行います。
- 遅くならないうちにフィードバックを読みましょう。読んでいないと思われる人がいます。
- 本日の授業内容: 集合族の続き。それから集合に関する命題の証明。特に無限集合族の合併と共通部分についての等式の証明。これで第II部「集合」は一応おしまいです。その後、いよいよ最終第III部「写像」に入ります。今回時間が余ったら突入するけれど…
- 宿題7を出します。〆切は6月13日(月曜)13:30です。
- 6月22日は中間試験を行います。

3.11 集合族 (続き)

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

例. $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1,2,3\}\}$ 　2 つの集合 $\{1\}$, $\{1,2,3\}$ からなる集合

例. A を集合として、$\mathcal{A} = 2^A$ (A のベキ集合).

ここで $\mathcal{A}$ は A のカリグラフィック・フォント (の 1 つ) である。

(これまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィク・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。)

3.11 集合族　有限個の集合の和集合と積集合

集合族 $\mathcal{A}$ の和集合 (合併集合) $\bigcup \mathcal{A}$, 積集合 (共通部分) $\bigcap \mathcal{A}$ が重要である。

ここでは、無限個の集合からなる集合族の和集合 (合併集合)、積集合 (共通部分) に慣れることを目標とする (頻出するので必要)。特に要素が自然数で番号をつけられる集合族 $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して、和集合 (合併集合)

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

積集合 (共通部分)

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

を扱う (この方針は、教科書 中島 [1] と同じ)。

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

$(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ の真似)

後のために整理しておく。

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \lor x \in A_2 \lor \cdots \lor x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \land x \in A_2 \land \cdots \land x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

定義 8.1 ($\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$)

すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、和集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く), 積集合 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く) を次のように定める。

(1)
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}.$$

(2)
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}.$$

極限により定義するのでは**ない！**

(1), (2) はしっかり覚える

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？まずは証明抜きで。

例

$A_n = \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1,1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例　$A_n = \{x\in\mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 = (-1,1).$$

例　$A_n = \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -n < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (-n,1)$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = (-1,1/n)$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-\infty,1) = \{x\in\mathbb{R} \mid x<1\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = (-1,0].$$

3.12 集合についての定理, それらの証明

定理 8.2 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、A, B, C は X の部分集合とする。

1. $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律), $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
2. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律)
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
7. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
8. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (ド・モルガン律)
9. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3.12 集合についての定理, それらの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、ヴェン図を考えるときの参考にするけれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族については、ヴェン図も正確には描きようがないし、実は4つの集合くらいから、一般的な状況を図で表現することが難しくなる。)

以下の定義が議論の基礎となる。

1. $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \land (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A))$
2. $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
3. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

例 8.3

集合 A, B, C が $A \subset B, B \subset C$ を満たすとき、$A \subset C$ が成り立つことを示せ。
(証明) $A \subset B, B \subset C$ を仮定する。
x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ であるから $x \in B$. $B \subset C$ であるから $x \in C$. ゆえに $A \subset C$. □

例 8.4

集合 A, B, C, D が $A \subset B, C \subset D$ を満たすとき、$A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。
(証明) $A \subset B, C \subset D$ を仮定する。
x を $A \times C$ の任意の要素とすると、ある $a \in A, c \in C$ が存在して $x = (a, c)$.
$A \subset B$ であるから、$a \in B$. $C \subset D$ であるから $c \in D$. ゆえに
$x = (a, c) \in B \times D$. 従って $A \times C \subset B \times D$. □

包含関係の証明は、こういう感じが多い。等式 $A = B$ の証明は、$A \subset B$ と $B \subset A$ の証明をすれば良いが、一気にやれる場合もある。

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).