数理リテラシー 第11回

～ 写像 (1) ～

桂田 祐史

2022 年 6 月 29 日

目次

本日の内容＆連絡事項

- 本日の講義内容: いよいよ最終第 III 部「写像」に入ります。
- 中間試験の採点少し遅れています。現時点で解答例は WWW で公開していて、採点終了次第、良くあった間違い例などについての説明を追加します。それからフィードバックします。お知らせしますので、チェックした上で質問があればして下さい。
- 宿題 8 を出します。〆切は 7 月 4 日 (月曜)13:30 です。

本日の内容&連絡事項

- 解答は発表するけれど、返却は二、三日中に。
- 反省は個人でするべき。平均とか気にしない。本当は一人一人と話をすれば良いのだろうけれど、それは難しく、答案が返ってくると、得点が気になって冷静に反省できないかも。
- そこで少し話す。例年 140 点満点で平均が 70 点くらい (今年の出来は全般的には例年より良い)。半分の得点率はショック、となる必要はない。期末ではもっとできるようになろう、と考えるべきだけど。
- 普通早く習ったことの成績は良い (まだ忘れないので)。期末では、今回の試験範囲の出来はあがり、新しいのは出来が悪い、となるのが普通。
- 証明は苦手な人が多いが健闘している、という印象。今後もあきらめないで。次回はクリアできるようになろう、と考えてほしい。
- 宿題で注意されたことが改められていない、という人が少数いる。「カンマちゃんと書きましょう」「A と B の、と書きましょう」とか。
- $\forall x$ を見たら「x を任意の $\boxed{}$ とする」と書こうとか、$A \subset B$ を証明するには、「x を A の任意の要素とする」と書き出そう、とか。

写像とは 関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

において、x と y が数でないものも扱うことにして、それを**写像**(しゃぞう)と呼ぶ、ということ。

「関数は写像である」は正しい。

「数列は写像である」も正しい。

(関数と写像を区別しないで) すべての写像を関数と呼ぶ人、テキストもある。この講義ではそうしない (関数は写像であるが、写像の中には関数でないものもある、という立場)。

変数が数ベクトル、値が数ベクトルの写像を関数ということは割と多い (数ベクトルは数みたいなもんだ、と思ってる？)。

4.2 写像の定義

定義 11.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。 $f(x)$ を **x の f による像** (the image of x under f)、あるいは **f の x における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では "f of x" と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことが出来るが、$f\colon x \mapsto y$ と表すこともある。

X を f の**定義域** (the domain of definition of f, the domain of f) と呼ぶ。

この講義では、Y を **f の終域**と呼ぶことにする (英語では codomain と呼ばれたりするが、定着した訳語がない)。

集合

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\}$$

を写像 **f の値域** (the range of f), **f による X の像**と呼ぶ。

注 1　以上は実はユルイ定義で、厳密な定義 ($X \times Y$ の部分集合としてグラフを定義して、写像とはグラフである、と定める) は後で行う。

注 2　実は Y に名前をつけないテキストが多い。特に和書。教科書 (中島 [1]) では「レインジ」を採用しているが、実はちょっと変わっている。真似をしない方が良いかも。range の訳語のつもりだろうけれど、それは普通「値域」と訳され、後の $f(X)$ の意味であることが多い (高校の数学でもそういう意味である)。

注 3　定義域、値域は高校でも出て来たが、値の範囲ということで、答は不等式で書くのが普通であった。上の X, Y, $f(X)$ は集合である！

例 11.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である、とみなせる。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。明記しない場合は、変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を f の定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

$f(x)=x+2$ の場合、すべての実数 x に対して、$x+2$ が意味を持つので、$\mathbb{R}$ が f の定義域である。

$f(x)=\frac{1}{x}$ の場合は、$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ が f の定義域である。

$f(x)=\sqrt{x}$ の場合は、$\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ が f の定義域である。

例 11.3 (Dirichlet の関数)

写像 $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。例えば $D(1) = 1$, $D(1/2) = 1$, $D(\sqrt{2}) = 0$, $D(\pi) = 0$.

D を **Dirichletの関数**(ディリクレ)と呼ぶ。(歴史上、関数概念を見直す大きな契機となったことで有名な関数である。)

例 11.4 (多角形の面積)

$X :=$ 平面内の多角形全体の集合, $Y := \mathbb{R}$, $f(A) := A$ の面積, として、$f\colon X \to Y$ が定まる。

$f(A)$ を具体的に式で書けなくても、写像 (関数) とみなす。 □

例 11.5 ($\mathbb{R}^2$ の 1 次変換)

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とするとき、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める。$f(x,y) = (x', y')$ として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした f を $\mathbb{R}^2$ の **1 次変換**という。$ad - bc \neq 0$ のとき、f は、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に)、平面全体を平面全体に写す。合同な 1 次変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。

例 11.6 (恒等写像)

X は空集合でない集合とする。写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を

$$\mathrm{id}_X(x) = x \quad (x \in X)$$

で定める。id_X を X の**恒等写像** (the identity map of X) と呼ぶ。
恒等写像というのは、集合ごとに 1 つ定まるものである。

例 11.7 (包含写像)

$X \subset Y$ のとき、$i\colon X \to Y$ を $i(x) = x$ $(x \in X)$ で定める。この i を **包含写像**(ほうがんしゃぞう) (the inclusion map) と呼ぶ。i の代わりに ι と書くことも多い (ギリシャ文字のイオタ)。

例 11.8 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$$\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X \text{ を } \mathrm{pr}_X((x,y)) = x \ ((x,y) \in X \times Y),$$
$$\mathrm{pr}_Y\colon X \times Y \to Y \text{ を } \mathrm{pr}_Y((x,y)) = y \ ((x,y) \in X \times Y)$$

で定める。

それぞれ X への**射影**、Y への**射影** と呼ぶ。

例 11.9 (定値写像)

X, Y は空でない集合で、$c \in Y$ とするとき、$f\colon X \to Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。

例 11.10 (特性関数)

X は空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の**特性関数** (the characteristic function of A) または**指示関数** (the indicator function of A) とよぶ。

(**定義関数**と呼ぶ人もいる。確率論では、Fourier 変換のことを特性関数と言うので、特性関数というとそのことと誤解する人が多そう。)

Dirichlet の関数 $D \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、$\chi_{\mathbb{Q}}$ である。

例 11.11 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。$X := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能である。つまり $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ならば、$f' \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

$D(\sin) = \cos$.
$F(x) = x^2$, $G(x) = 2x$ とするとき、$D(F) = G$.

例 11.12 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、$a_n=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像に他ならない**。

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f\colon X\to Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.
(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.　(b) $f_4(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.　□

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は⋯)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X)$　　**出来るようになろう**
4. $D(C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.　($\because$ 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ に対して、$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ とおくと、$F' = f$ かつ F は無限回微分可能 $(F \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ であるから、$D(F) = f$. ゆえに $D(C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})) \supset C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

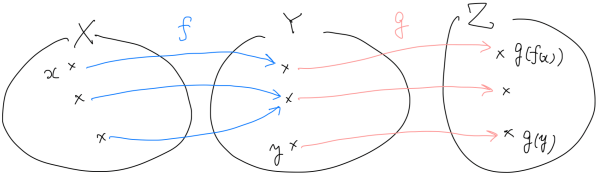
定義 11.13 (合成写像)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき

$$h(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)$$

で写像 $h\colon X \to Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、$g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)),$$



4.5.1 定義　細かい注意

実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

定義 11.14 (合成写像の別の定義)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Z$, $f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h\colon X \to Z, \quad h(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、$Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。$Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、$g\left(f(x)\right)$ が意味を持つので h が定義できる。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 11.15 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

一方、 $h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

ゆえに、$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).