数理リテラシー 第12回

~ 写像 (2) ~

桂田 祐史

2022 年 7 月 6 日

目次

本日の内容＆連絡事項

- 本日の講義内容: 写像の合成, 単射・全射・全単射 (続き) と逆写像
  今日を含めて後 3 回ありますが、今回と次回でなるべくたくさん説明するつもりです。
- 宿題 9 の解説を行います。
- 宿題 10 を出します。締め切りは 7 月 11 日 (月曜)13:30 です。

例 12.1 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。$X := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ とおき、$D\colon X \to Y$ を

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定める。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能である。つまり $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ならば、$f' \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

$D(\sin) = \cos.$
$F(x) = x^2$, $G(x) = 2x$ とするとき、$D(F) = G$.

例 12.2 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、$a_n=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像に他ならない**。

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f\colon X\to Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

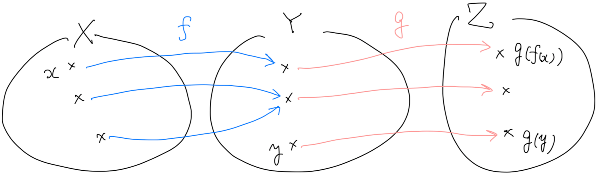
定義 12.3 (合成写像)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき

$$h(x) = g\,(f(x)) \quad (x \in X)$$

で写像 $h\colon X \to Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、$g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad g \circ f(x) = g\,(f(x)) \quad (x \in X)),$$



4.5.1 定義　細かい注意 (ここはさらっと)

実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している (同じようにする人は多い)。

定義 12.4 (合成写像の別の定義)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Z$, $f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h\colon X \to Z, \quad h(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、$Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。$Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、$g\left(f(x)\right)$ が意味を持つので h が定義できる。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 12.5 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

ゆえに、$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

定義 12.6 (単射, 全射, 全単射)

(i) $f\colon X\to Y$ が **単射** (たんしゃ) (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1 対 1** (one to one) であるとは、

$$(\sharp) \qquad (\forall x\in X)(\forall x'\in X)\quad (x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

(ii) $f\colon X\to Y$ が **全射** (ぜんしゃ) (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは**上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(\flat) \qquad (\forall y\in Y)\,(\exists x\in X)\quad y=f(x)$$

が成り立つことをいう。

(iii) $f\colon X\to Y$ が**全単射**あるいは**双射** (a bijection, 形容詞は bijective) であるとは、f が全射かつ単射であることをいう。

(**注**　最近はあまり使われないが、**1 対 1 対応** (one-to-one correspondence) という言葉があり、これは全単射という意味である。)

余談　$'$ の読み方

日本の高校では、x' を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では “x prime” 「エックス プライム」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “–” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

「ことばの話 1835「ダッシュ」」 ▸ Link によると
渡辺正, 「ダッシュ」と「活動寫眞」, 『数学セミナー』*1985* 年 *11* 月号, *p. 13*

にある程度詳しい事が載っているとか。

個人的に、古い英語 (England で使っているやつ) では、dash と読んだらしい、というのはどこかで目にした覚えがあったので、納得出来た。 □

4.6.1 単射, 全射, 全単射の定義　図によるイメージ

写像が単射であるとは、2 つ以上の矢が刺さっている的がないこと。

写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

4.6.1 単射, 全射, 全単射の定義　条件の言い換え

　単射の条件 ($\sharp$) $(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ は

$$(\sharp\sharp) \qquad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

　全射の条件 ($\flat$) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$ は

$$(\flat\flat) \qquad Y = f(X)$$

とも書ける (ぜひ覚えよう)。実際

$$((\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad Y \subset f(X) \quad \Leftrightarrow \quad Y = f(X).$$

($\Leftrightarrow$ は、$f(X) = \{y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\}$ を思い出すと分かる。また、一般に $Y \supset f(X)$ が成り立つので、$\Leftrightarrow$ の $\Rightarrow$ 方向が分かる。)

4.6.1 単射, 全射, 全単射の定義　練習

問

1. $f\colon X \to Y$ が単射でないことを論理式で表わせ。

2. $f\colon X \to Y$ が全射でないことを論理式で表わせ。

解答

1. $(\exists x \in X)\ (\exists x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) = f(x')$.
   あるいは $(\exists x \in X)\ (\exists x' \in X)\ (x \neq x' \land f(x) = f(x'))$.
2. $(\exists y \in Y)\ (\forall x \in X)\ y \neq f(x)$. □

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

例　$X = Y = \{1, 2\}$ とする。X から Y への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方　X の各要素 1, 2 の像が何か (Y のどの要素か) 調べる。

解答　次の f_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ が X から Y への写像である。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1			
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2			

f_1, f_4 は

- 2 つ以上の矢が刺さっている的があるので単射でない。
- 矢の刺さっていない的があるので全射でない。

f_2, f_3 は

- 2 つ以上の矢が刺さっている的がないので単射である。
- すべての的に少なくとも 1 つの矢が刺さっているので全射である。

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

例 12.7

X = ある時点での明治大学の学生全体, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x)$ = 学生 x の学生番号 とするとき、f は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることがある。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。) □

例 12.8 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間 I で定義された実数値関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射である**。

証明 $x, x' \in I$, $x \neq x'$ とする。このとき、(i) $x < x'$ (ii) $x > x'$ のいずれかが成り立つ。

(i) のとき $f(x) < f(x')$. (ii) のとき $f(x) > f(x')$. いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$. ゆえに f は単射である。 □

同様に狭義単調減少関数が定義されて、**狭義単調減少関数は単射である**。

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

次の f_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4 \colon [0, \infty) \to [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- f_1, f_3 は単射でない　$\because x = -1,\ x' = 1$ とすると、$x, x' \in \mathbb{R}$, $x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$.
- f_2, f_4 は単射である　$\because f_j'(x) = 2x > 0$ $(x \in (0, \infty))$ であるから、f_j は定義域 $[0, \infty)$ で狭義単調増加である。ゆえに f_j は単射である。
- f_1, f_2 は全射でない　$\because y = -1$ とすると $y \in \mathbb{R}$ であり、$y = f(x)$ を満たす x が存在しない。
- f_3, f_4 は全射である　$\because$ 任意の $y \in [0, \infty)$ に対して、$x := \sqrt{y}$ とおくと、$x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R} \wedge y = f(x)$.

4.6.2 単射, 全射, 全単射の例

例 12.9

X を空でない集合とする。恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は全単射である。
実際、$x_1, x_2 \in X$ に対して、$\mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2)$ ならば、$x_1 = x_2$ が成り立つので、id_X は単射である。
また、任意の $y \in X$ に対して、$x := y$ とおくと、$x \in X$ であり、$\mathrm{id}_X(x) = x = y$ であるから、id_X は全射である。
以上から、id_X は全単射である。

例 12.10

$\emptyset \neq X \subset Y$ とするとき、包含写像 $i\colon X \to Y$ は単射である。
(恒等写像の単射性の証明と同様。)

例 12.11

空でない集合 X, Y に対して、射影作用素 $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$ は全射である。
(すでに $\mathrm{pr}_X(X \times Y) = X$ を示してある。ゆえに pr_X は全射である。)

2022/7/6 の授業はここまででした。
以下は参考がてらつけておきます。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成

次の定理は基本的である。時間がないときは、(6) 以降は後回しで良い。

定理 12.12 (単射, 全射, 全単射の合成)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とする。

1. f と g が単射ならば、$g \circ f$ は単射である。
2. f と g が全射ならば、$g \circ f$ は全射である。
3. f と g が全単射ならば、$g \circ f$ は全単射である。
4. $g \circ f$ が単射ならば、f は単射である。
5. $g \circ f$ が全射ならば、g は全射である。

---

6. $g \circ f$ が単射でも、g は単射とは限らない。
7. $g \circ f$ が全射でも、f が全射とは限らない。
8. $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、g は単射である。
9. $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、f は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 1

まず (1), (2) を図に描いて説明する。それから文章で説明する。

1. f と g が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。$x \neq x'$ と仮定すると f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$.
   g が単射であるから $g\left(f(x)\right) \neq g\left(f(x')\right)$.
   すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。
2. f と g が全射と仮定する。
   任意の $z \in Z$ に対して、g が全射であることから、$g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。
   f が全射であることから、$f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、
   $$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(y\right) = z.$$
   ゆえに $g \circ f$ は全射である。
3. f と g が全単射と仮定する。$g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 2

4. $g \circ f$ が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。
$f(x) = f(x')$ と仮定すると、
$g \circ f(x) = g\,(f(x)) = g\,(f(x')) = g \circ f(x')$ であるから
$g \circ f(x) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、$x = x'$. ゆえに f は単射である。
5. $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、$z = g \circ f(x)$ が成り立つ。このとき、$y := f(x)$ とおくと、$y \in Y$ であり、

$$g(y) = g\,(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 3 (おまけ)

6. $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を定めると、$g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(1) = 1$ である。$g \circ f$ は単射であるが、g は単射でない。
7. (6) と同じ写像が反例となる。$g \circ f$ は全射であるが、f は全射でない。

(ここは授業ではカットするかも。教科書 (中島 [1]) にはもっと書いてあるけれど⋯)

8. $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。$y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。f が全射であるから、$f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。$y \neq y'$ であるから、$x \neq x'$ である。$g \circ f$ が単射であるから、$g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. これから

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g\left(f(x')\right) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

9. $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、$z = g(y)$ とおくと、$z \in Z$ である。$g \circ f$ が全射であるから、$g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、$g\left(f(x)\right) = z = g\left(y\right)$ であるが、g が単射であるから、$f(x) = y$. ゆえに f は全射である。 □

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).