数理リテラシー 第 13 回
～ 写像 (3) ～

桂田 祐史

2022 年 7 月 13 日

目次

本日の内容＆連絡事項

- 「授業・学生生活に関するアンケート」に回答するよう学生に促して下さい、とのこと。Oh-o! Meiji にログインして、左下にあるアンケートのところから回答して下さい。。
- この授業のアンケートというのもやるつもりです。
- 期末試験: 7 月 22 日 (金) 9:30–11:30 (120 分)
くれぐれも寝坊しないように気をつけて下さい。
- 本日の講義内容: 宿題 10(問 10) の解説、前回 4.6 の残り、4.8 写像による集合の像と逆像、4.7 逆写像
このスライドには次回の分も込めた残りすべてを載せてあります。4.6 がおわったら 4.7 は飛ばして 4.8 を先にやります。本日と次回の授業は動画収録して後から見られるようにします。
- 宿題は本日出すものが最後となります。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成

次の定理は基本的である。時間がないときは、(6) 以降は後回しで良い。(今回は (7) くらいまでかな…)

定理 12.1 (単射, 全射, 全単射の合成)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とする。

1. f と g が単射ならば、$g \circ f$ は単射である。
2. f と g が全射ならば、$g \circ f$ は全射である。
3. f と g が全単射ならば、$g \circ f$ は全単射である。
4. $g \circ f$ が単射ならば、f は単射である。
5. $g \circ f$ が全射ならば、g は全射である。

---

6. $g \circ f$ が単射でも、g は単射とは限らない。
7. $g \circ f$ が全射でも、f が全射とは限らない。
8. $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、g は単射である。
9. $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、f は全射である。

まず (1), (2) を図に描いて説明する。それから文章で説明する。

1. f と g が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。$x \neq x'$ と仮定すると f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$.
   g が単射であるから $g\left(f(x)\right) \neq g\left(f(x')\right)$.
   すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。
2. f と g が全射と仮定する。
   任意の $z \in Z$ に対して、g が全射であることから、$g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。
   f が全射であることから、$f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、
   $$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(y\right) = z.$$
   ゆえに $g \circ f$ は全射である。
3. f と g が全単射と仮定する。$g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 2

4. $g \circ f$ が単射と仮定する。x, x' を X の任意の要素とする。
$f(x) = f(x')$ と仮定すると、
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ であるから
$g \circ f(x) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、$x = x'$. ゆえに f は単射である。
5. $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、$z = g \circ f(x)$ が成り立つ。このとき、$y := f(x)$ とおくと、$y \in Y$ であり、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成　証明 パート 3 (おまけ)

6. $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を定めると、$g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(1) = 1$ である。$g \circ f$ は単射であるが、g は単射でない。
7. (6) と同じ写像が反例となる。$g \circ f$ は全射であるが、f は全射でない。

(これ以降は授業ではカットする可能性が高い。教科書 (中島 [1]) にはもっと書いてあるけれど…)

8. $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。$y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。f が全射であるから、$f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。$y \neq y'$ であるから、$x \neq x'$ である。$g \circ f$ が単射であるから、$g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. これから

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g\left(f(x')\right) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

9. $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、$z = g(y)$ とおくと、$z \in Z$ である。$g \circ f$ が全射であるから、$g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、$g\left(f(x)\right) = z = g\left(y\right)$ であるが、g が単射であるから、$f(x) = y$. ゆえに f は全射である。 $\square$

逆関数の概念は、写像にも拡張される。まずは定義をしよう。

定義 12.2 (逆写像)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ とする。g が f の**逆写像** (the inverse mapping of f) であるとは

(1) $$g \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

を満たすことをいう。

逆写像は無条件では存在しない。f の逆写像が存在するためには、f が全単射であることが必要十分である (後で証明する)。

4.7.2 逆関数の例を思い出す

X, Y を共に $[0,\infty)$ として、$f\colon X\to Y$ を $f(x)=x^2$ $(x\in X)$ で定義する。

f は全射である。すなわち、任意の $y\in Y=[0,\infty)$ に対して、$f(x)=y$ を満たす $x\in X=[0,\infty)$ が存在する (証明 (i) ($\sqrt{\ }$ を知っている場合) $x:=\sqrt{y}$ とおくと $x\in X$ かつ $f(x)=x^2=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$. あるいは (ii) ($\sqrt{\ }$ を知らない場合) $f(0)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ と中間値の定理を用いる。)。

また f は単射である。実際、$f'(x)=2x>0$ $(x>0)$ であるから、f は $X=[0,\infty)$ 全体で狭義単調増加であり、f は単射である。

ゆえに、任意の $y\in Y$ に対して、$f(x)=y$ を満たす $x\in X$ はただ一つ存在する (もちろん $x=\sqrt{y}$ である)。その x を $g(y)$ として、関数 $g\colon Y\to X$ が定まる。これを f の**逆関数**と呼ぶのであった。

この定義から、任意の $y\in Y$ に対して、$x:=g(y)$ とおくと、$f(x)=y$. ゆえに $f(g(y))=f(x)=y$. したがって $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

一方、任意の $x\in X$ に対して $y:=f(x)$ とおくと、やはり g の定義から $g(y)=x$. ゆえに $g(f(x))=g(y)=x$. ゆえに $g\circ f=\mathrm{id}_X$.

4.7.2 逆関数の例を思い出す

以上の議論は

- $f(x) = e^x$ と $g(y) = \log y$
- $f(x) = \tan x$ $(x \in (-\pi/2, \pi/2))$ と $g(y) = \tan^{-1} y$

について、ほとんど同様に成り立つ。

この議論はさらに一般化できる、という話を以下で見る。

4.7.3 逆行列の話と比べてみよう

これからする話は、線形代数で聞いた話とよく似ている、と思うかもしれない。それで先回りして説明しておく。

n 次実正方行列 A に対して、写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ で定義できる。このとき、次のことが成り立つ。

- A の逆行列は存在するならば 1 つしかない。(それを A^{-1} で表す。)
- f が全単射 $\Leftrightarrow$ A の逆行列が存在する。
- A の逆行列が存在するならば $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- A, B がともに逆行列を持つならば $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

以上のことは、まだ教わっていないかもしれなけれど、そのうちに教わるはず。この話と同じようなことが逆写像についても成り立つ。

以下 3 枚のスライドで一気に証明する。

4.7.4 逆写像の一意性

命題 12.3 (逆写像の一意性)

$f\colon X \to Y$ の逆写像は存在すれば 1 つしかない。

証明　$g, g'\colon Y \to X$ が

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y, \quad g' \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g' = \mathrm{id}_Y$$

を満たすとする。これらのことと、結合法則から

$$g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

ゆえに $g' = g$. □

定義 12.4 (逆写像の記号)

$f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、f^{-1} で表す。

$f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、$f^{-1}\colon Y \to X$ であり

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y. \tag{2}$$

4.7.5 全単射 $\Leftrightarrow$ 逆写像存在

命題 12.5 (逆写像が存在 $\Leftrightarrow$ 全単射)

1. $f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するならば、f は全単射である。
2. $f\colon X \to Y$ が全単射ならば f の逆写像が存在する。

証明 (1) 一般に恒等写像は全単射であることを思い出す。$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ は全射だから、f は全射である。$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ は単射だから、f は単射である。

(2) f は全射だから、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$. このような $x \in X$ はただ1つしかない。実際 $x, x' \in X$ かつ $y = f(x)$ かつ $y = f(x')$ とすると、$f(x) = f(x')$ であり、f が単射であるから $x = x'$.

$g\colon Y \to X$ を $g(y) = x$ (x は $x \in X \land f(x) = y$ を満たす) で定めると、$g = f^{-1}$. 実際

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \land \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

が成り立つ。その証明は3枚前の前のスライド「後のために逆関数の例を思い出して予告」の議論と同じである。 □

命題 12.6 (逆写像の逆写像は元の写像, 合成写像の逆写像)

1. $f\colon X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ の逆写像がともに存在するならば、$f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

証明 (1) $g := f^{-1}$ とおくと、$g\colon Y \to X$ かつ

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

ゆえに f は g の逆写像である。ゆえに $f = g^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{-1}$.

(2) 逆写像の定義の条件を確かめる。

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) &= \left(\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ g\right) \circ f = \left(f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right)\right) \circ f \\ &= \left(f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y\right) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) &= \left((g \circ f) \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = \left(g \circ \left(f \circ f^{-1}\right)\right) \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \mathrm{id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z.\end{aligned}$$

ゆえに $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

4.7.7 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

次の関係はしばしば用いる。

命題 12.7

$f\colon X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、任意の $x \in X$, 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

証明

($\Rightarrow$) $y = f(x)$ ならば

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{id}_X(x) = x.$$

($\Leftarrow$) $x = f^{-1}(y)$ ならば

$$f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f \circ f^{-1}(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y. \quad \square$$

Cf. 行列とベクトルの話では、$y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y$.

定義 12.8 (写像による集合の像と逆像)

$f\colon X \to Y$ とする。

1. $A \subset X$ に対して
$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \quad (= \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\})$$
を f による A の **(順) 像** (the (direct) image of A under f) と呼ぶ。
　特に f による X の像 $f(X)$ (f の値域とも呼ぶことにしてある) のことは、f の**像** (the image of f) とも呼び、$\mathrm{Image}(f)$ とも表す。
2. $B \subset Y$ に対して
$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$
を f による B の**逆像** (the inverse image of B under f) あるいは**原像** (preimage) と呼ぶ。

4.8.1 定義と記号

注意　実は順像、逆像を表す記号には色々ある (そうだ)。

	順像の記号	逆像の記号
この講義	$f(A)$	$f^{-1}(B)$
教科書 ([1])	$f_*(A)$	$f^*(B)$
	$f[A]$	$f^{-1}[B]$
	$f^{\rightarrow}(A)$,	$f^{\leftarrow}(B)$

注意　f の逆写像 f^{-1} が存在するとき、$B \subset Y$ に対して、$f^{-1}(B)$ という記号には、次の 2 つの解釈がある。

ⓐ f による B の逆像

ⓑ f^{-1} による B の像

実はどちらの解釈でも同じ集合を表す。

4.8.2 写像による集合の像と逆像の例

例 12.9

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とするとき

$$
\begin{aligned}
f(\{1\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1\}\} \\
&= \{f(x) \mid x = 1\} \\
&= \{f(1)\} = \{1\}, \\
f(\{-2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{-2\}\} \\
&= \{f(x) \mid x = -2\} \\
&= \{f(-2)\} = \{4\}, \\
f(\{1, -2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1, -2\}\} \\
&= \{f(x) \mid x = 1 \vee x = -2\} \\
&= \{f(1), f(-2)\} = \{1, 4\}, \\
f([-2, 1]) &= \{f(x) \mid x \in [-2, 1]\} \\
&= \{f(x) \mid -2 \leq x \leq 1\} \\
&= \{y \mid 0 \leq y \leq 4\}, \\
f(\emptyset) &= \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

4.8.2 写像による集合の像と逆像の例

例 12.10

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ とするとき

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\{3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{3\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 3\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = 3\right\} \\
&= \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}, \\
f^{-1}(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = -2\right\} \\
&= \emptyset, \\
f^{-1}(\{-2, 3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2, 3\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2 \lor f(x) = 3\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = -2 \lor x^2 = 3\right\} = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}, \\
f^{-1}([-2, 3]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2, 3]\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq f(x) \leq 3\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -2 \leq x^2 \leq 3\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\right\}, \\
f^{-1}(\emptyset) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

4.8.3 集合の演算との関係

集合の演算 ($\cap$, $\cup$, $\setminus$) と、写像による集合の像・逆像の関係はしばしば必要になる。基本的な定理を紹介する。

証明のために以下のことはすぐ思い出せるようにしておこう。

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。

$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \quad \wedge \quad f(x) \in B.$$

逆像に関する公式は覚えるのも、証明するのも簡単である。次のスライドで、それから始めよう。

命題 12.11 (写像による集合の逆像)

$f\colon X \to Y$ とする。また $B_1, B_2, B \subset Y$ とするとき、次が成り立つ。

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^{\complement}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}$.

証明

1. $B_1 \subset B_2$ を仮定する。
$x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、$x \in X \wedge f(x) \in B_1$.
仮定より $f(x) \in B_2$.
ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$.
ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

再掲

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

2. 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 &\Leftrightarrow ((f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

3. (2) の証明中の $\cap$ を $\cup$ に置き換えれば (3) の証明になる。

再掲

(4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^{\complement}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}$.

4. 任意の $x \in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\
&\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \land (\neg (f(x) \in B_2)) \\
&\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \land \left(\neg(x \in f^{-1}(B_2))\right) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

であるから $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

一般に $f^{-1}(Y) = X$ が成り立つので

$$f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}.$$

命題 12.12

$f\colon X \to Y$ とする。また $A_1, A_2, A \subset X$ とするとき、次が成り立つ。

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.　(等号は一般には成り立たない。)
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
4. $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.　(等号は一般には成り立たない。)

証明

1. $A_1 \subset A_2$ を仮定する。$y \in f(A_1)$ とすると、ある $x \in A_1$ が存在して $y = f(x)$. 仮定より $x \in A_2$ であるから、$y \in f(A_2)$. ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $y = f(x)$. $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ が成り立つ。$x \in A_1$ より $y \in f(A_1)$. また $x \in A_2$ より $y \in f(A_2)$. ゆえに $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.　((1) を用いた別証もある。)

再掲 (2)　$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(2) の別証明

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ であるから、(1) を用いて、$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$.
同様に $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.
ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の証明 ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \land B \subset A$ を用いる)

- (a) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする。ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して、$y = f(x)$.
  $x \in A_1$ または $x \in A_2$ が成り立つ。
  $x \in A_1$ のときは $y \in f(A_1)$. $x \in A_2$ のときは $y \in f(A_2)$.
  ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$. すなわち $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
  ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.
- (b) $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ であるから ((1) を用いて)、$f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(a), (b) から $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の別証明　($\exists x\ P_1(x) \vee P_2(x) \equiv (\exists x\ P_1(x)) \vee (\exists x\ P_2(x))$ に気づけば、次のように一気に証明できる。)

$$
\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\,((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\,((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists x\,(x \in A_1 \wedge y = f(x))) \vee (\exists x\,(x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).
\end{aligned}
$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(4) の証明

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、$y \in f(A_1) \land y \notin f(A_2)$.
$y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1)\ y = f(x)$.
実は $x \notin A_2$. 実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。
ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、$y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

付録　有限集合の間の写像の全射性、単射性

(講義時間に余裕があれば講義するが、フツーは宿題のネタにする程度。)

実は次の命題が成り立つ。

命題 12.13 (有限集合の間の写像の全射性、単射性)

X, Y が有限集合であるとする。X と Y の要素の個数をそれぞれ $\#X$, $\#Y$ と書く。このとき、以下の (1)–(4) が成り立つ。

1. X から Y への単射が存在する $\Leftrightarrow \#X \le \#Y$.
2. X から Y への全射が存在する $\Leftrightarrow \#X \ge \#Y$.
3. X から Y への全単射が存在する $\Leftrightarrow \#X = \#Y$.
4. $\#X = \#Y$ ならば、任意の写像 $f\colon X \to Y$ について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。

   (i) f は単射　(ii) f は全射　(iii) f は全単射

付録　有限集合の間の写像の全射性、単射性

証明　$n := \#X$, $m := \#Y$, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$ とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

1. $f \colon X \to Y$ が単射であれば、$f(x_i)$ $(1 \le i \le n)$ はどの二つも相異なり、$\{f(x_i) | 1 \le i \le n\} \subset Y$ であるから、要素の個数を比較して $\#X = n \le \#Y$. 逆に $n \le m$ とすると、$f(x_i) = y_i$ $(1 \le i \le n)$ とおくことで、$f \colon X \to Y$ を定義すると、f は単射となる。
2. $f \colon X \to Y$ が全射であれば、$\{f(x_i) \mid 1 \le i \le n\} = Y$ であるから、$\#X = n \ge \#Y$. 逆に $n \ge m$ とすると、$f(x_i) = y_i$ $(1 \le i \le m)$, $f(x_j) = y_1$ $(m < j \le n)$ とおくことで、$f \colon X \to Y$ を定義すると、f は全射となる。
3. X から Y への全単射が存在すれば、(1) から $\#X \le \#Y$, (2) から $\#X \ge \#Y$ であるから $\#X = \#Y$. 逆に $\#X = \#Y$ とすると、(1) から X から Y への単射 f が存在する。(3) から f は全単射である。
4. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示せば良い (それが出来ると、(i)$\Rightarrow$(iii) と (ii)$\Rightarrow$(iii) が導かれる)。
   $f \colon X \to Y$ が単射とする。$f(x_i)$ $(1 \le i \le n)$ が相異なるので、$|\{f(x_i) \mid 1 \le i \le n\}| = n$, 仮定からそれが $\#Y$ に等しく、$\{f(x_i) \mid 1 \le i \le n\} \subset Y$ であるから、$\{f(x_i) \mid 1 \le i \le n\} = Y$. ゆえに f は全射である。
   一方、$f \colon X \to Y$ が全射とする。$\{f(x_i) | 1 \le i \le n\} = Y$. 仮定から $n = \#Y$ であるから、$f(x_i)$ $(1 \le i \le n)$ はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに f は単射である。 □

命題 12.14 (参考: 線形代数バージョン)

X, Y が体 K 上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ $\dim X$, $\dim Y$ と書く。

1. X から Y への単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$.
2. X から Y への全射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$.
3. X から Y への全単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$.
4. $\dim X = \dim Y$ ならば、任意の線形写像 $f\colon X \to Y$ について、以下は同値である。

   (i) f は単射　(ii) f は全射　(iii) f は全単射

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).