数理リテラシー 第14回

～ 写像 (4) ～

桂田 祐史

2022 年 7 月 20 日

目次

本日の内容＆連絡事項

- この授業のアンケートに回答して下さい (Oh-o! Meiji)。
  改善意見のようなのを書いてくれると嬉しい。
- 期末試験: 7 月 22 日 (金) 9:30–11:30 (120 分)
  くれぐれも寝坊しないように気をつけて下さい。
  試験範囲は、初回の授業から宿題 10 まで。
  期末試験を受験できない場合にどうするか、現在検討中です。特別試験が受けられるように「欠席の事由を証明できる書類」の準備をすることを勧めます (具体的な条件については事務に尋ねて下さい)。何らかの理由でそれが出来ない (or 難しい) 場合は連絡して下さい。
- 本日の講義内容: 宿題 10(問 10) の解説、4.7 逆写像の定理の証明、4.8 写像による集合の像と逆像の残り。それと補足 (説明し残したことと、中間試験を見ての注意)。

本日の内容＆連絡事項

やむを得ない理由（コロナやその他体調不良等）で試験を欠席した者は，【学部として実施する特別試験】の受験願を提出することができます。欠席の事由を証明できる書類と申請書を提出させ，学部として特別試験対象者とするかの判断を行い，許可学生についてどのような形態で特別試験を実施するか各教員へお伺い（8 月上旬ころ）する予定です。実施形態は，8 月 18 日対面試験，教員の任意の方法による課題，試験無しの平常点採点，の 3 種類を予定しています。【学部としての特別試験】でご対応という場合は，事務に連絡の上必要書類を提出するよう学生へお伝えください。

逆関数の概念は、写像にも拡張される。まずは定義をしよう。

定義 13.1 (逆写像)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ とする。g が f の**逆写像** (the inverse mapping of f) であるとは

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \land f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{1}$$

を満たすことをいう。

逆写像は無条件では存在しない。f の逆写像が存在するためには、f が全単射であることが必要十分である (後で証明する)。

4.7.2 逆関数の例を思い出す

X, Y を共に $[0,\infty)$ として、$f\colon X \to Y$ を $f(x) = x^2$ $(x \in X)$ で定義する。

f は全射である。すなわち、任意の $y \in Y = [0,\infty)$ に対して、$f(x) = y$ を満たす $x \in X = [0,\infty)$ が存在する (証明 (i) ($\sqrt{\ }$ を知っている場合) $x := \sqrt{y}$ とおくと $x \in X$ かつ $f(x) = x^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$. あるいは (ii) ($\sqrt{\ }$ を知らない場合) $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ と中間値の定理を用いる。)。

また f は単射である。実際、$f'(x) = 2x > 0$ $(x > 0)$ であるから、f は $X = [0,\infty)$ 全体で狭義単調増加であり、f は単射である。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ を満たす $x \in X$ はただ一つ存在する (もちろん $x = \sqrt{y}$ である)。その x を $g(y)$ として、関数 $g\colon Y \to X$ が定まる。これを f の**逆関数**と呼ぶのであった。

この定義から、任意の $y \in Y$ に対して、$x := g(y)$ とおくと、$f(x) = y$. ゆえに $f(g(y)) = f(x) = y$. したがって $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

一方、任意の $x \in X$ に対して $y := f(x)$ とおくと、やはり g の定義から $g(y) = x$. ゆえに $g(f(x)) = g(y) = x$. ゆえに $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

4.7.2 逆関数の例を思い出す

以上の議論は

- $f(x) = e^x$ と $g(y) = \log y$
- $f(x) = \tan x$ $(x \in (-\pi/2, \pi/2))$ と $g(y) = \tan^{-1} y$

について、ほとんど同様に成り立つ。

この議論はさらに一般化できる、という話を以下で見る。

4.7.3 逆行列の話と比べてみよう

これからする話は、線形代数で聞いた話とよく似ている、と思うかもしれない。それで先回りして説明しておく。

n 次実正方行列 A に対して、写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ で定義できる。このとき、次のことが成り立つ。

- A の逆行列は存在するならば 1 つしかない。(それを A^{-1} で表す。)
- f が全単射 $\Leftrightarrow$ A の逆行列が存在する。
  ($g\colon \mathbb{R}^n\mathbb{R}^n$, $g(y) = A^{-1}y$ $(y \in \mathbb{R}^n)$ で定まる g が f の逆写像である。)
- A の逆行列が存在するならば $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- A, B がともに逆行列を持つならば $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

以上のことは、まだ教わっていないかもしれないけれど、そのうちに教わるはず。この話と同じようなことが逆写像についても成り立つ。

以下 3 枚のスライドで一気に証明する。

4.7.4 逆写像の一意性

命題 13.2 (逆写像の一意性)

$f\colon X \to Y$ の逆写像は存在すれば 1 つしかない。

証明 $g, g'\colon Y \to X$ が

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad と \quad g' \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g' = \mathrm{id}_Y$$

を満たすとする。これらのことと、結合法則から

$$g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = \left(g' \circ f\right) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

ゆえに $g' = g$. □

定義 13.3 (逆写像の記号)

$f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、f^{-1} で表す。

$f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、$f^{-1}\colon Y \to X$ であり

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y. \tag{2}$$

4.7.5 全単射 $\Leftrightarrow$ 逆写像存在

命題 13.4 (逆写像が存在 $\Leftrightarrow$ 全単射)

1. $f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するならば、f は全単射である。
2. $f\colon X \to Y$ が全単射ならば f の逆写像が存在する。

証明 (1) 一般に恒等写像は全単射であることを思い出す。$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ は全射だから、f は全射である。$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ は単射だから、f は単射である。

(2) f は全射だから、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$. このような $x \in X$ はただ 1 つしかない。実際 $x, x' \in X$ かつ $y = f(x)$ かつ $y = f(x')$ とすると、$f(x) = f(x')$ であり、f が単射であるから $x = x'$.

$g\colon Y \to X$ を $g(y) = x$ (x は $x \in X \land f(x) = y$ を満たす) で定めると、$g = f^{-1}$. 実際

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \land \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

が成り立つ。その証明は 3 枚前の前のスライド「後のために逆関数の例を思い出して予告」の議論と同じである。 □

命題 13.5 (逆写像の逆写像は元の写像, 合成写像の逆写像)

1. $f\colon X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ の逆写像がともに存在するならば、$f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

証明 (1) $g := f^{-1}$ とおくと、$g\colon Y \to X$ かつ

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

ゆえに f は g の逆写像である。ゆえに $f = g^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{-1}$.

(2) 逆写像の定義の条件を確かめる。

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = \left(\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ g\right) \circ f = \left(f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right)\right) \circ f$$
$$= \left(f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y\right) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,$$

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = \left((g \circ f) \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = \left(g \circ \left(f \circ f^{-1}\right)\right) \circ g^{-1}$$
$$= (g \circ \mathrm{id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z.$$

ゆえに $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

4.7.7 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

次の関係はしばしば用いる。

命題 13.6

$f\colon X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、任意の $x \in X$, 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

証明

$(\Rightarrow)$ $y = f(x)$ ならば

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{id}_X(x) = x.$$

$(\Leftarrow)$ $x = f^{-1}(y)$ ならば

$$f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f \circ f^{-1}(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y. \quad \square$$

Cf. 行列とベクトルの話では、$y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y$.

集合の演算 ($\cap$, $\cup$, $\setminus$) と、写像による集合の像・逆像の関係はしばしば必要になる。基本的な定理を紹介する。

証明のために以下のことはすぐ思い出せるようにしておこう。

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。

$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x).$$
$$x \in f^{-1}(B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \quad \wedge \quad f(x) \in B.$$

逆像に関する公式は覚えるのも、証明するのも簡単である。次のスライドで、それから始めよう。

命題 13.7 (写像による集合の逆像)

$f\colon X \to Y$ とする。また $B_1, B_2, B \subset Y$ とするとき、次が成り立つ。

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^{\complement}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}$.

証明

1. $B_1 \subset B_2$ を仮定する。
   $x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、$x \in X \wedge f(x) \in B_1$.
   仮定より $f(x) \in B_2$.
   ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$.
   ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

再掲

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

2. 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 &\Leftrightarrow ((f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

3. (2) の証明中の $\cap$ を $\cup$ に、$\wedge$ を $\vee$ に置き換えれば (3) の証明になる。

再掲

(4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^{\complement}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}$.

4. 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \land (\neg (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \land \left(\neg(x \in f^{-1}(B_2))\right) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

であるから $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

一般に $f^{-1}(Y) = X$ が成り立つので

$$f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}.$$

命題 13.8

$f\colon X \to Y$ とする。また $A_1, A_2, A \subset X$ とするとき、次が成り立つ。

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.　(等号は一般には成り立たない。)
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
4. $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.　(等号は一般には成り立たない。)

証明

1. $A_1 \subset A_2$ を仮定する。$y \in f(A_1)$ とすると、ある $x \in A_1$ が存在して $y = f(x)$. 仮定より $x \in A_2$ であるから、$y \in f(A_2)$. ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $y = f(x)$. $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ が成り立つ。$x \in A_1$ より $y \in f(A_1)$. また $x \in A_2$ より $y \in f(A_2)$. ゆえに $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.　((1) を用いた別証もある。)

再掲 (2)　$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(2) の別証明

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ であるから、(1) を用いて、$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$.
同様に $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.
ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の証明 ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \land B \subset A$ を用いる)

(a) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする。ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して、$y = f(x)$.
$x \in A_1$ または $x \in A_2$ が成り立つ。
$x \in A_1$ のときは $y \in f(A_1)$. $x \in A_2$ のときは $y \in f(A_2)$.
ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$. すなわち $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

(b) $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ であるから ((1) を用いて)、$f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(a), (b) から $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の別証明　($(\exists x\ P_1(x) \vee P_2(x) \equiv (\exists x\ P_1(x)) \vee (\exists x\ P_2(x))$ に気づけば、次のように一気に証明できる。)

$$
\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\,((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\,((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists x\,(x \in A_1 \wedge y = f(x))) \vee (\exists x\,(x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).
\end{aligned}
$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (4) $f\,(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(4) の証明

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、$y \in f(A_1) \land y \notin f(A_2)$.
$y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1)\ y = f(x)$.
実は $x \notin A_2$. 実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。
ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、$y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

命題 13.9

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とするとき、次の (1)–(2) が成り立つ。

1. $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

証明の前に思い出し。

$$
\begin{aligned}
x \in A \quad &\Rightarrow \quad f(x) \in f(A) \quad (\text{前回紹介し忘れた}),\\
y \in f(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x),\\
x \in f^{-1}(B) \quad &\Leftrightarrow x \in X \land f(x) \in B.
\end{aligned}
$$

(授業後の追加) ついでに

$$
\begin{aligned}
&f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\},\\
&f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\},\\
&A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \land B \subset A,\\
&A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A) \quad x \in B.
\end{aligned}
$$

再掲 (1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.

証明.

1. A の任意の要素 x に対して $f(x) \in f(A)$. ゆえに $x \in f^{-1}(f(A))$. ゆえに $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   以下 f が単射と仮定すると、$f^{-1}(f(A)) \subset A$ であることを示す。x を $f^{-1}(f(A))$ の任意の要素とすると、$f(x) \in f(A)$. ゆえに、ある $x' \in A$ が存在して、$f(x) = f(x')$. f が単射だから、$x = x'$. ゆえに $x \in A$.

   ゆえに f が単射であれば、$f^{-1}(f(A)) = A$.

□

再掲 (2) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

証明.

2. $f\left(f^{-1}(B)\right)$ の任意の要素 y に対して、ある $x \in f^{-1}((B))$ が存在して、$y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B)$ であるから、$f(x) \in B$. ゆえに $y \in B$. ゆえに $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

   以下 f が全射と仮定して、$B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$ を示す。
   B の任意の要素 y に対して、f が全射だから、ある $x \in X$ が存在して、$y = f(x)$. $f(x) \in B$ であるから、$x \in f^{-1}(B)$. これから
   $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.

   ゆえに f が全射ならば $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

□

5 補足 5.1 写像は式ではない

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ のとき、X から Y への写像をすべて求める。
次の $2^3 = 8$ 個の写像 f_j $(j = 1, 2, \cdots, 8)$ がある。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	$f_j(3)$
1	4	4	4
2	4	4	5
3	4	5	4
4	4	5	5
5	5	4	4
6	5	4	5
7	5	5	4
8	5	5	5

X の各要素 1, 2, 3 が Y のどの要素に対応するか決めれば、写像が定まる。

$g(x) = \max\{x + 2, 4\}$, $h(x) = \left[\frac{x+7}{2}\right]$ で $g\colon X \to Y$, $h\colon X \to Y$ を定めると

$$g(1) = \max\{1 + 2, 4\} = 4, \quad g(2) = \max\{2 + 2, 4\} = 4, \quad g(3) = \max\{3 + 2, 4\} = 5.$$

$$h(1) = \left[\frac{8}{2}\right] = [4] = 4, \quad h(2) = \left[\frac{9}{2}\right] = [4.5] = 4, \quad h(3) = \left[\frac{10}{2}\right] = [5] = 5.$$

f_2, g, h はみな等しい: $f_2 = g = h$.
$g(x)$ と $h(x)$ の式は違うが、$g = h$. f_2 はそもそも $f_2(x)$ を式で与えていない。

5.2 写像の制限

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$ とするとき、$g\colon A \to Y$ を $g(x) = f(x)$ $(x \in A)$ で定義することがしばしばある。

この g を f の A への**制限**と呼び、$f|_A$ という記号で表す。

同時に終域の方も $f(A) \subset B \subset Y$ を満たす B で置き換える、つまり $g\colon A \to B$, $g(x) = f(x)$ $(x \in A)$ とすることが多い。これも f の A への制限と呼ぶ。$B = f(A)$ とすると、g は全射になることに注意しよう。

特に g が単射である場合、g は全単射になり、g^{-1} が存在する。

5.3 集合の書き方の間違い

f の値域や、g の定義域、終域を書くときにイエロー (あるいはレッド) カードを出される人が多い。

$(x \mid x \in \mathbb{R} \land x \ge 0)$ というのがあったけれど、これは $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \ge 0\}$ のつもりだろう。聞き飽きたかもしれないけれど、集合のカッコは $\{\quad\}$ である。

$\{x \in \mathbb{R} \land x \ge 0\}$ とする人もいるが、(気持ちは分からないでもないけれど) そういう集合の書き方はない。

基本は $\{x \mid P(x)\}$ や $\{x \in A \mid P(x)\}$ というフォーマットである。

f の値域を求めよ、という問の答えを

$$Y = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \ge 0\} \quad (\text{これはマズイ}) \tag{$\sharp$}$$

のように書く人が少数いるが、$\mid$ の左に $f(x)$ のように複雑な式を書くと、意味不明瞭となる、$[0, \infty)$ という意味にするには、例えば

$$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 0\} \tag{$\flat$}$$

と書くべきである。($\flat$) を意味するつもりで ($\sharp$) と書くことはできない。

$\{f(x) \mid P(x)\}$ という書き方はあって、それにちょっと似ているように感じるかもしれないが、違う、と分かってもらいたい。

5.4 量称を含む命題の証明

量称を含む命題の証明については、授業で、

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

という説明をしたけれど、無視したような答案を書く人が結構いた。

例えば、中間試験の

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Q}) \quad xy = 1$$

の証明で次のようなものがあった。

真似してはいけない解答例

$y = \frac{1}{x}$ とすると、任意の自然数 x に対して、$y \in \mathbb{Q}$ であり、かつ

$$xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \therefore \quad xy = 1.$$

次のようにして下さい。

x を任意の自然数とする。$y = \frac{1}{x}$ とおくと、$y \in \mathbb{Z}$. また $xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ であるから $xy = 1$. □

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).