

2015 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2015 年 6 月 18 日 2 限施行 (10:45~12:05 の予定), 担当 桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1. 次の各文を記号のみを用いて表せ。

(1) 「 p ならば q 」は、「 p でないか、または q である」と同値である。 (2) $\frac{1}{2}$ は自然数全体の集合に属さないが、有理数全体の集合に属する。 (3) A と B の合併集合 (和集合) が B に等しいならば、 A は B に含まれる。 (4) 任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = y + x = 0$ が成り立つ。 (5) 空集合の補集合は X であり、 X の補集合は空集合である。

2. (1) 真理値表を用いて $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を示せ。 (2) 連立方程式
$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ (y + 1)(y - x^2) = 0 \end{cases}$$
 を解け (複素数の範囲で考える)。結果は複号 (± や \mp のこと) を用いず、1 つ 1 つ書くこと。

3. 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に関する次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) (\forall m \in \mathbb{N}: m \geq N) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

4. 真である命題は証明し、偽である命題はその否定命題を書いてそれを証明せよ。

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x > y \quad (2) (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x > y^2$$

5. (1) 順序対とは何か説明せよ。 (2) X を全体集合、 A と B を X の部分集合とすると、 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c , $A \times B$, 2^A の定義を書け。また、それぞれ何と呼ぶか答えよ。

(3) 全体集合 $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ とするとき、 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c , $A \times B$, 2^A を求めよ (要素をすべて書き並べる方法で表せ)。

6. (1) 集合族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の合併集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 共通部分 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。 (2) 各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n := \left[-1 + \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n}\right\}$ とおくと、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、その結果を証明せよ。

7. 全体集合 X の部分集合 A, B に対して、 $A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$ であることを示せ。

注意事項

この面を表にして配り、試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 10:45 になったら試験を始めます。12:05 終了予定です。始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの問題の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。最初に解答用紙を縦に折って、左右二列で使うなど、1 枚に収める工夫をして下さい。どうしても足りなくなった場合は試験監督に申し出ること。
- 305 号室で試験を受ける人達へ: 桂田は試験時間中 4 回ほど (約 20 分間隔)、305 号室に質問を受けに来る予定です。問題についての質問がある人はそのときに尋ねて下さい。
- 遅刻は 11:20 まで認める。11:30~12:00 の間は退室可能 (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室)。

講評

最初に、今回の自分の結果が悪くてもギブアップしないこと、その反対に良くても安心して手を抜かないこと。

120点満点で受験者平均点 69.8 点であった。得点率 58% で割と良い出来であった。

問題ごとの得点率は、番号が後のものほど下がる傾向にあった。これはまあ仕方がないかと思う。期末試験で同じような問題が出題されたら完全に解けるようにしておくこと。

- 1 は (2), (5) でカンマを使った人がいて、最初は減点したが、後で方針を変えて青ペンで○扱いの得点をつけた。
集合の内包的表記 $\{x \mid \dots\}$ の条件の部分では、カンマ「,」を使うと「 \wedge 」の意味で解釈するのが普通だが、そうでない文中で使うときは、 \vee の場合もあるので、 \wedge と書くべきだと思う。こちらの説明が不十分であったかもしれないので、今回は正解扱いするが、期末試験では \wedge と書くこと。
- 2 は (1) は大体出来ていた。(2) も分配法則まではまあまあ出来ていた。 $(\sqrt{2}i, -2)$, $(-\sqrt{2}i, -2)$ が抜けていたり、片方しか書いていなかったり、 $(2i, -2)$, $(-2i, -2)$ と間違えたり、方程式苦手な人が多いのかな。
- 3 は大体出来ていた。
- 4 は差が出たが、出来なかった人は反省すべきである。
 - 先頭が $\forall x$ だったら、まずは、最初に「 x を任意の…とすると」と書く
 - 先頭が $\exists x$ だったら、まずは、最初に「 $x = \dots$ とすると (とおくと)」と書くことを考えなさい、と言ってある。
- 5 の出来はイマイチであった。0 点もないのだけれど、点が低い。宿題をきちんと復習してあれば、ほぼ満点が取れるはずだ。
 - 式で書く場合は、 $= \{x \mid x \text{ についての条件} \}$ というパターンを使うのが便利、といっているが、それをうろ覚え。
 - 問題文を呼んでいないのか、呼び方を答えない人がパラパラいた。例えば $A \cup B$ を単に「和集合」と答える人がいるが、「 A と B の和集合」と答えるべきである。
- 6 の出来は結構バラけた。
 - $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1/2, 1/2]$ という結果は割と良く出来ていた。
 - $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義が書けない。それも書き方がおかしい人が少なくなかった。基本は 5 と同じであるのに、別人のように無茶苦茶をする人がいた。まだ丸暗記で、そこから書き方のルールを納得するようになっていないのかな。
 - 一方で、証明は少なくとも途中までは結構書けていた人がいて、それは良かった。期末試験までに、完答できるようにしておいて下さい。
- 7 はギブアップした人も多かったが、思っていたよりも出来ていた (嬉しい)。中にはこちらが思いつかなかったきれいな答を書いてくれた人もいて、結構でした。

解答例

採点をしてから、こういう答案があつたけれど…、ということを書き足します。

1. (1) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ (2) $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \wedge \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ (3) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ (4) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R})$
 $x + y = y + x = 0$ (5) $\emptyset^c = X \wedge X^c = \emptyset$

(1) \equiv は \Leftrightarrow でも構いません。= はこの講義としては、厳密に言えば反則です (同値をそういう書き方をしたことはない)。

(2) を $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ と書いた人もいて、それは意識になってしまうけれど、正しい論理式で、同じ内容を主張しているので正解扱いしました。

(3), (4) は良く出来ていました。

(5) で次のようなものがありました。

(i) $\emptyset^c = X \Leftrightarrow X^c = \emptyset$.

これは $\emptyset^c = X \wedge X^c = \emptyset$ とは違う主張になってしまいます。

(ii) $\emptyset^c = X, X^c = \emptyset$.

日本語 (や英語) の文章中で複数の主張 (命題や条件) をカンマで区切って書くのは普通ですが、論理式としては普通ではありません。一方、集合の内包的表現 $\{x \mid P(x)\}$ で、条件 $P(x)$ が $P_1(x) \wedge P_2(x)$ の形をしているとき、 $\{x \mid P_1(x), P_2(x)\}$ と書くことはごく普通に行われています。例えば $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0 \wedge y > 0\}$ は $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ と書きます。集合の内包的表記でない場合は微妙で、例えば不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ の解は、高校数学では $x < 1, x > 2$ と書きますが、これは条件としては $x < 1 \vee x > 2$ となります。

2. (1) 真理値表は

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

となる。この4列目と7列目が一致することから $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ が成り立つ。■

(2) (途中略) $(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1), (0, 0), (0, -1), (\sqrt{2}i, -2), (-\sqrt{2}i, -2)$.

(1) はほぼ全員出来ました。(2) も分配法則を用いて変形するところまではほぼ全員出来ました。(2) の後半は結構ばらけました。

3. $(\exists \varepsilon > 0) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists n \in \mathbb{N}: n \geq N) (\exists m \in \mathbb{N}: m \geq N) |a_n - a_m| \geq \varepsilon$

4. (1) これは真である。(証明) x を任意の実数とすると、 $y = x - 1$ とおくと、 y は実数かつ $x > y$ が成り立つ。ゆえにこの命題は真である。■

(2) これは偽である。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) x \leq y^2$. (証明) $x = 0$ とおくと、 x は実数であり、任意の実数 y に対して $y^2 \geq 0$ であるから $x \leq y^2$. ゆえにこの否定命題は真である。■

5. (1) x と y の順序対 (x, y) とは、 x と y の組で、順序を区別したものである。 $(x, y) = (a, b)$ とは $x = a \wedge y = b$ と同値である。 $(1, 2) \neq (2, 1)$.

(2) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. A と B の合併集合. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. A と B の共通部分. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. A から B を除いた差集合. $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$. A の補集合. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. A と B の直積集合. ただし (x, y) は x と y の順序対を表すとする。 $2^A = \{C \mid C \subset A\}$. A のベキ集合.

(3) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{4\}$, $A^c = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 6)\},$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}.$$

6. (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$. (2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = [-1/2, 1/2]$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$.

(証明) まず $A_n = [a_n, b_n]$ とおくと、 $a_n = -1 + \frac{1}{2n}$, $b_n = 1 - \frac{1}{2n}$. $\{a_n\}$ は単調減少、 $\{b_n\}$ は単調増加であるから、 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ である。また $-1 < a_n, b_n < 1$ であるから $A_n \subset (-1, 1)$ である。

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1/2, 1/2]$ の証明。 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とすると、 $(\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n$. 特に $n = 1$ について成り立つことから $x \in A_1$. ゆえに $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1$. 一方、 $x \in A_1$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_1 \subset A_n$ であるから、 $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 以上より $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = [-1/2, 1/2]$.

■ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$ の証明。 $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とすると、 $(\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n$. $A_n \subset (-1, 1)$ であるから、 $x \in (-1, 1)$. ゆえに $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset (-1, 1)$. 一方、 $x \in (-1, 1)$ とすると、 $-1 < x < 1$. ゆえに $1 - |x| > 0$. アルキメデスの公理より $(\exists n \in \mathbb{N}) n(1 - |x|) > 1$. これから $|x| < 1 - \frac{1}{n}$. ゆえに $-1 + \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. ゆえに $(-1, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 以上より $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$. ■

7. $(\Rightarrow) A \cup B = X$ と仮定する。 x を B^c の任意の要素とすると、 $x \in X$ かつ $x \notin B$. $x \in X$ と仮定から $x \in A \cup B$. ゆえに $x \in A \vee x \in B$ であるが、 $x \notin B$ であるから、 $x \in A$. ゆえに $B^c \subset A$.

$(\Leftarrow) B^c \subset A$ と仮定する。 x を X の任意の要素とすると、 $x \in B$ または $x \notin B$ である。後者の場合、仮定から $x \in A$ であるから、 $x \in B$ または $x \in A$ が成り立つ。すなわち $x \in A \cup B$. ゆえに $X \subset A \cup B$. 逆向きの $A \cup B \subset X$ は明らかであるから、 $A \cup B = X$ が成り立つ。 ■