2018年度 数理リテラシー 期末試験問題

2018年7月25日 (水曜) 15:00〜17:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2枚) のみ提出

1.　次の各文を記号のみで表せ (p, q は命題、A, B, X, Y は集合、$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ は写像とする)。
(1) 「p ならば q」の否定は「p であるが q でない」と同値である。　(2) $z^2+z+1=0$ を満たす複素数 z が存在する。　(3) A と B の和集合の補集合は、A の補集合と B の補集合の積集合に等しい。　(4) g が f の逆写像であるためには、f と g の合成写像が X 上の恒等写像に等しく、かつ g と f の合成写像が Y 上の恒等写像に等しいことが必要十分である。

2.　以下では、交換法則 $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$ や結合法則は断りなく用いて良い。

(1) 真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。

(2) 同値変形により、$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ を示せ。

3.　真である命題はそれを証明し、偽である命題はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 書いて証明せよ。
(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ xy = 1$　(2) $(\exists L \in \mathbb{Z})\ (\forall x \in \mathbb{Z})\ x^2 - 2x - 3 \geq L$　(3) $(\forall a > 0)\ (\forall b > a)\ (\exists c \in \mathbb{R})\ a < c < b$.

4.　(1) 集合 A と B に対して、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ の定義を書け。それぞれ何と呼ぶか。　(2) 集合の冪集合の定義を述べ、$A = \{1, 2, 3\}$ の冪集合を求めよ。　(3) 2つの集合の直積集合の具体例を1つ書け。

5.　A, B が全体集合 X の部分集合とするとき、次の (1), (2) を証明せよ。
(1) $A \subset B \Rightarrow A^c \supset B^c$　(2) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$

6.　(1) $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。　(2) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ を満たすとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ を満たすことを示せ。　(3) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{n} < x < n\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, を求めよ (証明もすること)。

7.　(1) 写像について次の言葉の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射
(2) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の (i), (ii), (iv) を証明し、(iii) の反例を書け。
(i) f と g が全射であれば、$g \circ f$ は全射である。　(ii) $g \circ f$ が全射であれば、g は全射である。
(iii) $g \circ f$ が全射であれば、f は全射である。　(iv) $g \circ f$ が全射かつ g が単射であれば、f は全射である。

8.　(1) 以下の (a), (b) について、集合 X から集合 Y への写像をすべて求め、そのうち単射、全射、全単射であるものの個数を求めよ。(a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$　(b) $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$
(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく。X から X への写像のうち、全単射であるものの個数を求めよ。

9.　(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加ならば、f は単射であることを示せ。(2) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ $(x \in [0, \infty))$ で定めた関数 f は全単射であることを示せ。

10.　$f\colon X \to Y$ とする。(1) X の部分集合 A の f による像 $f(A)$, Y の部分集合 B の f による逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。(2) $A_1, A_2 \subset X$ とするとき、$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ であることを証明せよ。また $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立たないような、f, A_1, A_2 の例をあげよ。(3) $f^{-1}(Y) = X$ であることを証明せよ。(4) $B \subset Y$ とするとき、$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$ を証明せよ。

解説

1. (1) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$ (2) $(\exists z \in \mathbb{C}) \quad z^2 + z + 1 = 0$ (3) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$
(4) $g = f^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y$

解説 (4) の $\Leftrightarrow$ の右側は苦戦した人が多いけれど、逆写像の定義の条件である (見たはずで、見ていないと思う人は勉強の仕方がおかしい)。f と g の合成写像を $g \circ f$ でなく、$f \circ g$ と間違えた (つまり $f \circ g = \mathrm{id}_X$ と書いた) 人が多かった。

2.

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

となる。(左から) 5 列目と 8 列目の審議が一致するので、

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r).$$

(2)

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (r \wedge s) &\equiv (p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s)) \\ &\equiv ((r \wedge s) \vee p) \wedge ((r \wedge s) \vee q) \\ &\equiv ((r \vee p) \wedge (s \vee p)) \wedge ((r \vee q) \wedge (s \vee q)) \\ &\equiv ((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee s)) \\ &\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s).\end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s). \blacksquare$$

解説 (1) この期に及んで、辞書式順序にしない答案がある。ものすごく読みにくい。来年度からはそうするように指示しよう。(2) ちゃんと (1) で証明した形の結合法則だけを使うように書いてほしい (宿題の解説はそうしたのだけれど)。古い期末試験の解答を一掃すべきなのかもしれない。

3.

(1) 偽 否定命題は $(\exists x \in \mathbb{R})$ $(\forall y \in \mathbb{R})$ $xy \neq 1$. (証明) $x = 0$ とおくと $x \in \mathbb{R}$. さらに任意の実数 y に対して $xy = 0 \cdot y = 0$. ゆえに $xy \neq 1$.

(2) 真 (証明) $L = -4$ とおくと、$L \in \mathbb{Z}$. 任意の整数 x に対して、$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \geq -4 = L$. ゆえに $x^2 - 2x - 3 \geq L$.

(3) 真 (証明) 任意の正数 a と a より大きい任意の b に対して、$c = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと、$a = \dfrac{a+a}{2} < \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{b+b}{2} = b$. ゆえに $a < c < b$. $\blacksquare$(いわゆる稠密性というやつである。)

解説　さらさら解く人と、真偽の段階で間違えまくる人がいる (この問題は得点の分散が大きい)。中間試験より期末試験の方で出来が良くなる問題が多いのだけれど、この形式の問題は期末試験でも間違える人が多い。どうしたら良いのかな。

相変わらず、証明すべき式を書いて、それを変形していく答案が少しある。高校の段階で間違えて覚えたままなのだろうけれど、そういうのを直してもらうために宿題を添削している。

4.

(1) $A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$ A と B の和集合, $A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$ A と B の積集合, $A\setminus B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$ A と B の差集合, $A\times B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$ A と B の直積集合

(2) $2^A=\{C \mid C\subset A\}$. $A=\{1,2,3\}$ のとき

$$2^A=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,2,3\}\}.$$

(3) $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,5\}$ のとき

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}.$$

解説　さすがにこの問題は、期末試験ではパーフェクトに近い出来である。

5.

(1) $A\subset B$ と仮定する。$x\in B^c$ とすると $x\notin B$. このとき $x\notin A$ である (もしも $x\in A$ とすると、$A\subset B$ という仮定から $x\in B$ が導かれ、$x\notin B$ と矛盾する)。ゆえに $x\in A^c$. ゆえに $B^c\subset A^c$.

(別解) 命題の対偶と、もとの命題の真偽は一致するので、

$$\begin{aligned}A\subset B &\Leftrightarrow \forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)\\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg(x\in B)\Rightarrow\neg(x\in A))\\ &\Leftrightarrow \forall x(x\in B^c\Rightarrow x\in A^c)\\ &\Leftrightarrow B^c\subset A^c.\end{aligned}$$

(2) $A\cap B=\emptyset$ を仮定して、$A\subset B^c$ を示す。x を A の任意の要素とするとき、$x\in B^c$ が成り立つ。(実際、もしそうでないならば、$x\in B$ であり、$x\in A\cap B$ が成り立つので、$A\cap B\neq\emptyset$ と矛盾する。) ゆえに $A\subset B^c$ である。

逆に $A\subset B^c$ を仮定して、$A\cap B=\emptyset$ を示す。もしも成り立たないと仮定すると、$A\cap B\neq\emptyset$. $A\cap B$ の要素 x を (何でも良いから) 取ると、$x\in A$ かつ $x\in B$. $x\in A$ と仮定 $A\subset B^c$ から $x\in B^c$. これは矛盾である。ゆえに $A\cap B=\emptyset$. (証明終)

次のように計算で証明することも出来る。

$$\begin{aligned}A\cap B=\emptyset &\Leftrightarrow \neg\,(\exists x\in A\cap B)\\ &\Leftrightarrow \forall\neg(x\in A\wedge x\in B)\\ &\Leftrightarrow \forall\neg(x\in A)\vee\neg(x\in B)\\ &\Leftrightarrow \forall\neg(x\in A)\vee x\in B^c\\ &\Leftrightarrow \forall(x\in A\Rightarrow x\in B^c)\\ &\Leftrightarrow A\subset B^c.\blacksquare\end{aligned}$$

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n\in\mathbb{N}) x\in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n\in\mathbb{N}) x\in A_n\}$.

(2) $\bigcap A_n \subset A_1$ であること。$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$x\in A_n$. 特に $n=1$ として $x\in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

$A_1 \subset \bigcap A_n$ であること。$x\in A_1$ とする。任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、仮定から $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n$. ゆえに $x\in A_n$. ゆえに $x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1\subset\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

(3) まず $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ かつ $n<n+1$ であるから、$A_n\subset A_{n+1}$.

(2) を用いて $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \emptyset$.

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,\infty)$ である。

- $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (0,\infty)$ であること。$x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、$(\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n$. すなわち $\frac{1}{n}<x<n$. $\frac{1}{n}>0$ であるから $x>0$. ゆえに $x\in(0,\infty)$.
- $(0,\infty)\subset\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であること。$x\in(0,\infty)$ とすると $x>0$.
  - アルキメデスの公理から、ある $n_1\in\mathbb{N}$ が存在して $n_1x>1$. ゆえに $x>\frac{1}{n_1}$.
  - アルキメデスの公理から、ある $n_2\in\mathbb{N}$ が存在して $n_2\cdot 1>x$. ゆえに $x<n_2$.

  $n:=\max\{n_1,n_2\}$ とするとき、$n\in\mathbb{N}$ であり、$\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_1}$ かつ $n_2\le n$. ゆえに $\frac{1}{n}<x<n$. すなわち $x\in A_n$. ゆえに $x\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ■

解説

(1) 必ず出すにもかかわらず、間違える人が減らないのは不思議だ。そもそも集合を表すフォーマットになっていない人が少なくない。($\{x\mid P(x)\}$ というフォーマットが基本と言っているのに、$\{P(x)\}$ とか $\{P(x)\mid x\}$ とか書く人がいる。毎年この時期になると「アリババと 40 人の盗賊」を思い出す。「ひらけゴマ」くらい正確に言えないと扉は開きません。)

(2) (2) は「$A_1\supset A_2\supset\cdots$ のとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$」の証明のコピーのようなことを書いてバツになった人が多い。暗記ゲーと思っている人が少なくないのかもしれないけれど、丸暗記でテストを乗り切るのは無理です。

7.

(1) $f\colon X\to Y$ とする。

(a) f が単射とは $(\forall x\in X)(\forall x'\in X)\ x\ne x'\Rightarrow f(x)\ne f(x')$.

(b) f が全射とは $(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\ y=f(x)$.

(c) f が全単射とは、f が全射かつ単射であることをいう。

(2) (i) f と g が全射と仮定する。任意の $z\in Z$ に対して、g が全射であることから、ある $y\in Y$ が存在して $z=g(y)$. その y に対して、f が全射であることから、ある $x\in X$ が存在して、$y=f(x)$. このとき

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z.$$

ゆえに $g\circ f$ は全射である。

(ii) $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Y$ に対して、 $g \circ f$ が全射であることから、ある $x \in X$ が存在して、$z = g \circ f(x)$. $y = f(x)$ とおくと、$y \in Y$ であり、さらに

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

(iii) $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f\colon X \to Y$, $f(1) = 1$, $g\colon Y \to Z$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ とする。このとき $g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(1) = 1$. $g \circ f$ は全単射であるが、f は全射ではない ($f(x) = -1$ となる $x \in X$ が存在しない)。

(iv) $g \circ f$ が全射、かつ g が単射とする。y を Y の任意の要素とする。$z = g(y)$ とおく。$g \circ f$ が全射であるから、ある $x \in X$ が存在して、$z = g \circ f(x)$. ゆえに $z = g(f(x))$. ゆえに

$$g(f(x)) = g(y).$$

g が単射であることから $f(x) = y$. ゆえに f は全射である。 ■

解説　多くは一度目にしたはずのものだけど、(2) の (i) や (ii) を「順序を間違えて」落とした人が多い。z の前に y や x が出て来る答案は、99% バツである。(1)(b) を解いてもらってあるので、順番を間違えているかどうかは、内容をまったく考えないでも、目で見て分かるものである。文章で解答してあるけれど、この辺は単純な計算と言えるかもしれない。

8.

(1)

(a)

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	単射	全射	全単射
1	1	1	×	×	×
1	1	2	×	○	×
1	2	1	×	○	×
1	2	2	×	○	×
2	1	1	×	○	×
2	1	2	×	○	×
2	2	1	×	○	×
2	2	2	×	×	×

単射 0 個, 全射 6 個, 全単射 0 個

(b)

$f(1)$	$f(2)$	単射	全射	全単射
1	1	×	×	×
1	2	○	×	×
1	3	○	×	×
2	1	○	×	×
2	2	×	×	×
2	3	○	×	×
3	1	○	×	×
3	2	○	×	×
3	3	×	×	×

単射 6 個, 全射 0 個, 全単射 0 個

(2) X から X への写像 f に対して、f が全単射であるためには、$f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(n)$ が $1, 2, \cdots, n$ の順列であることが必要十分である。ゆえにその個数は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個。 ■

9.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 狭義単調増加とする。$x, x' \in X$, $x \neq x'$ とする。(a) $x < x'$ または (b) $x > x'$. (a) のとき $f(x) < f(x')$. (b) のとき $f(x) > f(x')$. いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$. ゆえに f は単射である。

(2) $f'(x) = 2x$ $(x > 0)$ ゆえ f は $[0, \infty)$ で単調増加である。ゆえに f は単射である。

$z \in [0, \infty)$ とするとき、$y = \sqrt{z}$ とおくと、$y \in [0, \infty)$ かつ $f(y) = z$. ゆえに f は全射。

ゆえに f は全単射。

解説

(1) 出来てほしいなあ。

(2)
- 減点するのはやめたけれど、$f'(x) > 0$ $(x \in [0, \infty))$ とするのは間違いだし、$f'(x) \geq 0$ $(x \in [0, \infty])$ から f が狭義単調増加というのもおかしい。$f'(x) > 0$ $(x \in (0, \infty))$ から f が $[0, \infty)$ で狭義単調増加であることが導ける (増減表でも書かせるのだろうか…きっと増減表の仕組みを正確に理解していないのだろう)。
- $\sqrt{\quad}$ を既知としなければ、f が $[0, \infty)$ で連続なことと、$f(0) = 0,\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ を満たすことから、中間値の定理によって、とするのだろう。 ■

10.

(1) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

(2) $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $f = f(x)$.

$x \in A_1$ であるから、$y \in f(A_1)$.

$x \in A_2$ であるから、$y \in f(A_2)$.

ゆえに $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. ゆえに

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

(別解) 「一般に $A \subset B$ ならば $f(A) \subset f(B)$」というのを認めれば、$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ かつ $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ から

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \quad \text{かつ} \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2).$$

これから

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

($f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ の反例) $X = -1, 1$, $Y = \{1\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{-1\}$, $f\colon X \to Y$, $f(1) = f(-1) = 1$ とする。このとき $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, $f(A_1) = \{1\}$, $f(A_2) = \{1\}$, $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$. $\emptyset \neq \{1\}$ であるから、$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(3) 定義から $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} \subset X$. ゆえに $f^{-1}(Y) \subset X$. 逆向きの $X \subset f^{-1}(Y)$ を示す。$x_0 \in X$ とすると、$f(x_0) \in Y$ であるから、$x_0 \in f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$. ゆえに $X \subset f^{-1}(Y)$. ゆえに $f^{-1}(Y) = X$.

(4) X の任意の要素 x に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B^c) &\Leftrightarrow f(x) \in B^c \\ &\Leftrightarrow \neg(f(x) \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in f^{-1}(B)) \\ &\Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c. \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$. ■