

Part III. 写像

桂田 祐史

2013年5月11日, 2022年8月24日

(もともと自分の講義をするためのノートと言うこともあって)、テキストとして使うにはまだまだ推敲不十分だと考えていますが¹、参考になるだろうと考えて公開しています。— まあ、これは説明が雑なことの言い訳ですね。

あちこちに「余談」が出て来るけれど、それは時間に余裕があって気が向けば話そうかくらいのものなので、スキップして構いません。

目次

| | |
|---|-----------|
| 4 写像 | 2 |
| 4.1 はじめに | 2 |
| 4.2 写像とは何か | 2 |
| 4.2.1 写像, 定義域, 終域, 値域の定義 | 2 |
| 4.2.2 高校数学の関数を写像とみなす | 5 |
| 4.2.3 色々な写像の例 | 6 |
| 4.3 合成写像 | 8 |
| 4.4 単射, 全射, 全単射 | 9 |
| 4.5 逆写像 | 14 |
| 4.5.1 逆写像の定義 | 14 |
| 4.5.2 逆関数の例を思い出す | 14 |
| 4.5.3 逆行列の話と比べてみよう | 15 |
| 4.5.4 逆写像の一意性 | 15 |
| 4.5.5 全単射 \Leftrightarrow 逆写像存在 | 16 |
| 4.5.6 $(f^{-1})^{-1} = f, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ | 16 |
| 4.5.7 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ | 17 |
| 4.6 部分集合の像と逆像 | 17 |
| 4.7 写像に関する用語 | 23 |
| 4.7.1 制限 | 23 |
| 4.7.2 グラフ | 23 |
| A 問の解答 | 25 |
| B 逆写像 (古い説明) | 28 |
| C $f: X \rightarrow Y$ の Y の呼び名 | 31 |

¹例や図は、その場、その日のアドリブと言うものも多く、ここには書いてない一方で、細かいことをブツブツ書いてあったりします。

4 写像

4.1 はじめに

集合と写像は、現代の数学にとって、両輪をなす基礎概念と言える。写像 (a mapping, a map) というのは、中学・高等学校で学ぶ関数 (function) を少し (?) 一般化した概念である。大雑把に言って、数以外のものを扱えるように関数を一般化したものが写像である。

関数は写像である

写像には (高校数学で言う) 関数以外のものもある

例 4.1 (こんなのも写像) $X = \{\text{カレー}, \text{ミートソース}, \text{うな丼}\}, Y = \{\text{コーンスープ}, \text{みそ汁}\}$ が集合として確定している (ただし、カレー、ミートソース、うな丼は相異なる) と仮定して、

$$f(\text{カレー}) = \text{コーンスープ}, \quad f(\text{ミートソース}) = \text{コーンスープ}, \quad f(\text{うな丼}) = \text{みそ汁}$$

とすると、写像 $f: X \rightarrow Y$ が定まる。■

余談 4.2 (関数という言葉をととても広い意味で使うことがある — あくまで余談) 実は、現在の大学の数学のテキストでは、関数の定義について、次の二つの立場がある。

- (1) 関数は (定義域や終域が数や数ベクトルの集合という) 特別な写像である。
(こじつけになるけれど²、**関数とは数に関わる写像**のことである。)
- (2) 関数と写像とは名前が違うだけで、まったく同じものである。定義域や終域が数の集合でなくても関数という。

この講義で採用した教科書 (中島 [1]) では、(1) の立場を取っている。この文書でも、その立場を取る。

高校での関数、写像

今の高校数学には、写像が出て来ない (らしい)。しかし定義域、値域、合成関数などの言葉はある。

実は、写像は、以前は高等学校で教えられていたこともあり、大学数学の少し古めの教科書では、そのことを仮定して書かれている場合もある。

4.2 写像とは何か

4.2.1 写像, 定義域, 終域, 値域の定義

集合を用いた写像の現代的な定義は、やや分かりにくいと思われるので後まわしにして (余談 4.6)、ここでは、まずは素朴な定義を述べる。

X と Y を集合とする。 f が X から Y への写像であるとは、 X の各々の (任意の) 要素 x に対応して、 Y の要素 $f(x)$ がただ一つ定まることをいう。

f が X から Y への写像であることを、 $f: X \rightarrow Y$, あるいは $X \xrightarrow{f} Y$ と表す。

やや古めの本には、 X から Y の中への**写像**, という言い方もある。

²function は、本来は函数という訳語が正しいのだそうで、関数というのは当て字なのだそうです。そういう意見をお持ちの先生からすると、「数に関わる」なんてのは、ひどいこじつけでしょう。すみません。

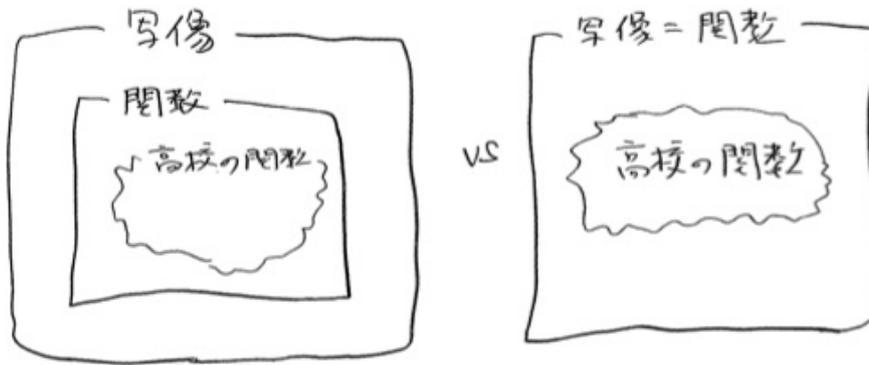


図 1: この絵が分かるようになって欲しい (一応は左の立場で説明する)

「 $f: X \rightarrow Y$ 」を「 X から Y への写像 f 」と読むべき場合も多い。
 二つの写像 $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ と $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ が等しいとは、

$$(X_1 = X_2) \wedge (Y_1 = Y_2) \wedge ((\forall x \in X_1) f_1(x) = f_2(x))$$

が成り立つことを言う³。

$f(x)$ のことを、 f による x の**像** (the image of x under f), f の x における**値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では、 $f(x)$ を “ f of x ” と読む。

f により x が y に対応することを、 $f: x \mapsto y$ と表す。 $f: x \mapsto y$ は、 $y = f(x)$ と同じ意味である。

X を写像 f の**定義域** (the domain of f , the domain of definition of f) と呼ぶ。他に始域, 始集合, source set などと呼ぶこともある。(有名なブルバキ [3] では、 X に名前を与えていない。)

ところが、 Y には定着した名前がない⁴。教科書 (中島 [1]) では、 Y のことを「 f のレンジ」と呼んでいるが、range は以下で紹介する値域の訳語にふさわしい言葉なので、この講義では採用しない。この講義では Y のことを「 f の**終域**」と呼ぶことにしておく。レンジにしても終域にしても、この講義の外で名前を呼ぶ必要が生じた場合は、「この Y のことを f の○○と呼ぶことにします」と断った方が良い。

X の任意の部分集合 A に対して、

$$f(A) := \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\} \quad (\text{これは } \{f(x) \mid x \in A\} \text{ と書く})$$

とおき、 A の f による**像** (the image of A under f) と呼ぶ。特に、定義域 X の f による像

$$f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\} \quad (\text{これは } \{f(x) \mid x \in X\} \text{ と書く})$$

のことは単に f の**像** (the image of f) あるいは f の**値域** (the range of f) と呼ぶ。

高校数学で学ぶ関数の値域は、関数を写像とみなした場合、ここで言う値域と一致すると考えて良い⁵。

³このうち $Y_1 = Y_2$ を要求しない流儀もある。例えば河田・三村 [2]。

⁴英語の場合は、domain (定義域) に対応した codomain (強いて訳すと余域?) が良く使われているようである (target set という呼び方もあるが、これは source set と対になるのであろう)。日本語では、メジャーと言えないものがない。終集合というのがあるが、これは始集合と対になる言葉で、グラフの話をする場合は良く使われるようだが、定義域とは合わないように思う。

⁵高校数学で「この関数の値域を求めよ」と言ったとき、不等式で書いた条件を答えとしてあつたりするので、同じであると厳密には言えないかもしれない。大学の数学で値域と言えは集合であつて、集合を定める条件ではない。つまり、例えば関数の値 y の範囲が $1 \leq y \leq 2$ であれば、値域は $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 2\}$ と書くべきである。

値域は色々な表現がある

$$f \text{ の値域} = f \text{ の像} = f \text{ による } X \text{ の像} = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \text{Image}(f).$$

注意 4.3 (細かい注意) f を写像と言うけれども、定義域 X , 終域 Y , 対応 f , 3つの組をまとめて写像と考えた方がよい。単に「写像 f 」としか書いていなくても、 X と Y が何であるかの情報が付いている (決まっている) と考えるべきである。■

例 4.4 (写像とは式のことではない — 異なる式で同じ写像が定義されることもある) これは教科書 (中島 [1]) にあるものです。 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ のとき、 $f: X \rightarrow Y$ をすべて求めよう。 $x = 1, 2, 3$ に対する $f(x)$ を指定すれば f が定まる。 次の 8つ f_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) がある。

| | $f_j(1)$ | $f_j(2)$ | $f_j(3)$ |
|---|----------|----------|----------|
| 1 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 4 | 4 |
| 6 | 5 | 4 | 5 |
| 7 | 5 | 5 | 4 |
| 8 | 5 | 5 | 5 |

例えば

$$f_2(1) = 4, \quad f_2(2) = 4, \quad f_2(3) = 5.$$

$g(x) := \max\{x + 2, 4\}$ で $g: X \rightarrow Y$ を定めると

$$g(1) = \max\{1 + 2, 4\} = 4, \quad g(2) = \max\{2 + 2, 4\} = 4, \quad g(3) = \max\{3 + 2, 4\} = 5.$$

$h(x) := \left\lceil \frac{x+7}{2} \right\rceil$ で $h: X \rightarrow Y$ を定めると

$$h(1) = \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil = 4, \quad h(2) = \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 4, \quad h(3) = \left\lceil \frac{10}{2} \right\rceil = 5.$$

結局、 f_2, g, h は、みな等しい:

$$f_2 = g = h.$$

写像の相等は上で定義したように、定義域 X , 終域 Y , 写像の値の 3つがそれぞれ一致することで、 $f(x)$ を定義する式が一致することではないことに注意する (そもそも f_2 は、 $f_2(x)$ の式で与えていない)。

集合 X から集合 Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある:

$$Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}.$$

今の場合

$$Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}. \blacksquare$$

余談 4.5 (写像は規則?) 時々、 X の各々の要素 x を、 Y のただ一つの要素に対応させる規則のことを、 X から Y への写像という、と説明する人がいる (私も授業で口を滑らせることがあった)。しかし「規則」は誤解を招きかねない表現である、と私は考えている。「規則」とは、

例えば式のように、値を求めるための手順を明確に説明したもののことだ、と受け取られる可能性がある。しかし、規則 (式) が異なっても同じ写像が定義される場合がある、ということは、写像を規則そのものと考えべきではない、ということになる。

それとは別に、写像が定まることは分かっても、「規則があるなら規則を書け」というツッコミに答えられない場合があることを指摘しておく。例えば微分方程式の問題では、解 (それは関数である) が一意的に存在するが、それを具体的な式で書くことは不可能である、という状況が非常にしばしばある。■

余談 4.6 (集合の言葉による写像の定義) 上の写像の定義はいかにも曖昧である。実は現代の数学では、集合を用いて、次のように写像を定義する。

グラフによる写像の定義

2つの空でない集合 X と Y の直積集合 $X \times Y$ の部分集合 f が

(i) $(\forall x \in X) (\exists y \in Y) (x, y) \in f$. (任意の x に対応する y が存在する)

(ii) $(\forall (x_1, y_1) \in f) (\forall (x_2, y_2) \in f) x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. (一つの x に対応する y は1つしかない)

を満たすとき、 f を X から Y への写像と呼び、 $x \in X$ に対して $(x, y) \in f$ となる $y \in Y$ (これは一意的に存在する) を $f(x)$ と表す。

この定義の $f (\subset X \times Y)$ は、いわゆる関数のグラフである。グラフは集合なので、すでに学んだ集合に関する記号で記述することが出来る。■

4.2.2 高校数学の関数を写像とみなす

1. 高校では、 $f(x) = x$ の式、を書いて「 $f(x)$ は関数である」、と言うことが多い。確かに各々の x に対して、1つの $f(x)$ が定まる。
2. $f(x) = x$ の式があるとき、それに加えて、定義域 X , 終域 Y を定めれば写像と見なせる。
 - (a) X は明記されていないことが多いが、その場合は、 X を $f(x)$ が意味を持つようなすべての実数 x の集合とする、のが不文律 (暗黙のルール) らしい。定義域はなるべく大きい集合とするのが便利である、と考えているのであろう。
 - (b) Y については言及されていることはまれ。写像の定義をするために Y が必要な場合、 f の値域を含む Y を選べばよい。 f の値域を決定するのは面倒な場合もあるが、とにかく $f(x) \in \mathbb{R}$ であるから、とりあえず $Y = \mathbb{R}$ としておけば良い。

つまり、「高校数学の関数」に、 X と Y を付記すれば、めでたく (この教科書での) 写像になる。

例 4.7 以下のすべてで $Y = \mathbb{R}$ とする。

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ の場合、すべての実数 x に対して、 $x^2 + 2x + 3$ が意味を持つので、 \mathbb{R} を f の定義域 ($X = \mathbb{R}$ である) とする。これで写像 $f: X \rightarrow Y$ が得られる。

$f(x) = \frac{1}{x}$ の場合、 $x = 0$ に対しては $\frac{1}{x}$ はナンセンスであるが、 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であれば $\frac{1}{x}$ は意味を持つので、 $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする。これで写像 $f: X \rightarrow Y$ が得られる。

$f(x) = \sqrt{x}$ の場合は $X = [0, \infty)$ とする。これで写像 $f: X \rightarrow Y$ が得られる。

$f(x) = \log x$ の場合は $X = (0, \infty)$ とすれば写像 $f: X \rightarrow Y$ が得られる。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \text{ の場合は } X = \mathbb{R} \text{ とすれば、写像 } f: X \rightarrow Y \text{ が得られる。} \blacksquare$$

注意 4.8 終域 Y の取り方には自由度のある場合が多いが、値域は1つに定まる。高校数学でも「値域を求めよ」という問題はあった。■

関数とは？この教科書 (中島 [1]) の立場は、

関数とは写像 (の1種) で、定義域 X と終域 Y が \mathbb{R}^N の部分集合であるもののこと

(定義域は不問で、終域だけ \mathbb{R}^N の部分集合とする、つまり写像の値が数または数ベクトルである場合に関数と呼ぶ、という流儀もある。)

4.2.3 色々な写像の例

例 4.9 (恒等写像) X を空でない集合とすると、 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ を $\text{id}_X(x) = x$ ($x \in X$) で定める。これを X の**恒等写像** (the identity mapping of X) と呼ぶ。■

例 4.10 (Dirichlet の関数) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

例えば $f(1) = 1, f(1/2) = 1, f(\sqrt{2}) = 0, f(\pi) = 0$. この f を **Dirichlet の関数** と呼ぶ。■

例 4.11 (射影) X, Y が集合であるとき、直積集合 $X \times Y$ が定義できる。

$$\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_1(x, y) = x.$$

$$\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y, \text{pr}_2(x, y) = y.$$

要するに、 pr_j は第 j 成分を取り出す写像である。それぞれ X への**射影**、 Y への射影と呼ぶ。■

例 4.12 (\mathbb{R}^2 の1次変換) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とするとき、 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を以下のように定める。 $f(x, y) = (x', y')$ として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした f を \mathbb{R}^2 の**1次変換**という。 $ad - bc \neq 0$ のとき、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に)、平面全体を平面全体に写す。合同な変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。■

問 1. $ad - bc \neq 0$ のとき、 $f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy) \in \mathbb{R}^2$ は全単射であることを示せ。

例 4.13 $X :=$ 平面内の多角形全体の集合、 $Y := \mathbb{R}$, $f(A) := A$ の面積、として、 $f: X \rightarrow Y$ が定まる。■

例 4.14 (微分) $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を \mathbb{R} から \mathbb{R} への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。 $X := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}), Y := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}), D: X \rightarrow Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。■

例 4.15 (定値写像) X, Y は空でない写像で、 $c \in Y$ とするとき、 $f: X \rightarrow Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を **定値写像** (constant map)、**定数写像** と呼ぶ。■

例 4.16 (特性関数) X は空でない集合、 $A \subset X$ とするとき、 $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の **特性関数** (the characteristic function of A) または **定義関数** と呼ぶ。■

例 4.17 (包含写像) $X \subset Y$ のとき、 $i: X \rightarrow Y$ を $i(x) = x$ ($x \in X$) で定める。この i を ほうがんしゃぞう **包含写像** (the inclusion map) と呼ぶ。 i の代わりに ι と書くことも多い (ι はギリシャ文字のイオタ)。■

問 2. 例 4.9~4.17 の写像の値域は何か答えよ (解答は p. 25)。

問 3. 以下の各写像の値域を求めよ。

(1) $X = \mathbb{R}, f: X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 4$ ($x \in X$).

(2) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, g: X \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + \frac{1}{x}$ ($x \in X$).

(3) $X = \mathbb{R}, h: X \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sin x$ ($x \in X$).

(4) $X = [0, \infty), \varphi: X \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sqrt{x}$ ($x \in X$).

例 4.18 (数列) 実数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

は、 \mathbb{N} から \mathbb{R} への写像

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

と見なせる。以下、この講義では数列はつねに写像とみなすことにする。実数列の全体は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。

記号が少々紛らわしいが、「数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の (写像としての) 値域は $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ である」。

■

4.3 合成写像

合成関数の概念は自然に写像にも拡張できる。

定義 4.19 (合成写像) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とするとき、

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で $h: X \rightarrow Z$ が定められる (模式的な図を描こう)。この h を f と g の**合成** (the composition of f and g)、あるいは**合成写像** (the composite mapping) と呼び、 $g \circ f$ で表す:

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

時々 $g \circ f$ を単に gf と書くこともある。また $\overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{f \text{ が } n \text{ 個}}$ を f^n と書くこともある。この講義では、そういう記号は使わない。

注意 4.20 (合成写像の別の定義) 実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

$f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Z, f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h: X \rightarrow Z, \quad h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像とよぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、 $Y' = Y$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。 $Y' = Y$ 出なくても $f(X) \subset Y'$ であれば $g(f(x))$ が意味を持つので、 h が定義できる。■

命題 4.21 (合成写像に関する結合律) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ とするとき、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

証明 $g \circ f: X \rightarrow Z$ で、 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$ で、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、 $h \circ g: Y \rightarrow W$ で、 $(h \circ g)(y) = h(g(y)) \quad (y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$ で、

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

ゆえに、 $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

問 4. $f: X \rightarrow Y$ とするとき、

$$f \circ \text{id}_X = f, \quad \text{id}_Y \circ f = f$$

が成り立つことを示せ。

4.4 単射, 全射, 全単射

定義 4.22 (単射, 全射, 全単射)

(i) $f: X \rightarrow Y$ が^{たんしゃ}単射 (an injection, 形容詞は injective) あるいは**1対1** (one to one) であるとは、

$$(\#) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことを言う。

(ii) $f: X \rightarrow Y$ が^{ぜんしゃ}全射 (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは**上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(b) \quad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことを言う。

(iii) $f: X \rightarrow Y$ が**全単射**あるいは**双射** (a bijection, 形容詞は bijective) あるいは**1対1対応** (one-to-one correspondence) であるとは、 f が全射かつ単射であることを言う。

問 5. (1) $f: X \rightarrow Y$ が単射でないことを論理式で表わせ。 (2) $f: X \rightarrow Y$ が全射でないことを論理式で表わせ。

条件 (#) は

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る。また、この条件 (#) は

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である ($x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ の対偶は、 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ であるから)。

条件 (b) は

$$Y = f(X)$$

とも書ける。実際 (一般に $f(X) \subset Y$ が成り立つことに注意すれば)

$$\begin{aligned} (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x) &\Leftrightarrow Y \subset f(X) \\ &\Leftrightarrow Y = f(X). \end{aligned}$$

ここで図を描いて説明する。

- 写像が単射であるとは、1つの的に2つ以上の矢が刺さっていないこと。
- 写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

余談 4.23 (' の読み方) 日本の高校では、 x' を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では“x prime” 「エックス プライム」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “—” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う (この二つのダッシュの使い分けは結構難しい…脱線になるけど)。

「ことばの話 1835 「ダッシュ」」⁶によると

⁶<https://www.ytv.co.jp/announce/kotoba/back/1801-1900/1831.html>

にある程度詳しい事が載っているとか。(個人的に、古い英語 (England で使っているやつ) では、dash と読んだらしい、というのはどこかで目にした覚えがあったので、納得出来た。)■

例 4.24 $X =$ ある時点での明治大学の学生全体, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$ 学生 x の学生番号 とするとき、 f は単射である。(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。)■

例 4.25 (狭義単調ならば単射) 実軸上の区間 I で定義された実数値関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が、狭義単調増加であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。また、 f が狭義単調減少であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

を満たすことを言う。

狭義単調増加関数、狭義単調減少関数は単射である。例えば $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ は単射である。■

問 6. 狭義単調増加関数は単射であることを示せ。(解答は p. 26)

問 7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ は狭義単調増加であることを示せ。(解答は p. 26)

問 8. I を \mathbb{R} の区間、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 f が

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

を満たすとき、 f は単調増加という。同様に f が

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

を満たすとき、 f は単調減少という。「単調増加ならば単射」、「単調減少ならば単射」は偽である。反例を示せ。

例 4.26 f_1, f_2, f_3, f_4 を以下のように定義する。

- $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$
- $f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$
- $f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f_3(x) = x^2$
- $f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f_4(x) = x^2$

f_1 は単射でない。実際、 $x = -1$, $x' = 1$ とおくと、 $x \neq x'$ かつ $f_1(x) = f_1(x')$ が成り立つ。同様にして、 f_3 も単射ではない。

一方、 f_2 は単射である。実際、 $f_2'(x) = 2x > 0$ ($x \in (0, \infty)$) であるから、 f_2 は $[0, \infty)$ で狭義単調増加であるので、単射である。同様にして、 f_4 も単射である。

f_1 は全射でない。実際、 $y = -1$ とおくと、 $y \in \mathbb{R}$ であり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $f_1(x) = x^2 \geq 0 > -1 = y$ であるから、 $f_1(x) \neq y$ 。同様にして、 f_2 も全射ではない。

一方、 f_3 は全射である。実際、 $[0, \infty)$ に属する任意の y に対して、 $x := \sqrt{y}$ とおくと、 $x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ であり、 $f_3(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$ 。同様にして、 f_4 も全射である。

まとめると、

| 関数 | 単射 | 全射 | 全単射 |
|-------|----|----|-----|
| f_1 | × | × | × |
| f_2 | ○ | × | × |
| f_3 | × | ○ | × |
| f_4 | ○ | ○ | ○ |

となる。■

例 4.27 • X を空でない集合とする。恒等写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$ に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$ ならば、 $x_1 = x_2$ が成り立つので、 id_X は単射である。

また、任意の $y \in X$ に対して、 $x := y$ とおくと、 $x \in X$ であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$ であるから、 id_X は全射である。

以上から、 id_X は全単射である。

- $\emptyset \neq X \subset Y$ とするとき、包含写像 $i: X \rightarrow Y$ は単射である。
- 空でない集合 X, Y に対して、射影作用素 $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ は全射である。■

次の定理は基本的である。時間がないうちは、(6) 以降は後回しにしても良い(しかし (5) までは省略できない)。

定理 4.28 (合成写像と単射性、全射性) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とする。

- (1) f と g が単射ならば、 $g \circ f$ は単射である。
- (2) f と g が全射ならば、 $g \circ f$ は全射である。
- (3) f と g が全単射ならば、 $g \circ f$ は全単射である。
- (4) $g \circ f$ が単射ならば、 f は単射である。
- (5) $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射である。
- (6) $g \circ f$ が単射でも、 g は単射とは限らない。
- (7) $g \circ f$ が全射でも、 f が全射とは限らない。
- (8) $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、 g は単射である。
- (9) $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、 f は全射である。

証明

(1) f と g が単射と仮定する。 $x, x' \in X$ が $x \neq x'$ を満たすとする。 f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$ 。 g が単射であるから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ 。すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。ゆえに $g \circ f$ は単射である。

(別証明) f と g が単射と仮定する。 $x, x' \in X$ が $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ を満たすとする。 $g(f(x)) = g(f(x'))$ であるから、 g が単射であるので $f(x) = f(x')$ 。また f が単射であるので $x = x'$ 。ゆえに $g \circ f$ は単射である。

- (2) f と g が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、 g が全射であることから、 $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。 f が全射であることから、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

ゆえに $g \circ f$ は全射である。

- (3) f と g が全単射と仮定する。 $g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

- (4) $g \circ f$ が単射と仮定する。 $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ を満たすとする。 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ 。 $g \circ f$ が単射であるから、 $x = x'$ 。ゆえに f は単射である。

(別証明) $g \circ f$ が単射と仮定する。 $x, x' \in X$ が $x \neq x'$ を満たすとする。背理法で $f(x) \neq f(x')$ を示そう。もしも $f(x) = f(x')$ が成り立ったとすると、 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ 。 $g \circ f$ が単射であることから、 $x = x'$ 。これは矛盾である。ゆえに $f(x) \neq f(x')$ である。ゆえに f は単射である。

- (5) $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、 $z = g \circ f(x)$ が成り立つ。このとき、 $y := f(x)$ とおくと、 $y \in Y$ であり、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

- (6) $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を定めると、 $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(1) = 1$ である。 $g \circ f$ は単射であるが、 $g(1) = g(-1)$ であるので g は単射でない。

(別解) $X = [0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $Z = [0, \infty)$, $f(x) = x$ ($x \in X$), $g(y) = y^2$ ($y \in Y$) として $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を定めると、 $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(x) = x^2$ である。この $g \circ f$ は単射であるが、 $g(1) = g(-1)$ であるので g は単射でない。

- (7) (6) と同じ写像が反例となる。 $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を定めると、 $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(1) = 1$ である。 $g \circ f$ は全射であるが、 f は全射でない。

(6) の別解の写像は、この (7) の反例にもなる。

- (8) $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。 $y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。 f が全射であるから、 $f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。 $y \neq y'$ であるから、 $x \neq x'$ である。 $g \circ f$ が単射であるから、 $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。これから

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g(f(x')) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

(別証明) $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。 $y, y' \in Y$ が $g(y) = g(y')$ を満たすとする。 f が全射であることから、 $f(x) = y$, $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。このとき、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x').$$

$g \circ f$ は単射であるから、 $x = x'$ 。ゆえに $y = f(x) = f(x') = y'$ 。ゆえに g は単射である。

- (9) $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、 $z = g(y)$ とおくと、 $z \in Z$ である。 $g \circ f$ が全射であるから、 $g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、 $g(f(x)) = z = g(y)$ であるが、 g が単射であるから、 $f(x) = y$ 。ゆえに f は全射である。

■

問 9. 次の各場合に、 X から Y への写像をすべて求め、そのうち単射であるもの、全射であるもの、全単射であるものの個数を求めよ。

- (1) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ (2) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ (3) $X = \{1, 2\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$

問 10. $g \circ f$ が単射であり、かつ f が全射でないならば、 g は単射ではないことを示せ。

参考: 全単射と要素の個数

(ここは講義時間に余裕があれば講義するが、カットすることになる可能性が大きい…宿題のネタにすることはある。)

実は次の命題が成り立つ。

命題 4.29 (有限集合の間の写像の全射性、単射性) X, Y が有限集合であるとする。 X と Y の要素の個数をそれぞれ $|X|$, $|Y|$ と書く。このとき、以下の (1)–(4) が成り立つ。

- (1) X から Y への単射が存在する $\Leftrightarrow |X| \leq |Y|$.
 (2) X から Y への全射が存在する $\Leftrightarrow |X| \geq |Y|$.
 (3) X から Y への全単射が存在する $\Leftrightarrow |X| = |Y|$.
 (4) $|X| = |Y|$ ならば、任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。
 (i) f は単射である。 (ii) f は全射である。 (iii) f は全単射である。

証明 $n := |X|$, $m := |Y|$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

- (1) $f: X \rightarrow Y$ が単射であれば、 $f(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) はどの二つも相異なり、 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、要素の個数を比較して $|X| = n \leq |Y|$ 。逆に $n \leq m$ とすると、 $f(x_i) = y_i$ ($1 \leq i \leq n$) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$ を定義すると、 f は単射となる。
 (2) $f: X \rightarrow Y$ が全射であれば、 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$ であるから、 $|X| = n \geq |Y|$ 。逆に $n \geq m$ とすると、 $f(x_i) = y_i$ ($1 \leq i \leq m$), $f(x_i) = y_1$ ($m < j \leq n$) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$ を定義すると、 f は全射となる。
 (3) X から Y への全単射が存在すれば、(1) から $|X| \leq |Y|$, (2) から $|X| \geq |Y|$ であるから $|X| = |Y|$ 。逆に $|X| = |Y|$ とすると、(1) から X から Y への単射 f が存在する。(3) から f は全単射である。
 (4) (i) \Leftrightarrow (ii) を示せば良い (それが出来ると、(i) \Rightarrow (iii) と (ii) \Rightarrow (iii) が導かれる)。

$f: X \rightarrow Y$ が単射とする。 $f(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) が相異なるので、 $|\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}| = n$ 、仮定からそれが $|Y|$ に等しく、 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$ 。ゆえに f は全射である。

一方、 $f: X \rightarrow Y$ が全射とする。 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$. 仮定から $n = |Y|$ であるから、 $f(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに f は単射である。■

命題 4.30 (参考: 線形代数バージョン) X, Y が体 K 上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ $\dim X, \dim Y$ と書く。

- (1) X から Y への単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$.
- (2) X から Y への全射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$.
- (3) X から Y への全単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$.
- (4) $\dim X = \dim Y$ ならば、任意の線形写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下は同値である。
 - (i) f は単射である。
 - (ii) f は全射である。
 - (iii) f は全単射である。

4.5 逆写像

4.5.1 逆写像の定義

高校数学で逆関数はおなじみであろう。それを一般化したのが逆写像である。

定義 4.31 (逆写像) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の**逆写像** (the inverse mapping of f) であるとは

$$(1) \quad g \circ f = \text{id}_X \quad \wedge \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

が成り立つことをいう。

逆写像は無条件では存在しない。 f の逆写像が存在するためには、 f が全単射であることが必要十分である (後で証明する)。

4.5.2 逆関数の例を思い出す

例 4.32 $X = Y = [0, \infty)$ として、 $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = x^2$ ($x \in X$) で定める。

f は全射である。すなわち、任意の $y \in Y = [0, \infty)$ に対して、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X = [0, \infty)$ が存在する (証明 (i) ($\sqrt{\quad}$ を知っている場合) $x := \sqrt{y}$ とおくと $x \in X$ かつ $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$. あるいは (ii) ($\sqrt{\quad}$ を知らない場合) $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と中間値の定理を用いる。)

また f は単射である。実際、 $f'(x) = 2x > 0$ ($x > 0$) であるから、 f は $X = [0, \infty)$ 全体で狭義単調増加であり、 f は単射である。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ はただ一つ存在する (もちろん $x = \sqrt{y}$ である)。その x を $g(y)$ として、関数 $g: Y \rightarrow X$ が定まる。これを f の**逆関数**と呼ぶのであった。

この定義から、任意の $y \in Y$ に対して、 $x := g(y)$ とおくと、 $f(x) = y$. ゆえに $f(g(y)) = f(x) = y$. したがって $f \circ g = \text{id}_Y$.

一方、任意の $x \in X$ に対して $y := f(x)$ とおくと、やはり g の定義から $g(y) = x$. ゆえに $g(f(x)) = g(y) = x$. ゆえに $g \circ f = \text{id}_X$.

以上から、 $g: Y \rightarrow X$ は f の逆写像である。 ■

以上の議論は

- $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty), f(x) = e^x, g(y) = \log y$
- $X = X := (-\pi/2, \pi/2), Y = \mathbb{R}, f(x) = \tan x (x \in X), g(y) = \tan^{-1} y$

について、ほとんど同様に成り立つ。

これはさらに一般化できる、という話を以下で見る。

4.5.3 逆行列の話と比べてみよう

これからする話は、線形代数で聞いた話とよく似ている、と思うかもしれない。それで先回りして説明しておく。

n 次実正方行列 A に対して、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $f(x) = Ax (x \in \mathbb{R}^n)$ で定義できる。このとき、次のことが成り立つ。

- A の逆行列は存在するならば1つしかない。(それを A^{-1} で表す。)
- f が全単射 $\Leftrightarrow A$ の逆行列が存在する。
- A の逆行列が存在するならば $(A^{-1})^{-1} = A$ 。
- A, B がともに逆行列を持つならば $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 。

以上のことは、まだ教わっていないかもしれないけれど、そのうちに教わるはず。この話と同じようなことが逆写像についても成り立つ。

4.5.4 逆写像の一意性

命題 4.33 (逆写像の一意性) $f: X \rightarrow Y$ の逆写像は存在すれば1つしかない。

証明 $g, g': Y \rightarrow X$ が

$$g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y, \quad g' \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g' = \text{id}_Y$$

を満たすとする。これらのことと、結合法則から

$$g' = g' \circ \text{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

ゆえに $g' = g$. ■

定義 4.34 (逆写像の記号) $f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 f^{-1} で表す。

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ であり

$$(2) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

4.5.5 全単射 \Leftrightarrow 逆写像存在

命題 4.35 (逆写像が存在 \Leftrightarrow 全単射)

- (1) $f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するならば、 f は全単射である。
- (2) $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば f の逆写像が存在する。

証明 (1) 一般に恒等写像は全単射であることを思い出す。 $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ は全射だから、 f は全射である。 $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ は単射だから、 f は単射である。

(2) f は全射だから、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ 。

このような $x \in X$ はただ1つしかない。実際 $x, x' \in X$ かつ $y = f(x)$ かつ $y = f(x')$ とすると、 $f(x) = f(x')$ であり、 f が単射であるから $x = x'$ 。

$g: Y \rightarrow X$ を $g(y) = x$ (x は $x \in X \wedge f(x) = y$ を満たす) で定めると、 $g = f^{-1}$ 。実際

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \wedge \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

が成り立つ。

その証明は、「逆関数の例を思い出す」の例 4.32 の議論と同じである。■

4.5.6 $(f^{-1})^{-1} = f, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

命題 4.36 (逆写像の逆写像は元の写像, 合成写像の逆写像)

- (1) $f: X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。
- (2) $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ の逆写像がともに存在するならば、 $f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

線形代数で、 A と B が n 次正則行列ならば AB も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ、という定理があるが、それと同じである。

証明

- (1) $g := f^{-1}$ とおくと、 $g: Y \rightarrow X$ かつ

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \wedge \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

これは f が g の逆写像であることを示している。ゆえに $f = g^{-1} = (f^{-1})^{-1}$ 。

- (2) 逆写像の定義の条件を確かめる。

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f \\ &= (f^{-1} \circ \text{id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= ((g \circ f) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \text{id}_X) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z. \end{aligned}$$

ゆえに $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。■

4.5.7 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

次の関係はしばしば用いる。

命題 4.37 $f: X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、任意の $x \in X$, 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

証明 $(\Rightarrow) y = f(x)$ ならば

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = \text{id}_X(x) = x.$$

$(\Leftarrow) x = f^{-1}(y)$ ならば

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = \text{id}_Y(y) = y. \blacksquare$$

問 11. \mathbb{R}^2 の部分集合 D, E を次のように定める ($\{ \}$ の中のカンマ, は \wedge と解釈する)。

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2, -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\},$$
$$E = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2, -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq v \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

また $f(x, y) = (x^2 - y^2, y/x)$ とおく。

- (1) D を図示せよ。
- (2) $(x, y) \in D$ のとき、 $f(x, y) \in E$ であることを示せ。
- (3) f を D から E への写像 $f: D \rightarrow E$ とみなすとき、 f は全単射であることを示せ。

4.6 部分集合の像と逆像

すでにフライング気味に $f(X)$ という記号を使っているが、写像 f の定義域 X の任意の部分集合 A に対して、「 f による A の像」 $f(A)$ を定義して、基本的な性質を述べる。

定義 4.38 (部分集合の像, 写像の像 (値域)) $f: X \rightarrow Y$ とする。

- (1) $A \subset X$ に対して、 A の要素の f による像の全体を $f(A)$ で表し、 A の f による像 (the image of A under f) または**順像** (the direct image of A under f) と呼ぶ。

$$f(A) := \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- (2) 特に写像 f の定義域 X の f による像 $f(X)$ を、 f の像 (the image of f)、あるいは f の**値域** (the range of f) と呼び、 $\text{Image}(f)$ とも表す。

$$\text{Image}(f) := f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

$f: X \rightarrow Y, a \in X, A \subset X$ とするとき、 $f(a)$ と $f(A)$ という記号が使えることになる。どちらも f による「エー」の像であるが、 $f(a)$ は Y の要素、 $f(A)$ は Y の部分集合である。異なる概念に対して、形だけからは区別が付かない同じ記号を用いることを、「記号の濫用」といい、あまり良くないこととされるが、上の記号は数学の普通のテキストを読むためには避けることが出来ない。

$(\exists x \in A) y = f(x)$ というのは、 y に関する条件であることに注意しよう。 $\{y \mid P(y)\}$ ($P(y)$ は y に関する条件) という形をしているわけである。 $\{f(x) \mid x \in A\}$ は $\{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$ の略記法である。

特に f の値域は色々な記号、呼び名で表される。

$$f(X) = \text{Image}(f) = \text{“}f \text{ の値域”} = \text{“}f \text{ の像”} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

念のため確認しておく:

f の値域とは、 f の値の全体である。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射であるという条件は、 $f(X) = Y$ と表せる。

定義 4.39 (部分集合の逆像) $f: X \rightarrow Y$ とする。 $B \subset Y$ に対して、 X の要素で f による像が B に属するもの全体を $f^{-1}(B)$ で表し、 B の f による**逆像** (the inverse image of B , pull-back) と呼ぶ。

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

例 4.40 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ とするとき

$$f(\{0\}) = \{0\}, \quad f\left(\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}\right) = \{0, 1\}, \quad f(\{0, \pi\}) = \{0\}, \quad f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1],$$

$$f([0, \pi]) = [0, 1],$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n\pi\}, \quad f^{-1}(\{2\}) = \phi,$$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 6\right]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right].$$

逆写像 f^{-1} は存在しないので、 $f^{-1}(2)$ や $f^{-1}(0)$ はナンセンスである。■

証明するときのために記憶すべきこと

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A).$$

$$y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in X \wedge f(x) \in B.$$

f が全単射ではない場合、つまり f の逆写像 f^{-1} が存在しない場合にも、 $f^{-1}(B)$ という記号を用いることに注意が必要である。慣れないと混乱するかもしれない。教科書 (中島 [1]) では、この点を強く注意している。

f の逆写像 f^{-1} が存在する場合、 $f^{-1}(B)$ という記号は、 f による B の逆像、 f^{-1} による B の順像、ふた通りに解釈できる。しかし、どちらで解釈しても同じ集合を表す (次の命題 4.41)。ゆえに本質的な混乱は生じない。

命題 4.41 $f: X \rightarrow Y$ が全単射、 $B \subset Y$ とするとき、 B の f による逆像と B の逆写像 f^{-1} による順像は一致する。

証明

$$\begin{aligned} B \text{ の } f^{-1} \text{ による順像} &= \{y \mid (\exists b \in B) y = f^{-1}(b)\} = \{y \mid (\exists b \in B) b = f(y)\} \\ &= \{y \mid f(y) \in B\} = B \text{ の } f \text{ による逆像.} \end{aligned}$$

(命題 4.36 より二つ目の等号が成立する。) ■

注意 4.42 (教科書 (中島 [1]) の記号法について) [1] では、 $f(A)$ や $f^{-1}(B)$ という記号を使うことのデメリットを指摘して、 $f(A)$ のことを $f_*(A)$, $f^{-1}(B)$ のことを $f^*(B)$ と表している。

$$f_*(A) = f(A) = \text{“}A \text{の} f \text{による像”} = \{y \mid \exists a(a \in A \wedge y = f(a))\},$$

$$f^*(B) = f^{-1}(B) = \text{“}B \text{の} f \text{による逆像”} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

しかし、 $f(A)$ や $f^{-1}(B)$ という記号はもう十分に普及してしまっていて、避けて通ることは到底不可能であると思う。だったら最初からその記号を用いて慣れてしまう方が良いと私 (桂田) は考える。

- X の要素 x の f による像 $f(x)$ と、 X の部分集合 A の f による像 $f(A)$ を混同しないように、不徹底なやり方ではあるけれど、配慮はされている。つまり、集合の要素を表すのには小文字を、(部分) 集合を表すのには大文字を使っているのである。初心者向けの補助輪として当面十分であると考え。
- $f^*(B)$ と $f_*(A)$ という記号を使う場合、どちらが順像、逆像であるか、混乱する可能性はないだろうか? $f^{-1}(B)$ という記号は、 f による B の (順) 像でないことが明白で良いと思う。
- 読者の混乱を避けるためというが、結局のところ、記号を増やして負担も増やしてしまうのではないだろうか。 f の値域 (像) を表すのに、 $\text{Image}(f)$, $f_*(X)$, $f(X)$ と記号を3つも覚えなくてはならない ($\text{Image}(f)$ という記号は、読むと “image of f ” (「 f の像」) で、そのものズバリ。これ自身は好ましく思うけれど。)。

もちろん、教科書が採用する記号には良いこともある。例えば上の命題 4.41 の結論部分を (言葉でなく)、 $(f^{-1})_*(B) = f^*(B)$ と式で書くことが出来る。 ■

命題 4.43 $f: X \rightarrow Y$ とする。

(1) $f(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$

(2) $f^{-1}(Y) = X.$

(3) $(\forall x \in X) f(\{x\}) = \{f(x)\}.$

(4) $(\forall y \in Y) f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$

問 12. 命題 4.43 を証明せよ。

命題 4.44 $f: X \rightarrow Y, A_1, A_2 \subset X$ とする。

- (1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
- (2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
- (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- (4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.
- (5) f が単射であれば、(1) の逆が成り立ち、(2) と (4) の等式バージョンが成立する。すなわち、
 - (#) $f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2$.
 - (b) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
 - (h) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.
- (6) f が単射でなければ (#), (b), (h) のそれぞれについて、それが成り立たないような A_1, A_2 が存在する。

教科書に書いてあることを紹介する。

(3) では等式が成り立つのに、(2), (4) では等式になっていない。(5) では単射ならば等式が成り立つと書いてある。それならば単射でないならば等式が成り立たないのではないかと推測できる。それが成り立たないことを自分で確認する自主性が大事である。

要するに (6) で書いたことを自分で推測するようになろう、ということである。よくあるのは、成り立たないような反例をあげよ、という問題であるが、上では単射でなければ、必ず成り立たないという命題にした。

証明

- (1) $A_1 \subset A_2$ を仮定する。 $y \in f(A_1)$ とすると、 $(\exists x \in A_1) y = f(x)$ 。 $A_1 \subset A_2$ であるから、 $x \in A_2$ 。ゆえに $y \in f(A_2)$ 。ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$ 。
- (2) (定跡に従って、「 $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると」で始めて証明することも出来るが、(1) を使うと簡単である。) $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ かつ $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ であるから、(1) を用いると、 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ かつ $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$ 。ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ 。
- (3) (これも定跡に従って証明できるが、(1) を利用すると、少し簡単になる。)
 - (a) $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ かつ $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ であるから、(1) より $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ かつ $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。

(b) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とすると、 $(\exists x \in A_1 \cup A_2) y = f(x)$. $x \in A_1$ の場合は $y \in f(A_1)$ であるから、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. $x \in A_2$ の場合は $y \in f(A_2)$ であるから、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. いずれの場合も $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

(a), (b) より $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

(別証) 任意の $y \in Y$ に対して、

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow (\exists x) (x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow ((\exists x) (x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (\exists x) (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終) (途中で $((\exists x)P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)P(x)) \vee ((\exists x)Q(x))$ を用いた⁷.)

(4) $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、 $y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$. $y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1) y = f(x)$. この x は A_2 には属さない。実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、 $y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

(5) 省略する。教科書 (中島 [1]) の pp. 137–138 に載っている。

(6) f が単射でなければ、 $(\exists x_1 \in X) (\exists x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$. そこで $A_1 := \{x_1\}$, $A_2 := \{x_2\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \{f(x_1)\}, \\ f(A_2) &= \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\} = f(A_1), \\ f(A_1 \cap A_2) &= f(\emptyset) = \emptyset, \\ f(A_1) \cap f(A_2) &= \{f(x_1)\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(A_1) &\subset f(A_2) \wedge A_1 \not\subset A_2, \\ f(A_1 \cap A_2) &\neq f(A_1) \cap f(A_2), \end{aligned}$$

$A_1 := \{x_1, x_2\}$, $A_2 := \{x_2\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(A_1 \setminus A_2) &= f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}, \\ f(A_1) \setminus f(A_2) &= \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_1)\} = \{f(x_1)\} \setminus \{f(x_1)\} = \emptyset \end{aligned}$$

であるから

$$f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2). \blacksquare$$

f の逆像 $f^{-1}(\cdot)$ に関する公式はずっとシンプルで、証明もやさしい。変な話になるが、テストで出題されたら、絶対に逃がさない、くらいに考えて欲しい。

⁷これは \vee を \wedge にした式は一般には成り立たない。また \exists のかわりに \forall にしたときは、 $((\forall x)P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)P(x)) \wedge ((\forall x)Q(x))$ は一般に成り立つが、 \wedge を \vee にした式は成り立たない。

命題 4.45 $f: X \rightarrow Y, B_1, B_2 \subset Y$ とする。

- (1) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- (2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- (3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- (4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $B \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
- (5) f が全射ならば、(1) の逆も成立する。

$$B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

証明

(1) $B_1 \subset B_2$ を仮定する。 $x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、 $f(x) \in B_1$. $B_1 \subset B_2$ より $f(x) \in B_2$. ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$. ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(2) $x \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(3) (2) と同様に証明できる。

(4) (2) と同様に証明できる。

(5) (1) があるので、 f が全射と仮定するとき、 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ ならば $B_1 \subset B_2$ が成り立つことを証明すればよい。 $y \in B_1$ とすると、 f が全射という仮定から $(\exists x \in X) y = f(x)$. $f(x) \in B_1$ であるから、 $x \in f^{-1}(B_1)$. 仮定 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ より $x \in f^{-1}(B_2)$. ゆえに $y = f(x) \in B_2$. ゆえに $B_1 \subset B_2$. ■

命題 4.46 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$ とする。

- (1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.
- (2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. f が全射ならば $f(f^{-1}(B)) = B$.
- (3) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

証明 まず

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Leftrightarrow (\exists x \in A) y = f(x), \\ x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow f(x) \in B \end{aligned}$$

を思い出す。

(1) $x \in A$ とすると、 $f(x) \in f(A)$. ゆえに $x \in f^{-1}(f(A))$. ゆえに $A \subset f^{-1}(f(A))$.

以下 f が単射と仮定する。 $x \in f^{-1}(f(A))$ とすると、 $f(x) \in f(A)$. ゆえに $(\exists x' \in A) f(x) = f(x')$. f が単射であることから $x = x'$. ゆえに $x \in A$. ゆえに $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 従って $f^{-1}(f(A)) = A$.

(2) $y \in f(f^{-1}(B))$ とすると、 $(\exists x \in f^{-1}(B)) y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B)$ であるから、 $f(x) \in B$. ゆえに $y \in B$. ゆえに $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

以下、 f が全射と仮定する。 $y \in B$ とすると、 $(\exists x \in X) y = f(x)$. $f(x) \in B$ であることから、 $x \in f^{-1}(B)$. すると $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. ゆえに $B \subset f(f^{-1}(B))$. 従って、 $f(f^{-1}(B)) = B$.

(3) $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ とすると、 $(\exists x \in A \cap f^{-1}(B)) y = f(x)$. $x \in A$ であるから、 $f(x) \in f(A)$. $x \in f^{-1}(B)$ であるから、 $f(x) \in B$. ゆえに $y = f(x) \in f(A) \cap B$. ゆえに $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.

逆に $y \in f(A) \cap B$ とすると、 $y \in f(A)$ であることから、 $(\exists x \in A) y = f(x)$. $f(x) = y \in B$ であるから、 $x \in f^{-1}(B)$. ゆえに $x \in A \cap f^{-1}(B)$. ゆえに $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$. ゆえに $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$.

以上から $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$. ■

4.7 写像に関する用語

4.7.1 制限

写像 $f: X \rightarrow Y$ と、 X の部分集合 A , $f(A) \subset B \subset Y$ を満たす B が与えられたとき、写像 $g: A \rightarrow B$ を

$$g(x) := f(x) \quad (x \in A)$$

により定義できる。この g を f の A への制限とよび、 $f|_A$ と表す。

しばしば $B = Y$ の場合に限定して定義されたりもするが、定義域 A だけでなく、終域 B も限定することで g の性質を良くする (例えば全単射であるとか、微分同相であるとか) ことが多い。

4.7.2 グラフ

中学校以来、関数のグラフはおなじみであろう。関数のグラフとは、関数を図示したもの、という理解をしていると想像する。ここでは、一般の写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 f のグラフを定義する。それは、 $X \times Y$ の部分集合であり、図示できる場合は、中学校以来知っている図形と一致するが、必ずしも図示出来るものではない。

$f: X \rightarrow Y$ とするとき、

$$\text{graph } f := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

とおき、 f の**グラフ**と呼ぶ。

$\text{graph } f \subset X \times Y$ である。

$G \subset X \times Y$ がある写像のグラフであるためには、

$$(*) \quad (\forall x \in X)(\exists! z \in G) \quad \text{pr}_X(z) = x$$

が成り立つことが必要十分である。ここで pr_X は X への射影作用素である。

X から Y への写像とは、 $X \times Y$ の部分集合 G で、(*) を満たすものである、と言っても良い。

A 問の解答

解答 1. $\Delta := ad - bc$, $g: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \left(\frac{dx - by}{\Delta}, \frac{-cx + ay}{\Delta} \right) \in \mathbb{R}^2$ とおくと、 $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ であることが分かる。ゆえに f は全単射で、 $g = f^{-1}$ である。 ■

解答 2.

- $\text{id}_X(X) = \{\text{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.
- $D(\mathbb{R}) = \{D(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{0, 1\}$.
- $\text{pr}_1(X \times Y) = \{\text{pr}_1((x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\} = \{x \mid (x, y) \in X \times Y\} = X$. 同様にして、 $\text{pr}_1(X \times Y) = Y$.
- この f について $ad - bc = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0$ であるから、 $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.
 (授業では $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ となる理由を説明しなかったので、ここで説明しておく。 $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ は明らかだから、 $\mathbb{R}^2 \subset f(\mathbb{R}^2)$ を示そう。 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とするとき、連立1次方程式 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、係数行列が逆行列を持つので解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。このとき $f((x, y)) = (a, b)$. ゆえに $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$. ゆえに $\mathbb{R}^2 \subset f(\mathbb{R}^2)$.)
- $f(X) = \{f(A) \mid A \in X\} = \{f(A) \mid A \text{ は平面上の多角形}\} = \text{すべての多角形の面積の集合} = (0, \infty)$.
- $D(X) = \{D(f) \mid f \in X\} = \{f' \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})\} = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.
 (最後の等式の証明は少し難しいかも。一応書いてみる。 $Z := \{f' \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})\}$ とおき、 $Z = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を証明するのが目標である。(a) $g \in Z$ とすると、 $(\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) g = f'$. f が何回でも微分できることから、 g も何回でも微分できる。すなわち $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. (b) $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ とする。このとき、 $f(x) := \int_0^x g(t) dt$ とおくと、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $f'(x) = g(x)$. g が何回でも微分できることから、 f も何回でも微分できる。すなわち $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. ゆえに $g \in Z$. (a), (b) から $Z = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)
- $\chi_A(X) = \{\chi_A(x) \mid x \in X\}$ で、各 $x \in X$ に対して、 $\chi_A(x)$ は 0 または 1 である。
 - $A = X$ の場合、任意の $x \in X$ に対して、 $x \in A$ となるので $\chi_A(x) = 1$. ゆえに $\chi_A(X) = \{1\}$.
 - $A = \emptyset$ の場合、任意の $x \in X$ に対して $x \notin A$ となるので $\chi_A(x) = 0$. ゆえに $\chi_A(X) = \{0\}$.
 - それ以外の場合、すなわち $A \neq \emptyset \wedge A \neq X$ の場合、 $\chi_A(X) = \{0, 1\}$.
- $i(X) = \{i(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$. ■

解答 3. 結果のみ示す。(a) $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{7}{4}\}$, (b) $g(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}$, (c) $h(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$, (d) $\varphi(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$. ■

解答 4. (準備中)

解答 5. (1) $(\exists x \in X) (\exists x' \in X: x \neq x') f(x) = f(x')$. (2) $(\exists y \in Y) (\forall x \in X) y \neq f(x)$. ■

解答 6. I は \mathbb{R} の部分集合、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義単調増加、すなわち

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つと仮定する。

$x, x' \in I$ が $x \neq x'$ を満たすとする。このとき (i) $x < x'$ (ii) $x > x'$ のどちらかが成り立つ。

(i) の場合、 $f(x) < f(x')$ であるから、 $f(x) \neq f(x')$ 。

(ii) の場合、 $f(x) > f(x')$ であるから、 $f(x) \neq f(x')$ 。

いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$ が成り立つ。ゆえに f は単射である。 ■

解答 7. $f'(x) = 3x^2 > 0$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) であるから、 f は $(-\infty, 0]$ と、 $[0, \infty)$ で狭義単調増加である (平均値の定理を用いて証明できる)。ゆえに f は \mathbb{R} で狭義単調増加である。実際、 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ とするとき、

- $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ であれば、 $\exists c \in (x_1, x_2)$ s.t. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. ゆえに $f(x_1) < f(x_2)$.
- $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ であれば、 $\exists c \in (x_1, x_2)$ s.t. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. ゆえに $f(x_1) < f(x_2)$.
- $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$ であれば、 $(\exists c_1 \in (x_1, 0)) (\exists c_2 \in (0, x_2)) f(0) - f(x_1) = f'(c_1)(0 - x_1)$, $f(x_2) - f(0) = f'(c_2)(x_2 - 0)$ より、 $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$ であるから、 $f(x_1) < f(x_2)$.

ゆえにいずれの場合も $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ。 ■

解答 8. 定数関数、例えば $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$) は、単調増加かつ単調減少であるが、 $f(1) = f(2)$ であるから単射ではない。 ■

解答 9.

(1) 次の $f_1 \sim f_{27}$ の $3^3 = 27$ 個の写像がある。

| | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|----------|--------|--------|--------|-----|-----|-----|
| f_1 | 4 | 4 | 4 | No | No | No |
| f_2 | 4 | 4 | 5 | No | No | No |
| f_3 | 4 | 4 | 6 | No | No | No |
| f_4 | 4 | 5 | 4 | No | No | No |
| f_5 | 4 | 5 | 5 | No | No | No |
| f_6 | 4 | 5 | 6 | Yes | Yes | Yes |
| f_7 | 4 | 6 | 4 | No | No | No |
| f_8 | 4 | 6 | 5 | Yes | Yes | Yes |
| f_9 | 4 | 6 | 6 | No | No | No |
| f_{10} | 5 | 4 | 4 | No | No | No |
| f_{11} | 5 | 4 | 5 | No | No | No |
| f_{12} | 5 | 4 | 6 | Yes | Yes | Yes |
| f_{13} | 5 | 5 | 4 | No | No | No |
| f_{14} | 5 | 5 | 5 | No | No | No |
| f_{15} | 5 | 5 | 6 | No | No | No |
| f_{16} | 5 | 6 | 4 | Yes | Yes | Yes |
| f_{17} | 5 | 6 | 5 | No | No | No |
| f_{18} | 5 | 6 | 6 | No | No | No |
| f_{19} | 6 | 4 | 4 | No | No | No |
| f_{20} | 6 | 4 | 5 | Yes | Yes | Yes |
| f_{21} | 6 | 4 | 6 | No | No | No |
| f_{22} | 6 | 5 | 4 | Yes | Yes | Yes |
| f_{23} | 6 | 5 | 5 | No | No | No |
| f_{24} | 6 | 5 | 6 | No | No | No |
| f_{25} | 6 | 6 | 4 | No | No | No |
| f_{26} | 6 | 6 | 5 | No | No | No |
| f_{27} | 6 | 6 | 6 | No | No | No |

単射、全射、全単射は一致する ($f(1), f(2), f(3)$ が 4, 5, 6 の順列になっているもの)。 $f_6, f_8, f_{12}, f_{16}, f_{20}, f_{22}$ の $3! = 6$ 個。

(2) 次の $f_1 \sim f_8$ の $2^3 = 8$ 個の写像がある。

| | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|-------|--------|--------|--------|----|-----|-----|
| f_1 | 4 | 4 | 4 | No | No | No |
| f_2 | 4 | 4 | 5 | No | Yes | No |
| f_3 | 4 | 5 | 4 | No | Yes | No |
| f_4 | 4 | 5 | 5 | No | Yes | No |
| f_5 | 5 | 4 | 4 | No | Yes | No |
| f_6 | 5 | 4 | 5 | No | Yes | No |
| f_7 | 5 | 5 | 4 | No | Yes | No |
| f_8 | 5 | 5 | 5 | No | No | No |

単射、全単射は存在しない。全射は $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ の 6 個。

(3) 次の $f_1 \sim f_9$ の $3^2 = 8$ 個の写像がある。

| | $f(1)$ | $f(2)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|-------|--------|--------|-----|----|-----|
| f_1 | 3 | 3 | No | No | No |
| f_2 | 3 | 4 | Yes | No | No |
| f_3 | 3 | 5 | Yes | No | No |
| f_4 | 4 | 3 | Yes | No | No |
| f_5 | 4 | 4 | No | No | No |
| f_6 | 4 | 5 | Yes | No | No |
| f_7 | 5 | 3 | Yes | No | No |
| f_8 | 5 | 4 | Yes | No | No |
| f_9 | 5 | 5 | No | No | No |

全射、全単射は存在しない。単射は $f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8$ の6個。

解答 10. (準備中)

解答 11. (準備中)

B 逆写像 (古い説明)

(2016年度までは、ここに書いたように説明していたが、2017年度から切り替えた。参考までに残しておく。これはこれで、推敲すれば使える説明だと思う。)

$f: X \rightarrow Y$ を全単射と仮定する。

f が全射であることから、 $\forall y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

そのような x は、 f が単射であることから、(1つの y に対して) 1つしかない。実際 $y = f(x) = f(x')$ ならば、 f が単射であることから $x = x'$ 。

「一意に存在する」 このようなとき、「 $\forall y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が一意に存在する」と言う。要するに「一意に存在する」とは「1個だけ存在する」、「条件を満たすものの個数が1である」ということである。

一意に存在することを $\exists!$ で表すことがある⁸。

記号 $\exists!$ の約束

「 $P(x)$ を満たす x が一意に存在する」とは

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y = x)).$$

これを $(\exists!x) P(x)$ と表す。

この記号を用いると、 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき

$$(*) \quad (\forall y \in Y)(\exists!x \in X) \quad f(x) = y.$$

逆に $(*)$ が成り立つならば、 f が全単射であることが導かれる。

⁸ $\exists!$ の代わりに $\exists 1$ と書く人もいるが、まぎわらしい場合があるので、ここでは採用しない。

問 13. (*) が成り立つならば f が全単射であることを示せ。

ゆえに $y \in Y$ に対して

$$(3) \quad g(y) := "f(x) = y \text{ を満たす } x" \quad (f \text{ による像が } y \text{ であるような } x)$$

とすることで、写像 $g: Y \rightarrow X$ が定められる。この g を f の**逆写像** (the inverse mapping of f) と呼び、記号 f^{-1} で表す。 f^{-1} は “f inverse” と読む。

すなわち、全単射 $f: X \rightarrow Y$ に対して、

$$(4) \quad f^{-1}(y) := "f(x) = y \text{ を満たす } x \in X" \quad (y \in Y)$$

で定まる $f^{-1}: Y \rightarrow X$ を f の逆写像と呼ぶ。

次は、(上でそのように定義したのだから) 明らかであるが、強調しておく。

(♡) 逆写像の定義域と値域は、それぞれ元の写像の値域と定義域である：

$$f^{-1} \text{ の定義域} = f \text{ の値域}, \quad f^{-1} \text{ の値域} = f \text{ の定義域.}$$

f の逆写像が存在するとき、

$$(5) \quad (\forall x \in X)(\forall y \in Y) \quad (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$$

である。これは逆写像 f^{-1} の定義のようなもので、単純なことであるけれど、納得できるまで考えること。(f が全単射である場合に、与えられた y に対して、 $y = f(x)$ が成り立つような x のことを $f^{-1}(y)$ と書くのだった。)

注意 B.1 f の逆写像が存在するかどうか分からないときに、ある $x \in X, y \in Y$ に対して $y = f(x)$ が成り立っていても、 $x = f^{-1}(y)$ と書くことは正しくない。例えば $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で定めるとき、 $f(2) = 4$ であるが、 $f^{-1}(4) = 2$ と書いてはいけぬ (逆写像 f^{-1} が存在しないのだから)。 ■

(5) から

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in Y)$$

が成り立つ⁹。合成写像の言葉を使って書き換えると

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in X), \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in Y).$$

ゆえに (明らかな $f^{-1} \circ f: X \rightarrow X, f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y$ と合わせて)

$$(6) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

一応、まとめておく。

命題 B.2 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき、

$$(7) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

ある意味でこの逆が成り立つ。次の命題は、 g が f の逆写像であることを証明する必要がある場合に、役立つことが多い。

⁹念のため: $\forall x \in X$ に対して、 $y := f(x)$ とおくと、 $x = f^{-1}(y)$ が成り立つので、 $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ 。同様に $\forall y \in Y$ に対して、 $x := f^{-1}(y)$ とおくと、 $y = f(x)$ が成り立つので、 $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ 。

命題 B.3 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ が

$$(\#) \quad g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

を満たすならば (注: f が全単射であることは仮定していない)、 f は全単射で、 $g = f^{-1}$ である。

(実は仮定の条件は f と g について対称なので、 g も全単射で $f = g^{-1}$ も成り立つ。)

証明 最初に恒等写像は全単射であることを注意しておく。 $g \circ f = \text{id}_X$ が単射であることから、 f は単射であり (定理 4.28 (4))、 $f \circ g = \text{id}_Y$ が全射であることから、 f は全射である (命題 4.28 (5))。ゆえに f は全単射であり、 f^{-1} が存在する。任意の y に対して、 $x = f^{-1}(y)$ とおくと、 $y = f(x)$ であるが、 $g(y) = g(f(x)) = \text{id}_X(x) = x$ 。ゆえに $g(y) = f^{-1}(y)$ 。ゆえに $g = f^{-1}$ である。■

この証明の後半は、次のようにも出来る。 $g \circ f = \text{id}_X$ より $(g \circ f) \circ f^{-1} = \text{id}_X \circ f^{-1}$ 。これから $g = f^{-1}$ 。

注意 B.4 (逆写像の定義 (テキストによる違い)) $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、この条件 (#) を満たす写像 g のことを f の逆写像と定義するテキストも多い (そこで「逆写像の定義を書け」という問に、そういうように答えても良いことにする)。そこだけ見るとすっきりした感じがするかもしれないが、全単射ならば逆写像が存在するという議論をサボることは出来ない。近道が出来るわけではない。■

例 B.5 (あみだくじ) n を自然数として、 $X := \{1, 2, \dots, n\}$ とおく。 n 本のあみだくじを 1 つ作ると、写像 $f: X \rightarrow X$ が定まるが、 f は全単射である。— 逆向きなあみだくじの定める写像を $g: X \rightarrow X$ とすると、 $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_X$ が成り立つので、命題 B.3 により、 f は全単射かつ $g = f^{-1}$ 。■

条件 (#) は、 f と g について対称であることに注意すると、 g は全単射で、 $g^{-1} = f$ であることが分かる。ゆえに、次が得られる。

系 B.6 任意の全単射 f に対して、 f の逆写像 f^{-1} は全単射で、 f^{-1} の逆写像は f である。

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

例 B.7 $f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f_4(x) = x^2$ は全単射であるから、逆写像 $f_4^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する。実は $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$ である。■

問 14. 高校数学の関数 $f(x) = e^x$ から全単射な写像 $f: X \rightarrow Y$ を作れ (X, Y を適切に (X をなるべく大きく、 f が全単射となるように) 定義し、 f が全単射であることを確認せよ)。逆写像 f^{-1} の定義域と「レンジ」は何か。 $f^{-1}(y)$ を普通どのように書くか。

もし逆三角関数 \sin^{-1} を学んでいたら、それはどういう写像の逆写像であるか説明せよ。

定理 B.8 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が共に全単射であるならば、 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も全単射で、

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

証明 $g \circ f: X \rightarrow Z, f^{-1} \circ g^{-1}: Z \rightarrow X$ であるから、合成可能である。

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = ((g \circ f) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = (g \circ \text{id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z,$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f = (f^{-1} \circ \text{id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X.$$

ゆえに $f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \blacksquare$$

例 B.9 (線形代数) A, B が正則な n 次行列であるとき、 $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. ■

C $f: X \rightarrow Y$ の Y の呼び名

余談 C.1 (Y の呼名) 中途半端に読むと混乱しかねないので、特に興味がなければ読まないことを勧める。

- そもそも名前を書いてない本も多い。
- 英語では、 Y のことを “the codomain of f ”, “the target (set) of f ”, “the range of f ” などと呼ぶのが普通? (あまり自信がない。)
- 日本語で、名前を書いてある本では、「終域」、「終集合」、「値域」、「余域」、「行き先」など色々な名前を使っている。終域を使っているのは、井関 [4], 弥永 [5]。多分「始域」と組になる語。「終集合」は「始集合」と組になる語で、グラフで使われる(?)。「値域」については以下で述べるが個人的には使いたくない。「余域」は以下で述べる codomain の訳語かもしれない。これが日本語のテキストで普及するならば、これを採用するのが良いと思うが、まだそういう感じではないように感じる。「行き先」は、わかりやすく良いような気もするが (target の訳語なのかな?) 使っている本は調べた限りで1冊だけであった。そもそも「域」や「集合」のような言葉がないと「要素 x の行き先 $f(x)$ 」と混同しかねないかもしれない。なかなか決定打が出ない。
- 「 f の値域」 (“the range of f ” の訳?) というのも確かにあるが¹⁰、多数派ではないと思う。岩波数学辞典第4版では、 $\{y \mid \exists x(x \in X, y = f(x))\}$ (つまり上の記号で $f(X)$ のこと) を f の値域と呼び、 Y のことを「 f の値域と呼ぶこともあるので注意が必要である」と書いてある。

言葉遣いに関しては権威に従うのが良い、というわけで次のようにしておく。

「値域」という言葉は $f(X)$ を表すために使われることが多いので、 Y を表すための言葉として使うのは避ける

- この講義の教科書 (中島 [1]) では、 Y のことを f の「レンジ」と呼んでいる。なかなかユニークである。おそらく著者の専門分野では “range” と呼ぶのが普通であり、出来ればその訳語である「値域」を採用したかったが、それは上にも書いたように岩波数学辞典でも二番手扱いにされているので、それを避けて “range” の読み「レンジ」を採用したと推察する。

¹⁰この辺の言葉遣いは、数学の中でも分野によって違う。筆者が普段読むテキスト、論文に出て来る「値域」、「range」はすべて $f(X)$ の意味であるので、 Y のことを「値域」と読むのは少なからぬ抵抗を感じる。

| 立場 | Y の呼名 | $f(X)$ の呼名 |
|-----------|------------------------------------|-------------------------|
| 高校数学 (関数) | そんなの考えない | 関数 $f(x)$ の値域 |
| 岩波数学辞典 | 名前を与えてない | f の値域, f による X の像 |
| 教科書 | レンジと呼ぶ | f による X の像 |
| この講義 | 定着した呼び名はないと認めた上で、 f の終域と呼ぶことにする。 | f の値域, f による X の像 |

表 1: $f: X \rightarrow Y$ の Y を何と呼ぶか、まとめ

参考文献

- [1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).
- [2] かわだゆきよし 河田敬義, ゆきお 三村雄征：現代数学概説 II, 岩波書店 (1965), 古いテキストであるが、位相空間論で大事なことが証明付きで程よく網羅されているので、辞書として使うのに好適である。
- [3] ブルバキ：数学原論 集合論 要約, 東京図書 (1968), 前原昭二 訳.
- [4] いせききよし 井関清志：集合と論理, 新曜社 (1979).
- [5] 彌永昌吉：数の体系 上, 岩波書店 (1972).

索引

- bijection, 9
- bijective, 9
- composite mapping, 8
- composition (of mapping), 8
- identity mapping, 6
- inclusion map, 7
- injection, 9
- injective, 9
- one to one, 9
- one-to-one correspondence, 9
- onto, 9
- onto mapping, 9
- surjection, 9
- surjective, 9
- 値, 3
- 1 次変換, 6
- 1 対 1 (写像が), 9
- 1 対 1 対応, 9
- 上への写像, 9
- 逆写像, 14
- 狭義単調減少, 10
- 狭義単調増加, 10
- 合成 (写像の), 8
- 合成写像, 8
- 恒等写像, 6
- 射影, 6
- 全射, 9
- 全単射, 9
- 像 (写像による), 3
- 双射, 9
- 単射, 9
- 定義域, 3
- 定義関数, 7
- 定数写像, 7
- 定値写像, 7
- Dirichlet の関数, 6
- 特性関数, 7
- 包含写像, 7