

# Part II. 集合

桂田 祐史

2013年5月2日, 2014年7月6日, 2022年8月24日

論理の説明に続いて集合の説明に移る (集合は全部で3回くらい)。授業の参考書としては、中内 [?] を推奨する。

授業をするときの自分のための注意：(1) なるべく簡単な例をその場でたくさん作ってあげること。(2) 初回は記号の説明ばかり続くので、だれやすい。円滑に演習 (宿題) につなげられるよう、注意深い授業計画が必要である。

(2022年8月、久しぶりに授業内容からのフィードバック作業をしている。ある程度まで作業を進めたが、現在少し粗くなっているかもしれない。来年度の授業開始前に推敲するつもり。)

## 目次

### 3 集合

#### 3.1 はじめに

数学において、**集合という言葉は実は割と新しいものである**。Cantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845–1918) がパイオニアである<sup>1</sup>。集合論も (論理と同様に) 厳密に取り扱うのは実はかなり難しいが、ここでは素朴に数学の言語としての集合論 (「**素朴な集合論**」 (naive set theory)) の説明をする。

素朴でない集合論を調べるキーワードを紹介しておくと、「**公理的集合論**」, 「**ツェルメロ・フレンケルの公理系**」 (Zermelo-Frenkel set theory) がある。そのための参考書として、(現在比較的入手しやすい) 齋藤 [?] をあげておく。

#### 3.2 集合の定義, 要素

**集合** (set) とは、範囲が明確に定まった、ものの集まりである。ものが1個だけでも集合と言う。さらには、ものが0個の集合 (後述する空集合) も考える。

集合を  $A, B, \dots$  などの文字で表す。

集合  $A$  に属するものを、 $A$  の**要素**あるいは**元**<sup>げん</sup>と呼ぶ。英語では element, あるいは member と呼ばれる。

---

<sup>1</sup>Cantor は、1874年に有名な「超越数が代数的な数よりもはるかに多く存在すること」の証明を与えた。1878年の論文で、二つの集合の“大きさ”の比較を1対1対応で行うことを提唱した。

**余談 3.1** 集合を表すため、どういう文字を使っても良いはずだが、集合は大文字で、要素は小文字で表すことが多い。集合の集合などが出て来るので、首尾一貫できるわけではないのだが。■

$a$  が集合  $A$  の要素である ( $a$  is an element of  $A$ ) ことを、記号  $\in$  を用いて

$$a \in A \quad (\text{あるいは } A \ni a)$$

と表し、

「 $a$  は  $A$  に**属する**」, “ $a$  belongs to  $A$ ”, “ $a$  is in  $A$ ”, “ $a$  lies in  $A$ ”

と言う。あるいは

「 $A$  は  $a$  を**含む**」, 「 $a$  は  $A$  に**含まれる**」, “ $A$  includes  $a$ ”, “ $A$  contains  $a$ ”

とも言う。

**注意 3.2 (属する vs. 含まれる)** 「含む」(「含まれる」)という表現は、集合が集合を含む(集合が集合に含まれる)場合にも使われる。「両者を混同するのは良くない」として、 $a \in A$  については、「 $A$  は  $a$  を含む」、「 $a$  は  $A$  に含まれる」という表現を禁止して、「 $a$  は  $A$  に属する」という表現しか使わないようにしよう、という意見を持っている人がいるが、「 $A$  は  $a$  を含む」、「 $a$  は  $A$  に含まれる」という表現は、実際に良く使われているので(英語の場合、上で紹介したように実にさまざまな表現が使われる)、早めに慣れることを勧めたい。そのため、この授業では特に使用を禁止しない。■

$a \in A$  の否定(「 $a$  が  $A$  の要素ではない」, 「 $a$  は  $A$  に属さない」, 論理の記号を用いると  $\neg(a \in A)$  と書ける)は

$$a \notin A \quad (\text{あるいは } A \not\ni a)$$

と表す。

**例 3.3 (再掲  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ )** 以下の記号は良く使われるので、覚えるべきである。

$\mathbb{N}$  を自然数全体の集合(すべての自然数の集合)とする。(自然数を英語で natural numbers と呼ぶが、その頭文字  $n$  に由来する。)

$\mathbb{Z}$  を整数全体の集合とする。(ドイツ語で数を Zahl (複数形は Zahlen) と呼ぶが、その頭文字  $Z$  に由来する。)

$\mathbb{Q}$  を有理数全体の集合とする。(この記号は商 (quotient) の頭文字の  $q$  に由来しているらしい。有理数、無理数は英語でそれぞれ rational numbers, irrational numbers と呼ばれる。これは比 (ratio) に由来している。)

$\mathbb{R}$  を実数全体の集合とする。(実数を英語で real numbers と呼ぶが、その頭文字  $r$  に由来する。)

$\mathbb{C}$  を複素数全体の集合とする。(複素数を英語で complex numbers と呼ぶが、その頭文字  $c$  に由来する。なお、虚数は imaginary numbers と呼ばれる。)

(以上で、英語由来と書いたところも、本当はフランス語由来であるという人もいる( $\mathbb{C}$  など — nombre complexe)。この講義では、言葉の由来や歴史について正確に説明する努力はあまりしない。覚えるための記憶術くらいに受け取って下さい。)

無理数全体の集合を表す標準的な記号はないようである。後で説明する差集合の記号  $\setminus$  を用いて、 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  とすると良いだろう。■

**例 3.4**  $1 \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \notin \mathbb{N}$ ,  $-1 \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ ,  $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ ,  $\pi \notin \mathbb{Q}$ ,  $\pi \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \notin \mathbb{R}$ ,  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$ . (ただし  $i$  は虚数単位とする。) ■

どんな  $a$  に対しても、 $a \in A$  か  $a \notin A$  か、はっきり定まっているのが大前提である。

良く紹介される例であるが、「大きい数の集まり」というのは、「大きい」の基準がはっきりしないので集合とは認められない。

**注意 3.5** 「範囲が定まっている」というのは、個々のものに対して、それが考えている集合に属するか属さないか「すぐに分かる」、「すでに知っている」というのとは異なる。例えば**オイラー定数**と呼ばれる実数  $\gamma$  は、

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

で定義できる (この極限が存在することは証明できる)。しかし、 $\gamma$  が有理数である ( $\gamma \in \mathbb{Q}$ ) か、無理数である ( $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  つまり  $\gamma \notin \mathbb{Q}$ ) か、現在 (2016 年 4 月) まで分かっていない。(Mathematica では、EulerGamma という名前がついていて、簡単に近似値が調べられる。 $\gamma = 0.5772156649 \dots$ ) しかし、 $\mathbb{Q}$  や無理数全体の集合の定義が曖昧というわけではないので、 $\gamma \in \mathbb{Q}$  であるかそうでないか定まっている、と考えられている。■

**注意 3.6** 教科書 [?] でも注意されているように、文中に現れる “ $x \in A$ ” を「 $A$  に属する  $x$ 」 ( $x$  which belongs to  $A$  — 要するに  $\in A$  を修飾節として扱う) と読むのが適当な場合がしばしばある。例えば

「任意の  $x \in A$  に対して、 $x \in B$  が成り立つ」

は

「 $A$  に属する任意の  $x$  に対して、 $x$  は  $B$  に属する」

あるいは

「 $A$  の任意の要素  $x$  に対して、 $x$  は  $B$  に属する」

のように読むわけである<sup>2</sup>。筆者自身が大学 1 年生の頃に、断りなしにそういう書き方を使われて面食らった覚えがある。

以下でよく出て来るもの:  $x \in \mathbb{R}$  を「 $\mathbb{R}$  の要素  $x$ 」、「 $\mathbb{R}$  の要素  $x$ 」, 「実数  $x$ 」と読む。 $x > 0$  を「正の数  $x$ 」とよぶ。■

### 3.3 集合の相等

集合が等しい、ということ定義する。「等しい」というのは簡単で明らかに思うかもしれないが、例えば数についての等式も、「表現が同じ」という意味ではなく、「値が等しい」という意味であることは注意した方が良いでしょう。  $1+1=2$  という等式をじっと見てみよう。  $1+1$  と  $2$  は異なる式であるが、それらが表す数は同じ、ということである。

<sup>2</sup>語順が変わった読み方をする必要があるのである。英語ならば関係代名詞を 1 つ挿入するだけで良いのだが、日本語に翻訳すると語順の入れ替わりが起きてしまう。この辺は日本語で数学的議論をする際に負うハンディキャップかもしれない。

**定義 3.7 (集合の相等)** 二つの集合  $A$  と  $B$  に対して、命題

$$(\#) \quad \forall x ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

(日本語で書くと「任意の  $x$  に対して、 $(x \in A$  ならば  $x \in B)$  かつ  $(x \in B$  ならば  $x \in A)$ 」) が成り立つとき、 $A$  と  $B$  は**等しい**と定義し、 $A = B$  と表す。

( $\#$ ) は記号  $\Leftrightarrow$  を使うと、より簡潔に

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

とも書ける。

$A = B$  の否定 ( $A$  と  $B$  は**等しくない**) は、 $A \neq B$  で表す。

(復習:  $p \Leftrightarrow q$  とは、 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  のことである。)

テキスト [?] では、 $A$  と  $B$  が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つことをいう、と書いてあるが、“ $\forall x$ ” が省略されていると考えるべきである。

**余談 3.8** (<sup>def.</sup> という記号の約束) 上に書いたことを

$$A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

のように表すこともある。ここで <sup>def.</sup> という記号には、左の式が成り立つことは、右の式が成り立つことの必要十分条件である ( $\dots \Leftrightarrow \dots$  が成り立つ) ということと、それで左の式の意味を定義する (define) という2つの意味が込められている。■

数の場合の等号と同じようなことが成り立つ。

**命題 3.9 (集合の相等関係は同値律を満たす)** 集合について、次が成り立つ。

(1)  $A = A$

(2)  $A = B \Rightarrow B = A$

(3)  $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

**証明** 任意の命題  $p$  に対して、 $p \Leftrightarrow p$  であるから、任意の  $x$  に対して  $x \in A \Leftrightarrow x \in A$  であるので、 $A = A$ 。

2つの任意の命題  $p, q$  に対して、 $p \Leftrightarrow q$  ならば  $q \Leftrightarrow p$  であるから、任意の  $x$  に対して、 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$  ならば、 $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ 。ゆえに  $A = B$  ならば  $B = A$ 。

3つの任意の命題  $p, q, r$  に対して、 $p \Leftrightarrow q$  かつ  $q \Leftrightarrow r$  ならば  $p \Leftrightarrow r$  であるから、任意の  $x$  に対して、 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$  かつ  $x \in B \Leftrightarrow x \in C$  ならば、 $x \in A \Leftrightarrow x \in C$ 。ゆえに  $A = B$  かつ  $B = C$  ならば、 $A = C$ 。■

### 3.4 集合の表し方 (集合の定義の仕方)

式を用いて集合を表すやり方には、二通りある。

### 3.4.1 要素をすべて書き並べる方法 (外延的定義)

集合の要素を書き並べて (複数あるときは、 $,$  で区切って)、中括弧 (braces)  $\{ \}$  で囲んで集合を表すやり方がある。これを集合の**外延的定義**と呼ぶ<sup>3</sup>。

例えば  $A$  が、 $1, 2, 3$  をすべての要素とする集合であるとき、

$$A = \{1, 2, 3\}$$

と表す。

要素の並べ方で、順番は不問で、重複して記すことも認める。例えば

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この書き方は、要素が無限にたくさんある場合に (書き切れなくて) 少し困ることになる。例えば  $\mathbb{N}$  が自然数全体の集合であることを

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

と書くことが多いが、“ $\dots$ ” は曖昧と批判されても仕方がない。

**例 3.10**  $A = \{1, 2, 3\}$  とするとき、 $1 \in A$ . しかし  $4 \notin A$ . ■

(余談的注意。授業ではカットすることが多い。) 日常語では、「集まり」は複数 (2個以上) のものに対してだけ使う言葉かもしれないが、集合は要素が1個だけの場合も考える。例えば

$$A = \{7\}.$$

このように要素が1個の集合は、**単元集合** (singleton) と呼ばれる<sup>4</sup>。

一般に、 $a$  と  $\{a\}$  は異なるものである。

**注意 3.11 (中括弧  $\{ \}$  使用上の注意)** 何かある数学的な対象  $a$  と、 $a$  をただ一つの要素とする集合  $\{a\}$ , その集合  $\{a\}$  をただひとつの要素とする集合  $\{\{a\}\}$ ,  $\dots$  は互いに異なることに注意しよう。

数についての式の中で、例えば、 $\{(1+2) \times 3 + 4\} \times 5 + 6 \times 7 + 8$  のような、演算子の結合の優先順位を指定するために、 $( ), \{ \}, [ ]$  などの括弧を使うことがあるのは、小学校以来の常識であるが、そういうときの  $\{ \}$  と、集合を表す中括弧  $\{ \}$  を混同しないように注意が必要である。

集合を用いる場合は、演算子の結合の優先順位を指示するために、中括弧  $\{ \}$  を使わないことにする方が良くもしいない (そうしないと  $\{(1+2) \times 3 + 4\}$  のような式の意味が曖昧になる。13 なのか  $\{13\}$  なのか。)。■

**注意 3.12** 日常語で書いてあるだけでは不十分かもしれない (証明を求められたとき、何を根拠にして良いか迷いかねないので)。

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

とするとき

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n)$$

が成り立つ。■

<sup>3</sup>テキストにも書いてあるように、「外延的定義」なんて言葉を覚える必要はまったくない。次項の「内包的定義」も同様である。今日だけ覚えておけば良い。

<sup>4</sup>この言葉も覚える必要はない。

### 3.4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

その集合に属するための必要十分条件を記して集合を定義するやり方がある。これを集合の内包的定義という。

( $x$  についての) 条件  $P(x)$  を満たす  $x$  全体の集合を  $\{x \mid P(x)\}$  で表す。

例えば、 $A$  が 1 以上 3 以下の自然数全体の集合であることを

$$A = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の自然数}\}$$

と表す。また  $B$  が偶数全体の集合であることを

$$B = \{x \mid x \text{ は偶数}\}$$

と表す。

$\{x \mid P(x)\}$  の代わりに、 $\{x; P(x)\}$  や  $\{x : P(x)\}$  で表すこともある。(この講義では、教科書の記号に合わせて  $\mid$  を使うことにした。)

上では  $x$  という文字を用いたが、代わりにどのような文字を使っても同じである。例えば

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\}.$$

内包的定義の書き方は無数にある。例えば

$$\{1, 2, 3\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 0.4 < x < 3.2\} = \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}.$$

**余談的注意** 集合の内包的定義にしても、外延的定義にしても、中括弧 (braces)  $\{ \}$  を使っていることに注意しよう。 $\{ \}$  は集合の定義以外にも使われるが、集合を定義するには必ず  $\{ \}$  を使う。

**雑談ネタ (括弧を表す英語)**  $( )$  は parenthesis,  $\{ \}$  は braces,  $[ ]$  は brackets.

**色々な書き方** 条件が  $P(x) \wedge Q(x)$  のように複数の条件を  $\wedge$  (and, かつ) で結んだものである場合、 $\wedge$  をカンマ , で済ませることがある。

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} = \{x \mid P(x), Q(x)\}.$$

具体的な例をあげると

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} &= \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の自然数}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 3\}. \end{aligned}$$

この講義ではなるべくカンマを避けて、 $\wedge$  あるいは「かつ」を使うことにする。

集合の内包的表現には、よく使われる“変種”がいくつかある。

**変種 1**  $P(x)$  を  $x$  に関する条件、 $f(x)$  を  $x$  についてのある式として、

$$\{y \mid (\exists x : P(x)) y = f(x)\} = \{y \mid \text{ある } x \text{ が存在して } (P(x) \wedge y = f(x))\}$$

を単に

$$\{f(x) \mid P(x)\}$$

と書くことが非常にしばしばある。

**例 3.13 (高校数学の教科書にも現れる例)** 平方数 (ある自然数の平方となっているような数) の全体

$$\{m \mid \text{ある自然数 } n \text{ が存在して } m = n^2\}$$

を  $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$  と書いたり、偶数全体の集合

$$\{x \mid (\exists n \in \mathbb{Z}) x = 2n\}$$

を  $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  と書いたりする。■

**変種 2**  $\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$  のうち  $P(x)$  が、 $x \in A$  ( $A$  はある集合) の形である場合がよくある。そのとき  $\{x \in A \mid Q(x)\}$  と書くことが多い。

$$\{x \mid x \in A \wedge Q(x)\} = \{x \in A \mid Q(x)\}.$$

**例 3.14 (テキスト [?] に載っている例)**  $x^2 - x - 1 < 0$  を満たす実数全体の集合。

$$\begin{aligned} \{x \mid x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\} &= \{x \mid x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \mid x \text{ は実数, } x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 < 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \\ &= \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

ただし、最後に开区間の記号  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  を用いた。■

**余談 3.15 (区間を表す記号)**  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  とするとき

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

右側が  $\infty$ 、左側が  $(-\infty$  となっている場合にも用いる。実数  $x$  について、 $x < \infty$  と  $-\infty < x$  はつねに成り立つので、その条件は書かなくても同じこと (例えば  $a < x < \infty$  は  $a < x$  と書

けば良い)。

$$\begin{aligned}[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \quad (\text{無条件なので実数全体}).\end{aligned}$$

$(a, b)$  は点の座標の記号とかぶる。フランスでは  $($  の代わりに  $]$ ,  $)$  の代わりに  $[$  を使う。例えば  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ . こちらの方が合理的かもしれない。 ■

### 3.5 部分集合, 含まれる (包含関係)

**定義 3.16 (部分集合, 含む, 含まれる)** 集合  $A, B$  について

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

が成り立つとき、「 $A$  は  $B$  の**部分集合** (subset) である」, 「 $A$  は  $B$  に**含まれる**」, 「 $B$  は  $A$  を**含む**」といい、

$$A \subset B \quad (\text{あるいは } B \supset A)$$

と表す。 $A \subset B$  の否定 (「 $A$  は  $B$  に含まれない」,  $\neg(A \subset B)$ ) は、 $A \not\subset B$  あるいは  $B \not\supset A$  と表す。

(おまけ)  $A \subset B$  かつ  $A \neq B$  であるとき、 $A$  は  $B$  の**真部分集合** (proper subset) であるといい、

$$A \subsetneq B \quad (\text{あるいは } B \supsetneq A)$$

と表す。

$A \subset B$  は、集合についての1つの2項関係であるが、包含関係と呼ばれる。

#### 例 3.17

$$\{1\} \subset \{1, 2\}, \quad \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}.$$

このようなとき、まとめて

$$\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$$

と書くことがある (数の場合の  $1 < 2 < 3 < 4$  などと同様)。

$$\{1\} \not\subset \{2\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

$$\{x \mid x \text{ は正三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は二等辺三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は三角形}\}. \quad \blacksquare$$

**注意 3.18** ( $\subset$  は等しい場合を含む!) すぐ後で証明するように、

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

$A = B$  の場合も  $A \subset B$  と書くことがありうるわけである (それは真な命題である)。例えば

$$\{1\} \subset \{1\}, \quad \{1, 2\} \subset \{1, 2\}, \quad \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\},$$

はいずれも真である。

数の大小では、 $a < b$  と  $b < a$  は決して両立しない: つまり任意の  $a, b$  に対して、 $(a < b) \wedge (b < a)$  は偽である。一方

$$a = b \Leftrightarrow (a \leq b) \wedge (b \leq a).$$

この点で、 $\subset$  は、( $<$ ではなくて) 実数の大小を表す  $\leq$  と似ている。

$a = b$  の場合も  $a \leq b$  と書くことがありうる (それは真な命題である)。例えば  $1 \leq 2, 1 \leq 1$  のどちらも真である。

このせいであろうか、 $B \subset A, B \subsetneq A$  をそれぞれ、 $B \subseteq A$  (あるいは  $B \subseteq A$ ),  $B \subset A$  と書く流儀がある。その流儀を使うと、

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

これは最近はあまり見掛けなくなった流儀であると感じているが (真似しない方が良いと思う)、遭遇する可能性が 0 とは言い切れない。 ■

**命題 3.19 (集合の包含関係の性質 (包含関係は半順序関係))**  $A, B, C$  は任意の集合とするとき、以下 (1), (2), (3) が成り立つ。

(1)  $A \subset A$ .

(2)  $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$ .

(3)  $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ .

つまり、いわゆる半順序関係の公理を満たす。

実は (2) の逆も成り立つので、 $\Rightarrow$  を  $\Leftrightarrow$  に置き換えたものも成り立つ:

(4)  $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ .

## 証明

(1) 任意の命題  $p$  に対して、 $p \Rightarrow p$  は常に真であるから、任意の  $x$  に対して、 $x \in A \Rightarrow x \in A$ . ゆえに  $A \subset A$ .

(2) 任意の  $x$  に対して、

- $x \in A$  ならば仮定  $A \subset B$  より  $x \in B$ .
- $x \in B$  ならば仮定  $B \subset A$  より  $x \in A$ .

ゆえに

$$\forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

が証明できた。ゆえに  $A = B$ .

(3) 任意の  $x$  に対して、 $x \in A$  ならば、仮定  $A \subset B$  より  $x \in B$ . さらに仮定  $B \subset C$  より  $x \in C$ . ゆえに

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)$$

が証明できた。ゆえに  $A \subset C$ .

(4) (2) は示してあるので、逆を証明すれば良い ( $A = B$  ならば  $A \subset B$ .  $A = B$  ならば  $B \subset A$ . ゆえに  $A = B$  ならば  $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$  が成り立つ。 )。

同時に証明することも出来る<sup>5</sup>。

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)] \wedge [\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A). \blacksquare \end{aligned}$$

**余談 3.20** ( $\subset$  vs.  $\leq$ ) 上の定理を見て、 $\subset$  は、実数の場合の  $\leq$  と似ていると思うかもしれない。実際、次のことが成り立つ。

(i)  $a \leq a$ .

(ii)  $a \leq b$  かつ  $b \leq c$  ならば  $a \leq c$ .

(iii)  $a \leq b$  かつ  $b \leq a$  ならば  $a = b$ .

(1), (2), (3) と (i), (ii), (iii) を見比べてみよう。

これも  $\leq$  も、**半順序関係** というものになっている。

一方、 $\leq$  は、「 $(\forall a, b) a \leq b \vee b \leq a$  (任意の2要素は比較可能)」という性質も持っているが、 $\subset$  は対応する性質を持っていない。つまり  $A \subset B$  も  $B \subset A$  のどちらも成り立たないことがある (例えば  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$  のとき  $A \not\subset B$  かつ  $B \not\subset A$ )。

$\leq$  は**全順序関係**であるが、 $\subset$  は全順序関係ではない。 ■

### 3.6 空集合

一つも「もの」を含まない「集まり」は、日常語としては「集まり」と言わないかもしれないが、数学では、要素を一つも持たない“集合”を考える。そういう集合は一つしかないことに注意する。

**定義 3.21 (空集合)** 要素を一つも持たない集合を**空集合**<sup>くうしゅうごう</sup> (empty set) と呼び、 $\emptyset$  という記号で表す。

$\emptyset$  はギリシャ文字のファイ  $\phi$  と似ているが(黒板に書いたとき区別するのは困難である)、実は別物で、元々は数字の 0 に由来するらしい。

豆知識: テキストによっては、 $\phi$  や  $\varnothing$  という字体を用いる。TeX では、 $\emptyset$  は `\emptyset`,  $\varnothing$  は `\varnothing` と入力する。

$\{\}$  という記号で空集合を表す場合もある(「なるほど」という気はするけれど、この講義では使わない)。

「空である」(empty) という言葉 (品詞としては形容動詞?) も用いる。例えば、「 $A$  が空集合でなければ」ということを「 $A$  が空でなければ」と言うことがある。

**命題 3.22** 任意の集合  $A$  に対して、空集合は  $A$  の部分集合である:

(1)  $\emptyset \subset A$ .

このことを「知っている」人は多いだろうが、証明を考えたことはあるだろうか?

<sup>5</sup> $(\forall x) P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow ((\forall x)P(x)) \wedge ((\forall x)Q(x))$  を用いた。

**証明** 集合  $A, B$  について、

$$A \subset B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

と定義した。任意の  $x$  に対して、 $x \in \emptyset$  は偽であるから、 $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$  は真である。ゆえに  $\emptyset \subset A$ . ■

**問 1.** 次の各命題の真偽を述べよ。

- (a)  $\emptyset \in \emptyset$  (b)  $\emptyset \subset \emptyset$  (c)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  (d)  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

**受験生のいないテストは全員合格** 空集合は任意の集合の部分集合というのを認めている人でも、上の証明は案外受け入れにくく感じるのではないだろうか。

$$A \subset B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) x \in B.$$

と書くことも出来る<sup>6</sup>。つまり  $A$  のすべてのメンバーに「 $B$  のメンバーであるか」というテストを受けさせ、全員合格ならば晴れて「 $A \subset B$ 」であると言えるわけである。

すると (??) を証明するには、

$$(\forall x \in \emptyset) x \in A$$

を示さねばならない。これは (上で別のやり方で示したように) 真なのであるが、感覚的に納得できるだろうか？

空集合はその定義から、要素を1つも持たない、すなわち  $x \in \emptyset$  となる  $x$  は存在しない。テストのたとえ話 (譬え話) を続けると、受験生がいないテストは「全員合格」なのだろうか、そうでないのだろうか、ということである。初めて出くわした人は戸惑うかも知れないが、数学ではこういう場合「全員合格」であると考え (言い換えると、全称記号  $\forall$  はそういう意味である、と約束する)。■

条件  $P(x)$  を満たす  $x$  が1つも存在しないとき、

$$\{x \mid P(x)\} = \emptyset.$$

$P(x)$  が簡単な式でも、それを満たす  $x$  が存在するかどうかはすぐには分からないことがしばしばあるので、決してナンセンスではない。

与えられた集合が空集合であることを証明するには、背理法を用いるのが分かりやすい場合が多いと思われる。

**例 3.23 (空集合であることの証明)**  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall y \in \mathbb{R}) x > y\}$  とおくと、 $A = \emptyset$  であることを背理法を用いて示そう。

$A \neq \emptyset$  と仮定すると、 $A$  に属する  $x$  が存在する。 $y := x + 1$  とおくと、 $y$  は実数で  $x < y$  を満たす。ところが  $A$  の定義から、 $x > y$  が成り立つはずであり、これは矛盾である。ゆえに  $A = \emptyset$ . ■

**例 3.24 (フェルマーの最終予想)** 有名なフェルマーの最終予想 (ワイルズの定理, 1995年) は、 $n \geq 3$  を満たす任意の自然数  $n$  について、方程式  $x^n + y^n = z^n$  の自然数解は存在しない、という主張である。つまり

$$\{(x, y, z, n) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3, x^n + y^n = z^n\} = \emptyset$$

をフェルマーの最終定理は主張しているわけである。■

<sup>6</sup>一般に  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$  を  $(\forall x : P(x))Q(x)$  と書くのであったから、 $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$  は、 $(\forall x : x \in A)x \in B$  とも書ける、ということである。

次節で共通部分を表す記号  $\cap$  を導入するが、 $A$  と  $B$  に共通の要素が存在しない場合は  $A \cap B = \emptyset$  となり、もしも空集合を集合と認めないと、 $A \cap B$  が定義出来ない場合が頻出することになる(かなり煩わしいことになるであろう)。

**余談 3.25** 似たようなことはあちこちで出て来る。以下は「有界」や「開集合」という言葉を知っている人向けの説明。

- 空集合は有界である(めったに必要なにならないが)。
- 空集合は開集合である(これは重要で良く使われる)。

数学で「 $p$  ならば  $q$ 」を証明するときに、条件  $p$  を満たす場合は本当に存在するかどうか、直接は問題にならないことが多いことに注意しよう。

### 3.7 合併(和集合), 共通部分(積集合)

授業では**ヴェン図**(Venn diagram)を描くこと。それと同時に

「ヴェン図を使った議論を証明と認めません<sup>7</sup>。ヒントにはなります。」

と言うのを**忘れずに**。

**定義 3.26 (合併集合、共通部分)**  $A, B$  を集合とする。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

とおき、 $A \cup B$  を  $A$  と  $B$  の**合併**(がっぺい合併集合, the union of two sets  $A$  and  $B$ ) あるいは**和集合**(sum) と呼ぶ。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

とおき、 $A \cap B$  を  $A$  と  $B$  の**共通部分**(**交わり**, the intersection of two sets  $A$  and  $B$ ) あるいは**積集合**と呼ぶ。

しばしば  $\cup$  を「カップ(cup)」、 $\cap$  を「キャップ(cap)」と読む。コーヒーカップ、キャップ(帽子)を思い浮かべると良い。

**例 3.27**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$  とするとき、

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}. \blacksquare$$

**問 2.**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 6, 7\}$ ,  $C = \{3, 4, 5, 6\}$  とするとき、 $(A \cap B) \cap C$ ,  $A \cap (B \cap C)$ ,  $A \cap (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \cup C$  を求めよ。

3つ以上の集合の共通部分(あるいは和集合)については、

$$A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C, \quad A \cap B \cap C \cap D := ((A \cap B) \cap C) \cap D, \dots$$

<sup>7</sup>ヴェン図は、複数の集合の関係を図式化したもので、高校以来お馴染みであろう。高校数学では、集合に関する公式の多くをヴェン図を用いて「理解した」ことと思う。この「数理リテラシー」では、論理をある程度きちんと説明し、それを用いて集合の演算を定義した。この立場では、何か証明をする場合に、その定義に戻って論理を用いるのが自然である。ヴェン図の欠点として、扱う集合の個数が多くなると、ヴェン図を使って一般的な状況を表すのが難しくなる、ということがある(例えば金子[?])。

$$A \cup B \cup C := (A \cup B) \cup C, \quad A \cup B \cup C \cup D := ((A \cup B) \cup C) \cup D, \dots$$

のように、とりあえず左から結合していくことにするが、以下で説明するように結合律が成り立つので、どのような順番で結合しても同じ集合を表す(これは数について、 $a+b+c$  や  $a+b+c+d$  を考えるときと同じである)。例えば4つの集合の場合

$$((A \cap B) \cap C) \cap D = (A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap (B \cap C)) \cap D = A \cap ((B \cap C) \cap D).$$

**命題 3.28** (1) (交換法則)  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ .

(2) (結合法則)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

(3) (分配法則)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**証明** 論理の交換法則、結合法則、分配法則から導かれる。 ■

### 3.8 差集合, 補集合

**定義 3.29** (差集合, 補集合)  $A, B$  を集合とするとき、

$$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (\text{これは } \{x \in A \mid x \notin B\} \text{ とも書ける})$$

を  $A$  から  $B$  を除いた**差集合**(あるいは単に  $A$  と  $B$  の差集合)と呼び、 $A \setminus B$  あるいは  $A - B$  で表す:

$$A \setminus B = A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

しばしば、そのとき考察する対象全体の集合  $X$  を定め、 $X$  の各部分集合  $A$  に対して、 $X \setminus A$  を考える。そういうとき、 $X \setminus A$  を  $X$  における  $A$  の**補集合**(complement)と呼び、 $A^c$  や  $\complement A$  で表す:

$$A^c = \complement A := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

$X$  は**全体集合**(total set), **ユニバース**(universe) などと呼ばれる。

(アクセントが最初の音節にあるのだから、本当は「ユニバース」だろうなあ…)

**注意 3.30** 差集合のことを“difference set”と、うっかり書いてしまった年度もあったけれど、そうすると、違う意味(群論の用語)に取られる可能性が高いらしい。 $A \setminus B$  は、“the (set) difference”, “the relative complement of  $B$  in  $A$ ”, “the relative complement of  $B$  with respect to  $A$ ”, “the set-theoretic difference of  $A$  and  $B$ ” などと呼ぶのが普通のようなのだ。 ■

**例 3.31**  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$  とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  を全体集合と考えるとき、

$$A^c = \{4, 5, 6\}, \quad (A^c)^c = \{4, 5, 6\}^c = \{1, 2, 3\} = A.$$

$(A^c)^c = A$  は一般に成り立つ。 ■

$A$  を全体集合  $X$  の部分集合とすると、任意の  $x \in X$  に対して、

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A.$$

(証明:  $x \in A^c \Leftrightarrow x \in X \setminus A = \{y \mid y \in X \wedge y \notin A\} \Leftrightarrow x \notin A$ )

ゆえに  $A$  と  $B$  が全体集合  $X$  の部分集合であるとき

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B^c\} = A \cap B^c.$$

**注意 3.32**  $A$  の補集合を  $\bar{A}$  と書く流儀もあるが、あまり使われない(その記号を位相空間の部分集合の閉包を表す記号に使いたいの、使わずに残しておきたい?)。高校でそう習ったせいか、 $\bar{A}$  と書く人が結構いるのだけど、この講義では  $A^c$  を使って下さい(TPO で切り替えられる人になりましょう)。■

**余談 3.33 (対称差 (ややマイナー))**  $A$  と  $B$  の対称差  $A\Delta B$  を次式で定める。

$$A\Delta B := \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}.$$

このとき次式が成り立つ。

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A \setminus B$ ,  $A^c$ ,  $A\Delta B$  をヴェン図を書いて理解すること。■

### 3.9 直積集合

**定義 3.34 (順序対と直積集合)**  $a$  と  $b$  が与えられたとき、順番を考慮した組  $(a, b)$  を、 $a$  と  $b$  の **順序対** (an ordered pair) と呼ぶ。順序対の相等については、

$$(a, b) = (a', b') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = a' \wedge b = b'$$

と定義する。

$A$  と  $B$  が集合であるとき、 $A$  の要素と  $B$  の要素の順序対の全体を、 $A$  と  $B$  の **直積集合** (direct product) あるいは **デカルト積** (Cartesian product) と呼び、 $A \times B$  で表す:

$$A \times B = \{c \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B) c = (a, b)\}.$$

この式はしばしば次のように略記される。

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

(中学校の数学で学んだ平面上の点の座標は、**順序対** (ordered pair) の一種である。 $a$  と  $b$  が実数でない場合にも、同じようなことをしよう、というわけである。)

**例 3.35 (順序対 vs 二元からなる集合)** 順序対  $(a, b)$  と 集合  $\{a, b\}$  との違いに注意する必要がある。

$$(x, y) = (1, 2) \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2.$$

$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

一方、集合では

$$\{x, y\} = \{1, 2\} \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 2) \vee (x = 2 \wedge y = 1).$$

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{1, 1\} = \{1\}. \blacksquare$$

**注意 3.36 (开区間と順序対)**  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$  であるとき、 $(a, b)$  で开区間  $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  を表すことがあるわけであるが、字面だけ見ても順序対  $(a, b)$  と区別がつかない。文脈を見て判断するしかない。このことを避けるためか、フランスでは、开区間  $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  を表すために  $]a, b[$  という記号を用いる。さらに

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \blacksquare$$

**例 3.37 (直積集合の例)**  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$  とするとき、

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

同様に、 $x$  と  $y$  がすでに定義されているとき、 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y\}$  とすると

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

この式は  $x = y$  であっても成立する。

$A = \{\text{うなどん, ボンゴレ, カレー}\}, B = \{\text{味噌汁, コーンスープ}\}$  とするとき

$$A \times B = \{(\text{うなどん, 味噌汁}), (\text{うなどん, コーンスープ}), (\text{ボンゴレ, 味噌汁}), (\text{ボンゴレ, コーンスープ}), (\text{カレー, 味噌汁}), (\text{カレー, コーンスープ})\}. \blacksquare$$

3つ以上の集合の直積も同様に定義する。

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

無限個の集合の直積を考えることもある (写像を説明してから述べる)。

$A \times A$  を  $A^2$  と書く。3つ以上の場合も同様である。

**例 3.38**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}. \blacksquare$$

$A, B$  のどちらか一方が空集合ならば、 $A \times B$  は空集合である。

$$A \times \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \times B = \emptyset.$$

**余談 3.39** 直積集合はなぜ「積」と言って、 $\times$  という掛け算マークを用いるのか? おそらく次のことが関係していると思う。 $A$  と  $B$  が有限集合であるとき、

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

が成り立つ。ここで  $|\cdot|$  は集合の要素の個数を表す。

例えば、上の  $A \times B$  の2つの例では、どちらも  $|A| = 3, |B| = 2$  で、 $|A \times B| = 6$ .  $\blacksquare$

余談 3.40 (順序対の集合論的定義) 現代の集合論のテキストでは、順序対は

$$(2) \quad (a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

により定義することが多い (Kuratowski が始めたとか)。こう定義すると確かに

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

が成り立つ。しかし、これは自然数  $0, 1, 2, 3, \dots$  を

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots, \quad n+1 = n \cup \{n\}, \quad \dots$$

と定義する<sup>8</sup>のと同じような、一つの流儀、方便に過ぎない、と考えるべきであろう。実際、順序対は

$$(a, b) := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$

のように定義されたこともあったし、他にも

$$(a, b) := \{\{b\}, \{a, b\}\},$$

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

など、色々な定義が可能である(らしい)。教条主義的に(??)が正しいとは考えない方が良い。

■

### 3.10 ベキ集合 (冪集合)

集合  $A$  に対して、 $A$  のすべての部分集合 ( $\emptyset$  や  $A$  自身を含む) からなる集合 (部分集合の全体の集合) を、 $A$  の**冪集合** (the power set of  $A$ ) と呼び、 $2^A$ ,  $\text{Pow}(A)$ ,  $P(A)$  などの記号で表す。

$$2^A = \text{Pow}(A) = P(A) := \{B \mid B \subset A\} = \{B \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合}\}.$$

「冪」は「幕」(「江戸幕府」に使われる「幕」という文字にかんむり「冫」が乗っている文字である。書くのがやや面倒なので、黒板には「ベキ集合」と書くことにする。(「巾」と書く場合もあるが、正式な文字ではないそうなので、この講義では使わないことにする。)

例 3.41  $A = \emptyset$  のとき、

$$2^A = \{\emptyset\}.$$

$A = \{a\}$  のとき、

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

$A = \{a, b\}$  のとき、

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

$A = \{a, b, c\}$  のとき、

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}.$$

以上は  $a, b, c$  の中に等しいものがある場合も正しい。 ■

<sup>8</sup>実際に自然数をこのように定義することがあります(つねにそう定義するわけではありません)。この定義を採用した場合、 $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \dots$  かつ  $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \dots$  ちょっと異様な感じがするでしょう。普通  $0 \subset 1$  かどうか?と尋ねられたら「ナンセンスな問だ。」と思いますね。それで「No!」と答えたくるけれど、では否定の証明はどうする?と質問されると、どうしたら良いか考え込むでしょう。実はテキストによっては  $0 \subset 1$  は真であると。

**問 3.**  $A = \{a, b\}$  のとき  $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  である。これが  $a = b$  のときも正しいことを確かめよ。

**余談 3.42**  $a$  の  $b$  乗  $a^b$  は、英語で ( $b = 2$  のときは “ $a$  square”,  $b = 3$  のときは “ $a$  cube”, のような特別な読み方もあるけれど、一般に) “ $a$  to the  $b$ -th power” と読まれる。 $y = x^a$  という関数は power function (冪関数) と呼ばれる。「冪」 = “power” と覚えると良い。■

**例 3.43**  $A = \{a\}$  のとき、 $B = 2^A$ ,  $C = 2^B$  を求めよ。

$$B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\},$$

$$C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}.$$

解説:  $B = \{p, q\}$  のとき  $2^B = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$  となることは既に見た。この式に  $p = \emptyset$ ,  $q = \{a\}$  を代入すれば良い。■

一般に相異なる  $n$  個の要素からなる集合  $A$  に対して、 $\text{Pow}(A)$  は  $2^n$  個の要素を持つ。このことは検算に有効である。

無限集合  $A$  に対しても、 $A$  のベキ集合を考える。

### 3.11 集合が等しいこと、含まれることの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を用いて考えた。この講義では、ヴェン図は参考にはなるけれど、それで議論しても証明にはならない、というスタンスを取る。

集合が等しいこと、集合が集合に含まれることを証明することは大事である。以下の定義が基礎になる。

1.  $A = B \stackrel{\text{def.}}{\iff} (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A))$
2.  $A \subset B \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$
3.  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A^c, A \times B, 2^A, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  などの定義

**例 3.44 (繰り返しになるが)** 集合  $A, B, C$  が  $A \subset B, B \subset C$  を満たすとき、 $A \subset C$  が成り立つことを示せ。

(証明)  $A \subset B, B \subset C$  を仮定する。

$x$  を  $A$  の任意の要素とする。 $A \subset B$  であるから  $x \in B$ .  $B \subset C$  であるから  $x \in C$ . ゆえに  $A \subset C$ .

**例 3.45** 集合  $A, B, C, D$  が  $A \subset B, C \subset D$  を満たすとき、 $A \times C \subset B \times D$  が成り立つことを証明せよ。

(証明)  $A \subset B, C \subset D$  を仮定する。 $x$  を  $A \times C$  の任意の要素とすると、ある  $a \in A, c \in C$  が存在して  $x = (a, c)$ .  $A \subset B$  であるから、 $a \in B$ .  $C \subset D$  であるから  $c \in D$ . ゆえに  $x = (a, c) \in B \times D$ . 従って  $A \times C \subset B \times D$ . ■

**例 3.46 (分配律  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  の証明)** 任意の  $x$  に対して

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)\end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . ■

**例 3.47 (ド・モルガン律  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  の証明)** 任意の  $x$  に対して

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\&\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \\&\Leftrightarrow (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\&\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c\end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ . ■

**例 3.48 (空集合であることの証明)** 空集合であることの証明は、知らない戸惑いそうなので、1つ例をあげておく。

$A$  を集合とすると、 $A \cap A^c = \emptyset$  を示せ。

**証明 1** 背理法を用いる。 $A \cap A^c \neq \emptyset$  と仮定すると、ある  $x$  が存在して  $x \in A \cap A^c$ . ゆえに  $x \in A$  かつ  $x \in A^c$ . すなわち  $x \in A$  かつ  $x \notin A$ . これは矛盾である。ゆえに  $A \cap A^c = \emptyset$ . ■

**証明 2** (本質的には同じことであるが)

$$A \cap A^c = \{x \mid x \in A \wedge x \in A^c\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}.$$

任意の  $x$  に対して  $x \in A \wedge x \notin A$  は偽である。言い換えると、条件  $x \in A \wedge x \notin A$  を満たす  $x$  は存在しない。ゆえに  $A \cap A^c = \emptyset$ . ■

### 3.12 $\cup, \cap, ^c$ の満たす法則

次の命題は、島内 [?] を参考にした (すでに説明したものも含まれているが、まとめてみた)。

**命題 3.49** 以下、 $X$  を全体集合、 $A, B, C$  はその部分集合とする。

- (1)  $A \cap A = A, A \cup A = A$  (冪等律, ベキ等律).
- (2)  $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$  (交換律).
- (3)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (結合律).
- (4)  $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cap X = A, A \cup X = X$ .
- (5)  $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X$ .
- (6)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  (分配律).
- (7)  $(A \cup B) \cap A = A, (A \cap B) \cup A = A$  (吸収律).
- (8)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (de Morgan 律).
- (9)  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B. A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ .

**証明**  $\cup, \cap, ^c$  の定義と論理の法則による。

- (1)  $p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p$  による。
- (2)  $p \wedge q \equiv q \wedge p, p \vee q \equiv q \vee p$  による。
- (3)  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r), (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$  による。
- (4)  $p \wedge F \equiv F, p \vee F \equiv p, p \wedge T \equiv p, p \vee T \equiv T$  による。
- (5)  $p \wedge \neg p \equiv F$  (矛盾律),  $p \vee \neg p \equiv T$  (排中律) による。
- (6)  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r), (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  による。
- (7)  $(p \vee q) \wedge p \equiv p, (p \wedge q) \vee p \equiv p$  による。
- (8)  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q), \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$  による。

例えば最初の等式の証明は次のようにする。

任意の  $x$  に対して、

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\&\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \\&\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c\end{aligned}$$

ゆえに  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

- (9) (前半  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$  の証明)

一般に  $A \cap B \subset A$  が成り立つ ( $\because$  任意の  $x$  に対して、 $x \in A \cap B$  とすると、 $x \in A \wedge x \in B$ . 特に  $x \in A$ . ゆえに  $A \cap B \subset A$ ).

ゆえに  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset A \cap B$  であるから、 $A \subset A \cap B \Leftrightarrow A \subset B$  を証明すれば良い。

( $\Rightarrow$ )  $A \subset A \cap B$  と仮定する。一般に  $A \cap B \subset B$  であるから、 $A \subset B$ 。

( $\Leftarrow$ )  $A \subset B$  と仮定する。任意の  $x$  に対して、 $x \in A$  とすると、 $A \subset B$  であるから  $x \in B$ 。  
 $x \in A \wedge x \in B$  が成り立つので  $x \in A \cap B$ 。ゆえに  $A \subset A \cap B$ 。

(後半  $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$  の証明) 前半と同様にして証明することもできるが、前半を利用して

$$\begin{aligned} A \cup B = B &\Leftrightarrow (A \cup B)^c = B^c \\ &\Leftrightarrow (A^c) \cap B^c = B^c \\ &\Leftrightarrow B^c \subset A^c \\ &\Leftrightarrow A \subset B. \end{aligned}$$

であるから、 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ . ■

教科書 [?] の命題 3.28 にあるもので、上の命題 ?? に入っていないもの。

- (1)  $A \setminus A = \emptyset$ .  
 $\because A \setminus A = A \cap A^c = \emptyset$ .
- (2)  $A \setminus \emptyset = A, \emptyset \setminus A = \emptyset$ .  
 $\because A \setminus \emptyset = A \cap \emptyset^c = A \cap X = A, \emptyset \setminus A = \emptyset \cap A^c = \emptyset$ .
- (4)  $A \cap B \subset A, A \subset A \cup B$ .  
 $\because p \wedge q \Rightarrow p$  と  $p \Rightarrow p \vee q$  はつねに真であるから。
- (5)  $A \cap B \subset A \cup B$ .  
 $\because$  (4) と 「 $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ 」 から。

教科書 [?] の命題 3.30 にあるもので、上の命題 ?? に入っていないもの。

- (2)  $A \subset C$  かつ  $B \subset C$  であれば、 $A \cup B \subset C$  である。  
 $\because x \in A \cup B$  とすると、 $x \in A \vee x \in B$ 。前者の場合、 $A \subset C$  から  $x \in C$ 。後者の場合  $B \subset C$  から  $x \in C$ 。いずれにせよ  $x \in C$ 。ゆえに  $A \cup B \subset C$ 。
- (3)  $C \subset A$  かつ  $C \subset B$  であれば、 $C \subset A \cap B$  である。  
 $\because x \in C$  とすると、 $C \subset A$  より  $x \in A$ 。また  $C \subset B$  より  $x \in B$ 。ゆえに  $x \in A \cap B$ 。ゆえに  $C \subset A \cap B$ 。
- (5)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .  
 $\because A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$   
 $A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

次の定理は非常に良く使われる。(それにもかかわらず、集合の説明をしてある本に載っていないことが多い。微積分の授業をしていて、はたと困ってその場で証明を書いたり、ヴェン図を描いてお茶を濁したりしている<sup>9</sup>。)

<sup>9</sup>時間節約のためにそうしているわけですが、ヴェン図は証明にならないと言っているのでも、首尾一貫していないとツッコまれそうです (苦笑)。

**命題 3.50**  $A, B$  が集合  $X$  の部分集合であるとき、次の (1), (2) が成り立つ。 $(A^c, B^c$  は  $X$  を全体集合と考えるときの補集合とする。)

$$(1) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c.$$

$$(2) A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B.$$

### 証明

(1) まず素朴にやってみる。 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$  の証明:  $A \cap B = \emptyset$  と仮定する。 $x \in A$  なる任意の  $x$  に対して、もし  $x \in B$  となると  $A \cap B = \emptyset$  に矛盾するので、 $x \in B^c$ . ゆえに  $A \subset B^c$ .

$A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$  の証明:  $A \subset B^c$  と仮定する。 $A \cap B = \emptyset$  を背理法で示すため、もしも  $A \cap B \neq \emptyset$  と仮定すると、 $(\exists x)x \in A \wedge x \in B$ .  $x \in A$  と仮定から  $x \in B^c$ . すなわち  $x \notin B$ . これは矛盾である。ゆえに  $A \cap B = \emptyset$ .

次に同値変形で証明してみよう。

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow \neg((\exists x)x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists x(x \in A \wedge x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in A) \vee x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow A \subset B^c. \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に証明することも出来るが、ここでは (1) を利用して証明する。

$$\begin{aligned} A \cup B = X &\Leftrightarrow (A \cup B)^c = X^c \\ &\Leftrightarrow (A^c) \cap (B^c) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A^c \subset (B^c)^c \\ &\Leftrightarrow A^c \subset B. \blacksquare \end{aligned}$$

**問 4.** (1) 命題?? (2) を直接証明せよ。 (2) 命題?? (2) 用いて、命題?? (1) を証明せよ。

### 3.13 集合族

(この講義では、教科書 [?] と同じ方針を採用して、可算個<sup>10</sup>の集合からなる集合族  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  しか扱わない。確かに、そういう場合を先に説明して、その後一般の場合を説明する方が学生には分かりやすいかもしれない。)

**集合の集合**、つまり要素が**集合**である**集合**のことを**集合族** (a family of sets) という。

(その話をするとき、**集合**というと、(色がないと) 何を指しているかわかりづらいので、「**集合**」の代わりに「**族**」という言葉を使う。「**族**」の代わりに「**類**」 (class) という言葉を使うこともある。)

<sup>10</sup>うっかりまだ説明していない用語を使ってしまったけれど、可算というのは、自然数を使って番号が付けられる、という意味です。

例えば

$$\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

は、2つの集合  $\{1\}$  と  $\{1, 2, 3\}$  からなる集合族である。また、すでに説明した (集合の) 冪集合も集合属である。

**余談 3.51 (集合属を表す文字の選択)** ここで  $\mathcal{A}$  は  $A$  のカリグラフィック・フォント (の1つ) である。この講義ではこれまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィック・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。■

集合族  $\mathcal{A}$  に対して、和 (合併)  $\bigcup \mathcal{A}$ , 共通部分  $\bigcap \mathcal{A}$  が定義できる。

$$(3) \quad \bigcup \mathcal{A} := \{x \mid (\exists A \in \mathcal{A}) x \in A\},$$

$$(4) \quad \bigcap \mathcal{A} := \{x \mid (\forall A \in \mathcal{A}) x \in A\}.$$

$A$  と  $B$  が集合で、 $\mathcal{A} = \{A, B\}$  のときは

$$\bigcup \mathcal{A} := A \cup B, \quad \bigcap \mathcal{A} := A \cap B$$

である。例えば  $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$  のとき、

$$\bigcup \mathcal{A} = \{1\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{1\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\}.$$

$\mathcal{A}$  が有限個の集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  からなる集合族  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  であるとき、

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{k=1}^n A_k = \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n,$$

おまけとして

$$\prod \mathcal{A} = \prod_{k=1}^n A_k = \prod_{1 \leq k \leq n} A_k := A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

後のための補足:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{k=1}^n A_k &\Leftrightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n \\ &\Leftrightarrow \text{ある } k (1 \leq k \leq n) \text{ が存在して } x \in A_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=1}^n A_k &\Leftrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n \\ &\Leftrightarrow \text{すべての } k (1 \leq k \leq n) \text{ に対して } x \in A_k. \end{aligned}$$

これだけだったら、わざわざ集合族という言葉を持ち出す必要はあまりないかもしれない。無限個の集合からなる集合族に対して、和集合 (合併集合)、共通部分 (積集合)、直積集合が定義できるが、教科書では、なぜか可算個の集合族について限って説明してある<sup>11</sup>。

<sup>11</sup>本当は違うはずだけど「集合列」と言っても良いことになるのか? 解析で「区間縮小法」というのが出て来るので、その辺は整理しておきたい。

任意の自然数  $n$  に対して、集合  $A_n$  が定まっているとする。このとき、 $\mathcal{A} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  とおき、その和、共通部分をそれぞれ

$$(5) \quad \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\},$$

$$(6) \quad \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\},$$

で定める。

極限により定義するのではない！

直積は直観的には

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  の末尾の  $\dots$  が曖昧である。これについては後述する（まあ要するに数列みたいなもので、数列とその集合をどのように厳密に定義するか、ということである。一言でまとめると写像を用いる。）。

一般の集合族

空でない集合  $\Lambda$  を添字集合とする集合族の定義をする。 $\forall \lambda \in \Lambda$  に対して、集合  $A_\lambda$  が定まっているとする。 $\mathcal{A} := \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  とするとき、

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid (\exists \lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid (\forall \lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda\}.$$

直積  $\prod \mathcal{A} = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  については省略する。 ■

集合族の和集合、共通部分について幾つか実例をあげるが、簡単に分かることとして

$$\text{任意の自然数 } n_0 \text{ に対して } A_{n_0} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \quad \text{特に } A_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$$\text{任意の自然数 } n_0 \text{ に対して } A_{n_0} \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n. \quad \text{特に } A_1 \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

**問 5.** 以上のことを証明せよ。

**例 3.52** (1) 集合族  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \subset A_{n+1}$  を満たすならば、 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$  であることを示せ。

(2) 集合族  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \supset A_{n+1}$  を満たすならば、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$  であることを示せ。

(解答)

- (1) 帰納法により  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_1 \subset A_n$  が証明できる。ゆえに  $x \in A_1$  ならば、 $(\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n$ . ゆえに  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . ゆえに  $A_1 \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . 逆に  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1$  は明らかであるから、  

$$A_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$
- (2) 帰納法により  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_1 \supset A_n$  が証明できる。  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  とする。定義より  $(\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n$ . 上に述べたことより  $x \in A_1$ . ゆえに  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_1$ . 逆に  $A_1 \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  であるから、  

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1. \blacksquare$$

集合族  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が単調に増加していくとき  $(A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots)$  の  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  と、集合族  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が単調に減少していくとき  $(A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots)$  の  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  は、1つの  $A_n$  を用いて表すことは一般にはできない。実例をあげよう。

**例 3.53** (1) 任意の自然数  $n$  に対して、 $A_n := (-1/n, 1/n) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/n < x < 1/n\}$  とおくと、

$$(1) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

(2) 任意の自然数  $n$  に対して、 $A_n := (-n, n) = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$  とおくと、

$$(2) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}.$$

証明に入る前に、基本的かつ重要な**アルキメデスの公理**を紹介しておく。

アルキメデスの公理

$$(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) na > b.$$

(この命題は、より簡潔な  $(\forall c > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) n > c$  と同値であるが、オリジナルを尊重して上の形で覚えておくことにする。この一見明らかにも思える命題の証明は実は結構難しい。現象数理学科では、例えば2年次開講の「数学解析」で解説される。)

**証明**

(1) (i)  $x \in \{0\}$  とすると、 $x = 0$ . 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $-1/n < 0 < 1/n$  であるから、  

$$x (= 0) \in A_n. \text{ ゆえに } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(ii)  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  とすると、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $x \in A_n$ . ゆえに  $|x| < 1/n$ . このとき  $x = 0$  を背理法で証明する。もしも  $x \neq 0$  と仮定すると、 $|x| > 0$ . ゆえにアルキメデスの公理より

$$(\exists N \in \mathbb{N}) N|x| > 1.$$

すると  $|x| > \frac{1}{N}$ . これは矛盾である。ゆえに  $x = 0$ . すなわち  $x \in \{0\}$ .

(i), (ii) から (1) が成り立つ。

(2)

(i)  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \subset \mathbb{R}$  であるから、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}$  は明らかである。

(ii)  $\forall x \in \mathbb{R}$  とする。アルキメデスの公理から、 $(\exists n \in \mathbb{N}) n \cdot 1 > |x|$ . ゆえに  $x \in A_n$ . ゆえに  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . ゆえに  $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

(i), (ii) から (2) が成り立つ。■

問 6. 集合族  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の合併集合  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , 共通部分  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  の定義を書け。

問 7.  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を集合族とするとき、以下の (1),(2) を示せ。

$$(1) \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c).$$

$$(2) \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c).$$

問 8.  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を集合族とするとき、以下の (1),(2) を示せ。

$$(1) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}) n < m \Rightarrow A_n \subset A_m \text{ ならば、} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1.$$

$$(2) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}) n < m \Rightarrow A_n \supset A_m \text{ ならば、} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1.$$

問 9. 次の各場合に  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  を求めよ。

$$(1) A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (2) A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \quad (3) A_n = (-n, n) \quad (4) A_n = [-n, n]$$
$$(5) A_n = \left(-\frac{1}{n}, n\right) \quad (6) A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad (7) A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad (8) A_n = \left(\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right)$$
$$(9) A_n = [n, 2n]$$

(自分用のメモ: ブルバキの集合論要約 [?] も見て、内容を取り込むことを考えよ。)

## A 問の解答

解答 1. (a) 偽 (空集合は要素を含まない。すなわち  $\forall x \quad x \notin \emptyset$  が成り立つ。) (b) 真 (空集合は任意の集合に含まれる。特に空集合にも含まれる。) (c) 真 (任意の数学的対象  $a$  に対して、 $\forall x(x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a)$  が成り立つ。それが  $\{a\}$  の定義である。  $a = \emptyset$  の場合ということ。) (d) 真 (空集合は任意の集合に含まれる。) ■

## 解答 2.

$A \cap B = \{2, 3\}$  であるから  $(A \cap B) \cap C = \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3\}$ ,

$B \cap C = \{3, 6\}$  であるから  $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 6\} = \{3\}$ ,

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  であるから  $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4\}$ ,

$A \cap B = \{2, 3\}$  であるから  $(A \cap B) \cup C = \{2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . ■

解答 3.  $a = b$  ならば、 $\{b\} = \{a\}$ ,  $\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$  であるから

$$A = \{a, b\} = \{a\},$$

$$2^A = 2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\},$$

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{a\}, \{a\}\} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

であるから  $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ . ■

## 解答 4.

(1)  $(\Rightarrow)$   $A \cup B = X$  と仮定する。任意の  $x \in A^c$  について、 $x \in X = A \cup B$  であるから、 $x \in A$  または  $x \in B$  が成り立つ。しかし  $x \in A$  とすると  $x \in A^c$  に矛盾するから、 $x \in B$  が成り立つ。ゆえに  $A^c \subset B$ .

$(\Leftarrow)$   $A^c \subset B$  と仮定する。任意の  $x \in X$  に対して、 $x \in A$  または  $x \in A^c$  が成り立つが、 $x \in A^c$  の場合は、仮定  $A^c \subset B$  より  $x \in B$  が成り立つ。ゆえにつねに  $x \in A \vee x \in B$ , すなわち  $x \in A \cup B$  が成り立つ。ゆえに  $X \subset A \cup B$ . 逆向きの包含関係  $X \supset A \cup B$  はつねに成り立つので、 $X = A \cup B$ .

(2)

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow (A \cap B)^c = \emptyset^c \\ &\Leftrightarrow (A^c) \cup (B^c) = X \\ &\Leftrightarrow A^c \subset (B^c)^c \\ &\Leftrightarrow A^c \subset B. \blacksquare \end{aligned}$$

## 解答 5.

(1)  $n_0$  は自然数で、 $x \in A_{n_0}$  が成り立つとする。このとき、 $(\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n$  が成立するので、 $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . ゆえに  $A_{n_0} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

(2)  $n_0$  は自然数で、 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  が成り立つとする。このとき、任意の自然数  $n$  に対して、 $x \in A_n$  が成り立つので、特に  $x \in A_{n_0}$ . ゆえに  $A_{n_0} \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . ■

### 解答 6.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}. \blacksquare$$

### 解答 7.

(1) 任意の  $x$  に対して

$$\begin{aligned} x \in \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c &\Leftrightarrow \neg \left( x \in \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) \\ &\Leftrightarrow \neg ((\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \neg(x \in A_n) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c) \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c).$$

(2) 任意の  $x$  に対して

$$\begin{aligned} x \in \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c &\Leftrightarrow \neg \left( x \in \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) \\ &\Leftrightarrow \neg ((\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \neg(x \in A_n) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c) \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c). \blacksquare$$

### 解答 8.

(1) (i)  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  とする。集合族の共通部分の定義から、任意の自然数  $n$  に対して、 $x \in A_n$ . 特に  $n = 1$  と選んで  $x \in A_1$ . (ii)  $x \in A_1$  とする。仮定から、任意の自然数  $n$  に対して、 $A_1 \subset A_n$  であるから、 $x \in A_n$ . ゆえに集合族の共通部分の定義から  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . (i), (ii)

から  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$ .

(2) (i)  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  とする。集合族の合併の定義から、ある自然数  $n^*$  が存在して、 $x \in A_{n^*}$ . 仮定から  $A_{n^*} \subset A_1$  が成り立つから、 $x \in A_1$ . (ii)  $x \in A_1$  とする。  $n = 1$  とおくと、 $x \in A_n$ . ゆえに (集合族の合併の定義から)  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . (i), (ii) から  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$ .  $\blacksquare$

**解答 9.** (まだ見直ししていない。) 結果を区間の記号を用いて書くことにする。

$$(1) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

$$(2) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = [-1, 1], \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

$$(3) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1).$$

$$(4) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = [-1, 1].$$

$$(5) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, \infty), \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 1].$$

$$(6) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (0, 1), \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

$$(7) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = [0, 1), \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

$$(8) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 3), \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (1, 2).$$

$$(9) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [1, \infty), \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset. \blacksquare$$

## B 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合  $A$  に対して、 $A$  の要素の個数を  $\#A$  で表すことにする。(  $\#$  はシャープ  $\#$  でなく、number sign である。  $\#A$  の代わりに  $|A|$  という記号で表すこともある。)

$$\text{例 B.1 } \#\emptyset = 0, \#\{1\} = 1, \#\{1, 2\} = 2, \#\{a, b\} = \begin{cases} 2 & (a \neq b) \\ 1 & (a = b). \end{cases} \blacksquare$$

**命題 B.2 (直積集合の要素数)** 有限集合  $A, B$  に対して、 $\#(A \times B) = \#A\#B$  が成り立つ。

**命題 B.3 (冪集合の要素数)** 有限集合  $A$  に対して、 $\#(2^A) = 2^{\#A}$  が成り立つ。

## C 定義と記号の約束集

こういうものは自分で抜き出して作るもののような気もするけれど。

$a$  が集合  $A$  に属することを  $a \in A$  (あるいは  $A \ni a$ ) で表す。

$a_1, \dots, a_n$  が要素で、それ以外に要素がない集合を  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  で表す。

$\{x \mid P(x)\} := P(x)$  が成り立つような  $x$  全体の集合.

$$\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

$$\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ は整数}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}.$$

$$\mathbb{Q} := \{x \mid x \text{ は有理数}\} = \left\{x \mid (\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{Z}) x = \frac{n}{m}\right\}.$$

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ は実数}\}.$$

$$\mathbb{C} := \{x \mid x \text{ は複素数}\}.$$

$$\{x \in A \mid P(x)\} := \{x \mid x \in A \wedge P(x)\}.$$

$$\{f(x) \mid x \in A\} := \{y \mid (\exists x \in A)y = f(x)\}.$$

$$(\text{集合の相等}) \quad A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

$$A \subset B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

$a \in A$ ,  $A = B$  (集合の相等),  $A \subset B$  の否定をそれぞれ  $a \notin A$ ,  $A \neq B$ ,  $A \not\subset B$  と表す。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

$$(\text{順序対の相等}) \quad (a, b) = (a', b') \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} a = a' \wedge b = b'.$$

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \quad (\text{ただし } (a, b) \text{ は順序対を表す}).$$

$$2^A := \{Y \mid Y \subset A\} \quad (Y \text{ として、なるべく使っていない記号を選ぶこと}).$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})x \in A_n\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})x \in A_n\}.$$

$\mathcal{A}$  を集合族とするとき、 $\bigcup \mathcal{A} := \{x \mid (\exists A \in \mathcal{A})x \in A\}$ ,  $\bigcap \mathcal{A} := \{x \mid (\forall A \in \mathcal{A})x \in A\}$ .

## D がらくた箱

きちんと書けたら本文に含めるかも知れないが…

### D.1 記号 $\sqcup$

$A \cap B = \emptyset$  であるとき、 $A \cup B$  のことを  $A \sqcup B$  と書くことがある。

$A_1, \dots, A_n$  に対して、

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

が成り立つとき、 $A_1 \cup \dots \cup A_n$  を  $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$  と書く。

## D.2 合併集合の個数 (包除原理)

以下、有限集合  $A$  の要素の個数を  $|A|$  と表す。出て来る集合はすべて有限集合とする。

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|.$$

$$|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

が成り立つ。

3つの集合の合併については

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

より一般に

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

これを**包除原理** (the inclusion-exclusion principle) と呼ぶ。

**余談 D.1** 図形の面積、体積を一般化した測度  $\mu(\cdot)$  について似たような式が成り立つ。

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \blacksquare$$

## D.3 カンマ (,) に関する注意

### D.3.1 カンマで区切る

カンマ (comma) というのは、複数のものを並べるときに、ものともものを区切るために使われることは理解しているであろうが、数学の世界では、ものを区切るときにそれ以外の方法はめったに使われない、ということを理解しよう。例えばものを区切るために空白は使われない。

(行列の成分などは例外と言えるが、行列は表のようなもので、どこにもものを書くのかが明白に分かるせいとも考えられる。ふと頭に浮かんだのだが、日本人が記号を決めたら、罫線とか、升目を使いそうだ。)

以上のことは簡単だと思うのだが、試験をするとカンマを省略する人が続出する。

$a, b, c$  が簡単なもの (例えば数) であるとき、 $a, b, c$  をすべての要素とする集合を  $\{a, b, c\}$  と書くのは誰でも出来るのだが、 $a, b, c$  が複雑になると、 $\{abc\}$  や  $\{a, b, c, \}$  のようなものが答案に出現する。

### D.3.2 条件とカンマ

条件をカンマで区切って並べるときは、普通は  $\wedge$  を略したと考える。

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x) \Leftrightarrow P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \dots \wedge P_n(x).$$

例えば  $x = 1, y = 2$  は  $x = 1 \wedge y = 2$  ということである。

方程式や不等式を扱う記号は、なんとなく古めかしくて、注意が必要である。例えば

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \text{ の解は } x = 1, 2.$$

条件としては

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2.$$

つまり

$$x = a_1, a_2, \dots, a_n \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n.$$

(方程式の解集合が  $\{1, 2\}$  というのに近いノリなのだろうか？正直良く分からない。)

また

$$x^2 - 3x - 2 > 0 \text{ の解は } x < 1, x > 2.$$

条件として

$$x^2 - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 2.$$

一方で連立方程式の解を  $x = 1, y = 2$  と書くときの  $,$  は  $\wedge$  であるから、基準が分かりづらい面がある。

## D.4 内包の公理 vs 分出の公理

$\{x \mid P(x)\}$  はつねに集合を定めるというのが、**内包の公理**というものだが、実はこれを無条件に認めると、有名な **Russel のパラドックス**が生じる。

**Russel のパラドックス**

自分自身を要素に持たないもの全体の集合を  $R := \{x \mid x \notin x\}$  とおく。

- もし  $R \in R$  であれば、 $R \notin R$  を満たさないので、 $R$  の定義により、 $R \notin R$ . これは  $R \in R$  と仮定したことと矛盾する。
- また、もし  $R \notin R$  であれば、 $R$  の定義により、 $R \in R$ . これは  $R \notin R$  と仮定したことに矛盾する。

いずれにせよ、矛盾が生じる。

集合を素朴に取り扱うと様々な矛盾を生じ得る、ということが分かってから、それを克服するための理論が模索された。今では**公理的集合論**というものが確立されていて、様々なパラドックスが解消されている。

公理的集合論では、任意の集合  $A$  と条件  $P(x)$  に対して、集合  $A$  の要素のうちで  $P(x)$  を満たすものの全体は集合を定める、というのは認めても良いとされる。これを**分出の公理**という。これを内包の公理の代わりにして議論するわけである。

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)).$$

$A$  と  $P(x)$  に対して、上の  $B$  は一意的に定まる。この  $B$  を

$$\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$$

あるいは

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

と表す。

公理的集合論では、この分出の公理を基礎として、色々な集合を定義する。例えば  $A$  を集合として

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \neq x\}$$

は ( $A$  によらず) 一意的に定まるが、この  $B$  を空集合と呼び、 $\emptyset$  で表す。また

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}.$$