

# 数理リテラシー 第1回

～ ガイダンス, 論理 (第1回) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年4月12日

- ① 自己紹介
- ② 連絡事項
- ③ ガイダンス
- ④ 命題論理
  - 命題とその真偽
  - 「でない」 (否定),  $\neg$
  - 「かつ」 (論理積),  $\wedge$
  - 「または」 (論理和),  $\vee$
- ⑤ 参考文献

# 自己紹介

- 名前: 桂田 祐史  
かつらだ まさし
- 研究テーマ: 数値計算法の数理 (数値計算の方法を数学的に解析する)
- メールアドレス: katurada あつとまーく meiji ドット ac ドット jp
- 授業の WWW サイト:  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/>
- 研究室: 910 号室 (高層棟 9 階)

- 今日の授業に用いたスライド資料は、終了後に授業の WWW サイト <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/> に載せます (原則として毎回そうします)。ブックマークを勧めます。この URL は Oh-o! Meiji のシラバスの補足にも書いてあります。そこからリンクをたどるのが便利かもしれません。
- 質問はいつでも気軽にして下さい。
  - 授業中に尋ねる (私語は禁止だけど質問は OK)。結構書き間違えたりするので、早めに指摘してもらえると助かります。
  - 授業終了後に捕まえて尋ねる。(授業の開始直前等は「後にして下さい」というかもしれません。)
  - 宿題の余白に書く。
  - メールで質問する (会う約束、Zoom の約束もできる)。(この授業では「自分で考えなさい」といいません。)
- 今日は初回なので宿題はありません。

# ガイダンス (1) 数理リテラシー<sup>1</sup>とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力  
具体的には、**論理**、**集合**、**写像**という、現代数学を記述するための言語  
(写像というのは、関数を一般化したもの。)

なぜそれが大事か?

私なりの答え

高校までは「公式主役の数学」をしていたが、大学では「定理が主役の数学」をする。定理は命題であり、それを記述するための言葉・文法があり、それをを用いて読み書きが出来る必要がある。

言葉は伝達手段であるが、実は、思考のための必須の道具でもある。

用いる用語・記号の定義や定理は、人に言えるようにしておく。定義や定理に基づいて論じられるようになる。

<sup>1</sup>literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

## ガイダンス (2) 割とわかりにくいので補足

シラバスで参考書にあげた

新井紀子, 数学は言葉 — *math stories*, 東京図書 (2009)

は、そのあたりのことを上手に説明している (と思う)。

新井先生は次の文章も書いている。

- 『「数学は言葉」の対象は?』

<https://web.archive.org/web/20150916080120/http://researchmap.jp/jo8s71jcd-78/>

「言語教育の方法論で数学を教える」という言葉が印象的

- 「数学の言葉への脱皮」

<https://tanemaki.iwanami.co.jp/posts/1360>

(脱皮はとても難しいけれど大事、がんばろう、という話)

## ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。
- 出席を取る。声で返事する or 手をあげる。  
(ちなみに大学の原則「2/3以上出席が期末試験受験の必要条件」)
- **ほぼ毎回宿題を出す** (授業中に演習時間は取れないので)。  
締め切りは翌週月曜 13:30  
添削して Oh-o! Meiji でフィードバックする。  
遅れずに提出したかどうか得点化する。間違えても減点しない。  
成績評価の20%を占めるので、出さないとかなり不利。  
**心構え 1** 自分で解く。相談しても質問しても良いけれど、最後は自力で書く。「写すな頭を通せ。」  
**心構え 2** 添削されたものを読んで理解する (そのための2クラス制)。
- 例年、中間試験をしている (6月の中旬か下旬)。試験については近づいたら詳しく説明する。

## ガイダンス (4) 自習についてアドバイス

- 予習・復習が有益。1週間授業1コマだけで理解するのは困難。講義ノートがあるので予習はしやすいが、どちらかと言うと**復習を勧める**。
- 復習は、自分で取ったノート、講義資料、教科書(中島 [1])などを**きちんと読む**のが基本。

読みながら(あるいは講義を聴きながら)「この言葉・記号は何だったっけ?」, 「これは本当?」, 「これはなぜ?」と自問自答する習慣をつけよう。

あら筋をまとめたり、人に説明するのも効果がある。

- 小学校以来、練習問題(ドリル)を解くことで勉強する、と言うやり方に慣れているだろうが、大学ではそれがあまり有効でない。(科目によっては、手頃な練習問題がなかったりする。1,2年生のうちには計算問題が多い科目がまだ結構あるけれど、段々減っていく。計算問題1つを解くのに1時間かかったりするようになるので、数をこなして覚えるやり方は限界がある。)
- もう一つ、宿題のフィードバックを読んで、指摘されたことを理解する、というのが大事。



# ガイダンス (5) 自習についてアドバイス (脱線気味)

- この講義は語学に近いところがある。目で見ても、声に出して読んだり、手で書いたりすること。コピペは意味がないけれど、自分の手で写すことには意味がある。
- 本について
  - 教科書: 中島匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版
  - 参考書: 集合、写像、論理というキーワードのいずれかがタイトルに入っている本は参考になるかもしれない。シラバスにたくさん載せてある。それらは、図書館のシラバス本コーナーに置いてあるはず。
  - (少し脱線) 図書館、書店に親しもう。時々大型の書店に行くことを勧める。大学の近くのブックファーストもまあまあの品揃え。最近では電子図書も充実して来た。明治大学図書館は [Maruzen eBook](#) と契約している (学外からも本が読める)。
- ネットで調べるのは結構難しい。
  - 情報の質の問題。ノイズが多い (玉石混交, 知らないものを調べるのは難しい)。ウィキペディアは怪しい。英語の Wikipedia はかなり良い。
  - 一つの言葉が色々な意味に使われる。ある意味で正しくても、適当でない場合が結構多い。自分が考えているケースに該当するか、チェックする必要がある (分からないで調べているときにそれをするのは難

数理リテラシーの内容は、大きく分けて次の3つのパートからなる。

- ① 論理
- ② 集合
- ③ 写像

(これ以外に IV. 同値関係 というのも補講で用意するかも。)

I 「論理」は次の2つからなる。

## ① 命題論理

- ① 命題とその真偽
- ② 「でない」 (否定,  $\neg$ )
- ③ 「かつ」 (論理積,  $\wedge$ )
- ④ 「または」 (論理和,  $\vee$ )
- ⑤ かっこ ( ) (意外と大事)。
- ⑥ ...

## ② 述語論理

(そのときになったら説明)

# 1 命題論理

## 1.1 命題とその真偽

**命題** (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

### 例 0.1

$$1 + 1 = 2.$$

正しい

円周率は有理数である。

正しくない

$\sin 1$  は 1 より大きい。

正しくない

— 以上はいずれも命題

10 億は大きい

どうだろう？

— これは命題ではない！

## 1.1 命題とその真偽 真 (true), 偽 (false), 真理値

命題のことを  $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$  のような記号で表す。

ある命題  $p$  が正しいことを

$p$  は**真** (true) である

$p$  は成立する (成り立つ)

$p$  の**真理値** (truth value) は **T** である

$p$  の真理値は 1 である

のように表す。

ある命題  $p$  が正しくないことを

$p$  は<sup>ぎ</sup>**偽** (false) である

$p$  は成立しない (成り立たない)

$p$  の真理値は **F** である

$p$  の真理値は 0 である

のように表す。

(false [fó:ls], 「フォールス」)

## 1.1 命題とその真偽 真 (true), 偽 (false), 真理値

### 例 0.2

$$p_1 \quad 1 + 1 = 2.$$

$p_2$  円周率は有理数である。

$p_3$   $e > 2.7$ . ( $e$  は自然対数の底)

$$p_4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

の真理値はそれぞれ T, F, T, T である。

命題が真であることを論理的に示すことを「**証明する** (to prove)」という。その論述を**証明** (proof) と呼ぶ。

## 余談1 証明のルーツ 古代ギリシャ

- キオスのヒポクラテス (B.C. 450—420)  
初めての証明？
- アレクサンドリアのエウクレイデス (ユークリッド, B.C. 3C?)  
「原論 (ストケイア)」

ギリシャ数学は、ヨーロッパでは一度忘れられて、ルネッサンスにアラビア世界から里帰りする。

## 余談2 命題の呼び方の慣習

- 論理学では「正しい命題を定理 (theorem) という。」
- しかし数学の多くのテキスト、講義では、正しい命題以外書かないことが多く、次のように呼び分ける。

定理	大事なもの
補助定理, 補題 (lemma)	定理の証明用のもの
系 (corollary)	定理からすぐ分かる (導かれる) もの
命題 (proposition)	重要性が低いもの

これらは、真な命題であるという意味では、みな定理である。

**注** 重要性がそれほど高くない定理を命題と呼ぶ、というやり方はもしかすると古くなっているかもしれない。



## 1.2 「でない」 (否定), $\neg$

任意の命題  $p$  について「 $p$  でない」は命題である。これを  $p$  の**否定** (negation) と呼び、 $\neg p$  で表す。

「 $p$  でない」, “not  $p$ ” と読む。

(高校では  $\bar{p}$  と書いたかもしれない。どう書いてあっても読めた方が良いが、書くときは統一しよう。)

この講義では、 $\neg p$  と書く。

### 例 0.3

$p$  が  $1 + 1 = 2$  であるとき、 $\neg p$  は  $1 + 1 \neq 2$ 。

$q$  が  $\sqrt{10} > \pi$  であるとき、 $\neg q$  は  $\sqrt{10} \leq \pi$ 。

## 1.2 「でない」 (否定) 否定の真理値, 真理値表

任意の命題  $p$  について

$p$  の真理値が T であれば、 $\neg p$  の真理値は F

$p$  の真理値が F であれば、 $\neg p$  の真理値は T

このことを次のように表す。

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

( $p$  は何か特定の命題ではなく、どういう命題についても成り立つことを述べている。)

行ごとに読むことに注意する。

このような表を**真理値表** (truth table) と呼ぶ。

## 1.2 「でない」 (否定) 排中律と無矛盾律

暗黙のうちに次を仮定している。

はいちゅうりつ

**排中律**

「任意の命題  $p$  について、 $p$  または  $\neg p$  の少なくとも一方が成り立つ。」

どちらでもない、という中間の状態がない。

むじゅんりつ

(無)**矛盾律**

「任意の命題  $p$  について、 $p$  と  $\neg p$  が同時に成り立つことはない。」

## 1.2 「でない」(否定) 排中律と無矛盾律 どちらも認めることにする

- 無矛盾律が成り立たない、つまり  $p$  と  $\neg p$  が同時に成り立つような命題  $p$  が1つでも存在すると、すべての命題  $p$  について、 $p$  と  $\neg p$  が成り立つことが証明できる。  
その場合、例えば  $1+1=3$ ,  $1+1 \neq 3$  のどちらも真となる。△チャクチャになる。
- 一方、排中律はやや微妙である。  
1つの命題  $p$  について、 $p$  も  $\neg p$  もまだ証明できていない、ということはたくさんある。  
いつかは出来る？出来なくても、どちらかは成り立つと信じる??
- 我々は、以下では無矛盾律も排中律も認めて議論する。  
(このあたり、深い話があるが、そこには首を突っ込まないことにする。)

## 1.3 「かつ」 (論理積), $\wedge$

2つの命題  $p$  と  $q$  について

「 $p$ が成り立つ、かつ  $q$ が成り立つ」 ( $p$  と  $q$  が両方とも成り立つ)

は命題である。

これを  $p \wedge q$  で表し、「 $p$ かつ  $q$ 」, “ $p$  and  $q$ ” と読む。

$p$  と  $q$  の論理積, 連言, logical conjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の2つは) 覚えなくても良い。

### 例 0.4

$\frac{1}{20}$  は有理数であり、かつ  $\pi$  は無理数である。

$2.7 < e \wedge e < 2.8$  (普通  $2.7 < e < 2.8$  と書くだらうけれど)。

**注意** 「そして」, 「しかし」はどちらも「かつ」と同じ。事実としてそれぞれ成り立つか成り立たないかが問題で、順接も逆接も関係ない。

### 1.3 「かつ」 (論理積), $\wedge$ $p \wedge q$ の真理値表

$p \wedge q$  の真理値は、 $p$  と  $q$  の真理値がともに T であるとき T, そうでないとき F と約束する。

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

## 1.3 「かつ」 (論理積) 真理値表の書き方についての注意

- 行の書き順は、辞書引き順序のような適当な順番を選ぶことを強く勧める。樹形図を描いたと考えるのも良い。
- 罫線をもっと引きたくなるかもしれない。その場合

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

のように第2列と第3列の間を  $\parallel$  にしたりして、第1,2列と、第3列は違うことを示すのを勧める。例えば最初の行

$$T \mid T \parallel T$$

は、「 $p$ がTかつ $q$ がT **のとき**、 $p \wedge q$ はTである」ということを言っている。

2023/4/12 の授業では、ここまで説明して時間切れとなった。次のスライドは、4/19 の授業で説明する。



## 1.4 「または」 (論理和), $\vee$

2つの命題  $p$  と  $q$  について

「 $p$  であるか、または  $q$  である」 ( $p$  と  $q$  の少なくとも一方が成り立つ) は命題である。

これを  $p \vee q$  で表し、「 $p$  または  $q$ 」, 「 $p$  or  $q$ 」と読む。

$p$  と  $q$  の論理和、選言, logical disjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の2つは) 覚えなくても良い。

$p \vee q$  の真理値は、次のように約束する。

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

# 参考文献

- [1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).