数理リテラシー 第4回

〜 論理 (4) 〜

桂田 祐史

2023 年 5 月 10 日

目次

連絡事項＆本日の内容

- 宿題 1,2 は 9 割以上の人に提出してもらった。ほっとしたけれど、一方で提出しない人がいるわけで、そういう人はぜひ改めて下さい。宿題 1 はフィードバックしたので、必ず見て下さい。(宿題 2 もフィードバックするつもりですが、トラブル対応に追われて間に合わなかった。ちょっと待って下さい。) 数学の宿題はマルがもらえるのが普通とは考えないこと。特に数理リテラシーは英会話っぽいところがある。「間違えても気にしない。次から直す。」
- 宿題 2 で式を日本語で読むような問題は、答え方の幅が広い。でもこういう読み方をすすめたい、と言うのが強くあって、とにかく正確に真似をしてほしい。それからずれたものは間違いとは言えないけれど。

宿題について　宿題１

学年・組・番号・氏名を書いて下さい。特にプリントに書いたのでない人に書き忘れが多い。プリントに書く必要はないけれど、プリントで書かせていることは書くべき。

宿題１　プリントに基づいて解説＆講評する。

宿題２　未提出４人(遅れた人もごくわずか、PDF でない人も減った)だったけれど…なるべく全員に出してもらいたい。

2.3 ある○○が存在して⋯, ∃ (続き)

(このスライドは前回のを再掲載するものです。)

「$p(x)$ が成り立つような x が (少なくとも 1 つ) 存在する。」

$$\text{ある } x \left\{ \begin{array}{l} \text{が存在して} \\ \text{について} \end{array} \right\} p(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ . \end{array} \right\}$$

There exists x such that $p(x)$ holds.

これを次のように表す。

$$\exists x \quad p(x)$$

∃ は exists の頭文字の大文字 E の鏡文字である。
∃ x s.t. $p(x)$ と書く人も多い。この辺は気分の問題である。

2.3 ある○○が存在して…, ∃ $(\exists x\colon\ p_1(x))\ p_2(x)$

例 4.1 (方程式の実数解の存在)

方程式 $x^3 - x + 1 = 0$ の実数解 x が存在する。
ある x が存在して、x は実数かつ $x^3 - x + 1 = 0$.
$\exists x\ (x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0)$.

この例がそうであるように、多くの場合、$p(x)$ は $p_1(x) \land p_2(x)$ の形をしていて、$p_1(x)$ が考察の範囲などを表している。このとき

$$\exists x \quad (p_1(x) \land p_2(x))$$

を次のように表す。

$$(\exists x : p_1(x)) \quad p_2(x).$$

例 4.1 (続き)

$(\exists x\colon\ x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0.$
$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^3 - x + 1 = 0.$
「ある実数 x が存在して、$x^3 - x + 1 = 0.$」

似た例を追加する。

例 4.2 ($\sqrt{2}$ の存在)

$\exists x \quad (x > 0 \land x^2 = 2).$
$(\exists x\colon\ x > 0) \quad x^2 = 2.$
$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2.$
「ある正の数 x が存在して $x^2 = 2.$」

2.3 ある○○が存在して⋯, ∃

「$p(x)$ が成り立つような x が (少なくとも 1 つ) 存在する。」

$$\text{ある } x \left\{ \begin{array}{l} \text{が存在して} \\ \text{について} \end{array} \right\} p(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

There exists x such that $p(x)$ holds.

これを次のように表す。

$$\exists x \quad p(x)$$

∃ は exists の頭文字の大文字 E の鏡文字である。
∃ x s.t. $p(x)$ と書く人も多い。この辺は気分の問題である。

2.3 ある○○が存在して…, ∃　$(\exists x\colon\ p_1(x))\ p_2(x)$

例 4.3 (方程式の実数解の存在)

方程式 $x^3 - x + 1 = 0$ の実数解 x が存在する。
ある x が存在して、x は実数かつ $x^3 - x + 1 = 0$.
$\exists x\ (x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0)$.

この例がそうであるように、多くの場合、$p(x)$ は $p_1(x) \land p_2(x)$ の形をしていて、$p_1(x)$ が考察の範囲などを表している。このとき

$$\exists x \quad (p_1(x) \land p_2(x))$$

を次のように表す。

$$(\exists x : p_1(x)) \quad p_2(x).$$

例 4.3 (続き)

$(\exists x\colon\ x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0.$
$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^3 - x + 1 = 0.$
「ある実数 x が存在して、$x^3 - x + 1 = 0.$」

似た例を追加する。

例 4.4 ($\sqrt{2}$ の存在)

$\exists x \quad (x > 0 \land x^2 = 2).$
$(\exists x\colon\ x > 0) \quad x^2 = 2.$
$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2.$
「ある正の数 x が存在して $x^2 = 2.$」

2.4 複数の量称を含む命題

2.4.1 複数の変数を含む述語

2 つ以上の変数を含む述語 (条件) がある。

例 4.5 (2 つの変数を含む述語)

$xy = x$ は、x と y に数を代入すると命題になる。
$x = 0,\ y = 0$ を代入すると $0 \cdot 0 = 0$ となり、真な命題である。
$x = 1,\ y = 0$ を代入すると $1 \cdot 0 = 1$ となり、偽な命題である。

2 変数 $x,\ y$ を含む述語は、$p(x, y)$ のように表せる。

2.4.1 2変数の述語で1つの変数に量称記号をつける

2変数 x, y を含む述語 $p(x, y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x, y) \quad \text{と} \quad \exists y \quad p(x, y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

例 4.6

(1) $$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

(2) $$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

いずれも、x についての述語である。例えば

(1) に $x = 0$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(1) に $x = 1$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは偽な命題
(2) に $x = 0$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(2) に $x = 1$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは真な命題

2.4.2 2 つの変数を持つ述語に 2 つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x,y))$　「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x,y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x,y))$　「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x,y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x,y))$　「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x,y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x,y))$　「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x,y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。

3 つ以上の変数を持つ述語に対しても同様である。

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 4.7

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$
「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」
これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 4.8

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$
「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」
これも実は真。$y = -1$ とすれば…

例 4.9

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

「任意の実数 x, 任意の実数 y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」
「任意の実数 x, y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

例 4.10 (3 変数の場合、ピタゴラス数)

3 つでも同様で

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land z \in \mathbb{N} \land x^2 + y^2 = z^2)$$

を次のように書く。

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

「ある自然数 x, y, z が存在して $x^2 + y^2 = z^2$」

この命題は真である。$x = 3,\ y = 4,\ z = 5$ とすると条件を満たす。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

(a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

(b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

注 $\exists x\ P(x)$ を英語で読むと、"There exists x such that $P(x)$ holds." となる。関係代名詞を使って書かれた文は、後ろの節から訳す、という話を思い起こさせる。この辺は日本語と英語の違いに係るところである。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)
読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。

私の意見

青と水色はとても紛らわしい。読点「、」を見落とさなければ大丈夫 (区別できる) という意見もあるけれど、それは聴いただけでは分からない。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

(ここは次回に回すことに)
上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

参考文献