数理リテラシー 第5回

〜 論理 (5) 〜

桂田 祐史

2023 年 5 月 17 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 本日の授業内容: (前半) 複数の量称を含む命題の否定, (後半) 第 II 部 (§3) 集合に入ります (桂田 [1])。
  (けわしい道は終わり、しばらくは平坦？)
- 宿題 3 の解説を行います。
  今回は、書き間違いなどをのぞき、間違っている人はほとんどいなかった。
  - 式を日本語にするときに、なるべくこう書くようにして下さい、を無視した答案がちらほら。「ある○○が存在して」
  - 「x が正の数ということを単に $x > 0$ と書いていいことにしよう (例えば $(\forall x > 0)$ とか $(\exists L > 0)$ とか)」というのを無視して、
    $x \in \mathbb{R} \land x > 0$ のようなことをした人がちらほら。
    $(\forall x\colon x \in \mathbb{R} \land x > 0)$ は良いけれど、$(\forall x \in \mathbb{R} \land x > 0)$ と書かれたのは見たことがない。
    マイナーな分野では、実数でない x に対して、$x > 0$ という記号を使うことがある。だから、単に $x > 0$ とだけ書くのは誤解される心配がある、ということだけれど、それは無視しよう、ということ。

  「コミュニケーションて難しいなあ」と思う。…そうそう。「スキャンして PDF」をよろしく。
- 欠席した場合。宿題ルール。Oh-o! Meiji シラバスの補足に書いた。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の $\boxed{}$ とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。)

例 5.1

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」あるいは「x を $\boxed{}$ とすると」と書き出せばよい。

例 5.2

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0$. □

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、前から順に処理する。

例 5.3

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
　(次に ($\exists y \in \mathbb{Z}$) $\cdots$ を見て、y を探す$\cdots$整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで$\cdots$)
　　$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$.　□

もう一つ例をあげる。

例 5.4

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明　$x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

2.4.5 ∀ と ∃ を入れ替えると違ってしまう

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y \qquad \text{(実は真)}$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y \qquad \text{(実は偽)}$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

例 5.5 (じゃんけん)

3 点からなる集合 $J = \{$ ぐう, ちょき, ぱあ $\}$ に、次のような 2 項関係 $\succ$ を導入する。

$$\text{ぐう} \succ \text{ちょき}, \quad \text{ちょき} \succ \text{ぱあ}, \quad \text{ぱあ} \succ \text{ぐう}$$

これ以外の場合は、$\succ$ は不成立とする ($\not\succ$)。例えば、ぱあ $\not\succ$ ちょき, ぱあ $\not\succ$ ぱあ (要するに「じゃんけん」の勝ち負けの判定)。こうすると、

$$(\forall t \in J)(\exists k \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても、その t に勝つ手 k がある) は真であるが、

$$(\exists k \in J)(\forall t \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても勝ってしまう “必勝手” k がある) は偽である。 □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の $\square$ とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の $\square$ とする」自体を省略することもあるが…)

例 5.6

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

注意 (当たり前)　$\forall$ を使って書かれた命題を日本語に翻訳するときは、「すべての」と「任意の」のどちらも使えるが、証明を書くときは「任意の」一択である。「x をすべての実数とする」はおかしい。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を$\square$とおくと」あるいは「x を$\square$とすると」と書き出せばよい。

例 5.7

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0.$ $\square$

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 $(\forall, \exists)$ がある場合は、左から順に処理する。

例 5.8

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z}) \cdots$ を見て、y を探す。整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで…)
$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (3)

もう一つ例をあげる。

例 5.9

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明 $x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答　(∀ は ∃ に、∃ は ∀ に置き換え、最後の条件を否定する。)

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| \geq \varepsilon$$

自分が理解していない理論を使った議論は、わからなくても、そこに現れる数式の計算自体はできることが珍しくない。論理についても、式で表現してあれば、(意味がわからなくても) その計算は機械的にできる。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題

定理 5.10

以下の (1)〜(7) が任意の述語 $P(x)$, $P(x, y)$ について成り立つ。

1. $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x))$
   「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
2. $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x))$
   「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、$P(x)$ が成り立たない」
3. $\exists y \forall x\ P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y\ P(x, y)$
4. $\forall x \forall y\ P(x, y) \equiv \forall y \forall x\ P(x, y)$
5. $\exists x \exists y\ P(x, y) \equiv \exists y \exists x\ P(x, y)$

特に (1),(2),(3) が重要である。(3) は同値でないことだけでも覚える。
それ以外はその都度考えれば十分。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

定理 5.10 (続き)

6. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \land (\forall x\ Q(x))$
7. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \lor (\exists x\ Q(x))$

- (6) で $\land$ の代わりに $\lor$ としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \lor (\forall x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

- (7) で $\lor$ の代わりに $\land$ としたものは成り立たない。

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \land (\exists x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

(例えば整数について考えていて、$P(x)$ は「x が偶数である」, $Q(x)$ は「x は奇数である」とすると、偽であることが分かる。)

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

1. $\neg\left((\forall x : P(x))\ Q(x)\right) \equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x)$
2. $\neg\left((\exists x : P(x))\ Q(x)\right) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$

(i) の証明

$$\begin{aligned}
\neg\left((\forall x : P(x))\ Q(x)\right) &\equiv \neg\left(\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))\right) \\
&\equiv \exists x \neg (P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
&\equiv \exists x \neg (\neg P(x) \vee Q(x)) \\
&\equiv \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \\
&\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x).
\end{aligned}$$

(ii) も同様に証明できる。興味あればやってみよう (解答はこの PDF の最後)。

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (1)

(授業では省略しました。)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$.

しかし、括弧が多いと式が読みにくくなるので、数の四則演算でそうしたように、論理式についても、括弧を減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

ある本によると、優先順位の高い順に

1. $=, \in$
2. $\neg, \forall x, \exists x$
3. $\wedge, \vee$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow, \equiv$

($\Leftrightarrow$ はテキストによっては、$\Rightarrow$ と同じ、となっている。)

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

上のルールにおいても、$\wedge$ と $\vee$ は同じ優先順位なので、$\wedge$ と $\vee$ が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必要であることに注意しよう。($\wedge$ を論理積、$\vee$ を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から $\wedge$ を優先して、$(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

この講義では (練習時間は取れないので) 括弧を省略しない。
(ただし、$\equiv$ の優先順位が一番低いことは仮定している。)
理解している自信がある人が括弧を省略するのは認める。

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/set.pdf (2013–2021).