数理リテラシー 第9回

〜 集合 (4) 〜

桂田 祐史

2023 年 6 月 14 日

目次

本日の内容＆連絡事項

- 本日の授業内容: 集合のやり残し
- 宿題 7(問 7) の解説を行います。
- 今日は宿題はありません。
- 問 1〜問 7 の解答、WWW に置いてあります。

中間試験

次回授業は中間試験 (15:25–17:00) を行います。

- 遅刻は開始してから 30 分まで認める。
- 「どういう問題になるか」等は、個別に答えられないので、この授業中に言って下さい。
- 「真剣に取り組もう。一方で、失敗しても凹みすぎないこと。成功しても油断しないこと。成績に参入されるけれど、一方で期末への準備でもあり、結果の良し悪しに一喜一憂するよりは、反省して次に生かすのが大事。」
- 「フィードバックをちゃんと読むこと。(フィードバックはオンラインでやろうかと考えている。)」
- 「なるべく時間いっぱい頑張って下さい。多くの問題は覚えたことを出すだけ (すぐ解けるか解けないか決まる) だけど、証明とかは粘れるはず。」
- 体調不良のときは無理をしないで欠席して下さい (その場合は、宿題と期末のみで判定する— 期末の試験範囲の方がむつかしいし、一発勝負は危険だけれど)。細かい理由の説明は不要とします。一方 (天候不順でもあるし、忙しい時期でもあるし、むつかしいですが) できる範囲で体調の維持に努めて下さい。(…しかし、それにしても 6 月 14 日は欠席が多かったので、何か考えた方がいいのかな…)

3.12 集合についての定理, それらの証明

定理 9.1 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、A, B, C は X の部分集合とする。

1. $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律), $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
2. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律)
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
7. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
8. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (ド・モルガン律)
9. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3.12 集合についての定理, それらの証明

高校では、集合に関する命題は、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、ヴェン図を考えるときの参考にするけれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族については、ヴェン図も正確には描きようがないし、実は 4 つの集合くらいから、一般的な状況を図で表現することが難しくなる。)

以下の定義が議論の基礎となる。

1. $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
2. $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \land (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A))$
   $A = B \Leftrightarrow A \subset B \land B \subset A$ と書く方が覚えやすいかな?
3. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

量称記号 $\forall$ を含む命題の証明になる、ことに注意しよう。

例 9.2 (すでに前回説明済み)

集合 A, B, C が $A \subset B$, $B \subset C$ を満たすとき、$A \subset C$ が成り立つことを示せ。
(証明) $A \subset B$, $B \subset C$ を仮定する。
x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ であるから $x \in B$. $B \subset C$ であるから $x \in C$. ゆえに $A \subset C$. □

例 9.3 (すでに前回説明済み)

集合 A, B, C, D が $A \subset B$, $C \subset D$ を満たすとき、$A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。
(証明) $A \subset B$, $C \subset D$ を仮定する。
x を $A \times C$ の任意の要素とすると、ある $a \in A$, $c \in C$ が存在して $x = (a, c)$. $A \subset B$ であるから、$a \in B$. $C \subset D$ であるから $c \in D$. ゆえに
$x = (a, c) \in B \times D$. 従って $A \times C \subset B \times D$. □

包含関係の証明は、こういう感じが多い ($A \subset B$ を示すには「x を A の任意の要素とする」から始める。はしょって「$x \in A$ とする」と書く人も多い)。等式 $A = B$ の証明は、$A \subset B$ と $B \subset A$ の証明をすれば良いが、一気にやれる場合もある (次のスライド)。

宿題の出題ミスについて

似たような問題を複数用意して、授業中に説明するか、宿題に出すか選んでいるのだけど、、、間違えて宿題 7(2) と同じ問題を 6 月 7 日の授業中に説明してしまった。

本当は次の問題を宿題 7 で出すべきだった。

問　集合 A, B が $A \subset B$ を満たすとき、$B^{\complement} \subset A^{\complement}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　$A \subset B$ を仮定する。x を $B^{\complement}$ の任意の要素とすると、$x \notin B$. このとき実は $x \notin A$ である。もしもそうでないとすると、$x \in A$. 仮定 $A \subset B$ より $x \in B$. これは矛盾であるので、$x \notin A$. すなわち $x \in A^{\complement}$. 以上より $B^{\complement} \subset A^{\complement}$. □

別解

$$\begin{aligned}A \subset B &\Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)\\&\Leftrightarrow \forall x(\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A))\\&\Leftrightarrow \forall x(x \in B^{\complement} \Rightarrow x \in A^{\complement})\\&\Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}.\end{aligned}$$

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ の証明

任意の x に対して

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \land x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \lor x \in B) \land x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \land x \in C) \lor (x \in B \land x \in C) \quad ((p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \lor (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

が成り立つから、$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

ド・モルガン律 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ の証明

任意の x に対して

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^{\complement} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\
&\Leftrightarrow \neg(x \in A \lor x \in B) \\
&\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \land (\neg(x \in B)) \quad (\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q) \\
&\Leftrightarrow (x \in A^{\complement}) \land (x \in B^{\complement}) \\
&\Leftrightarrow x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}
\end{aligned}
$$

が成り立つから、$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$. □

空集合であることの証明は、知らないと戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^{\complement} = \emptyset$ **を示せ。**

証明 1　背理法を用いて証明する。$A \cap A^{\complement} \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して $x \in A \cap A^{\complement}$. ゆえに $x \in A$ かつ $x \in A^{\complement}$. すなわち $x \in A$ かつ $x \notin A$. これは矛盾である。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

証明 2　(本質的には同じことであるが)

$$A \cap A^{\complement} = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \wedge x \in A^{\complement} \right\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}.$$

任意の x に対して $x \in A \wedge x \notin A$ は偽である。言い換えると、条件 $x \in A \wedge x \notin A$ を満たす x は存在しない。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

(このスライドは 6 月 14 日の授業ではカットしました。)
$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad X \cap Y \subset X$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$X \cap Y$ の任意の要素 x に対して、$x \in X$ かつ $x \in Y$ であるから、特に $x \in X$. ゆえに $X \cap Y \subset X$. $\square$

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A$ と仮定する。($\sharp$) より $A \cap B \subset B$ が成り立つので ($X = B$, $Y = A$ とする)、$A \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Leftarrow A \subset B$ の証明

(i) ($\sharp$) により、$A \cap B \subset A$ が成り立つ ($X = A$, $Y = B$ とする)。

(ii) $A \subset B$ と仮定すると、$A \subset A \cap B$ (実際、$x \in A$ とするとき、仮定から $x \in B$ が成り立つので、$x \in A \wedge x \in B$, すなわち $x \in A \cap B$ が成り立つ。).

(i), (ii) から $A \cap B = A$ が成り立つ。 $\square$

次は良く使う (単調な集合列の場合の共通部分と合併)。

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(a) の証明　一般に $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ が成り立つ。これは直観的に明らかに感じる人も多いだろう。次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. 特に ($n = 1$ として) $x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

逆向きの包含関係 $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は次のように示せる。$x \in A_1$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、仮定を用いて

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \quad \text{であるから} \quad A_1 \subset A_n.$$

ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

3.13.1 単調な集合列の場合の合併と共通部分 (続き)

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ **ならば** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ **の証明**

一般に $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_1$ が成り立つ。実際、$x \in A_1$ とすると、$n = 1$ に対して $x \in A_n$. ゆえに $(\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n$ が成立する。ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

一方 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ は次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$x \in A_n$. 仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$. ゆえに $A_n \subset A_1$. ゆえに $x \in A_1$. 従って $\displaystyle\bigcup_{n\in A} A_n \subset A_1$. □

2023/6/14 の授業はここまでです。

3.13.2 前回の例の等式の証明

$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1,1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1,1)$ が成り立つ。以下、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

(i) $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であること: $x \in \{0\}$ とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ であるから $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{0\}$ であること: $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. ゆえに $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $\underline{x = 0}$. ゆえに $x \in \{0\}$.

3.13.2 前回の例の等式の証明 (続き)

$x \in \mathbb{R}$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば $x = 0$ であることの証明を 2 つ与える。

1. アルキメデスの公理「$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」を認めての証明. 背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. ゆえにある自然数 n が存在して $n|x| > 1$. ゆえに $|x| > \frac{1}{n}$. これは $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ に矛盾する。ゆえに $x = 0$.
2. はさみうちの原理と、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を認めての証明: $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理によって $0 \le x \le 0$. ゆえに $x = 0$. $\square$

数列の極限は定義すらしていないので、この講義の立場としては (1) を推奨する。

アルキメデスの公理も本当は証明が必要であるが、ここでは認めることにする。実は、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ の証明をするために (普通) 使われる。

参考文献