

数理リテラシー 第11回

～ 写像 (1) ～

桂田 祐史

2023年6月28日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 写像
 - はじめに
 - 写像の定義
 - 定義についての注意
 - 写像の例
 - 高校数学の関数
 - Dirichlet の関数, 多角形の面積
 - 1 次変換
 - 恒等写像, 包含写像
 - 射影
 - 定値写像
 - 特性関数
 - 微分
 - 数列
 - 練習 値域を求める
 - 合成写像
 - 定義
 - 写像の合成についての結合律
- 3 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 本日の講義内容: いよいよ最終第III部「写像」に入ります。
- 中間試験の採点終わりましたが、風邪気味で見直し作業が済んでいないので、フィードバックは少し遅れます。現時点で解答例はWWWで公開していて、採点終了次第、良くあった間違い例などについての説明を追加します。フィードバックは早めにチェックして質問があればして下さい。
- 宿題8を出します。×切は7月3日(月曜)13:30です。

本日の内容&連絡事項

- 反省は個人ですべき。平均とかはあまり気にしないで、自分はどうすれば良かったか、期末試験にどうのぞむか、考えること。
- その上で全体の出来を少し話す。140点満点(4が40点で他は20点)で平均74.3点(大体例年並)。半分の得点率はショック、となる必要はない。期末ではもっとできるようなろう、と作戦を練るべき。
- 問題ごとの平均点は、14.1, 13.7, 7.3, 20.9, 9.5, 8.9. 第3問(零点という人もいる)をのぞき、得点率は単調減少。前が高め、後ろが半分弱。
- 普通早く習ったことの成績は良い(まだ忘れないので)。期末では、今回の試験範囲の出来は上がって、新しいのは出来が悪い、となるのが普通。
- 証明は苦手な人が多いががんばっている印象。今後もあきらめないで下さい。
注意: 自己流を通そうとする人がいるけれど改めること。 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を持ち出したり(そんなの定義していないので空論)、図の説明ですませようとしたたり(図による説明は証明にならないと言ってある)。
- 宿題で注意されたことが改められていない、という人が少数いる雰囲気。フィードバックを無視する姿勢は改めよう。
- $\forall x$ を見たら「 x を任意の \square とする」と書こうとか、 $A \subset B$ を証明するには、「 x を A の任意の要素とする」と書き出そう、とか。

4 写像 (mapping, map) 4.1 はじめに

写像とは 関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

において、 x と y が数でないものも扱うことにして、それを^{しゃぞう}写像と呼ぶ、ということ。

「関数は写像である」は正しい。

「数列は写像である」も正しい。

(関数と写像を区別しないで) すべての写像を関数と呼ぶ人、テキストもある。この講義ではそうしない(関数は写像であるが、写像の中には関数でないものもある、という立場)。

変数が数ベクトル、値が数ベクトルの写像を関数ということは割と多い(数ベクトルは数みたいなもんだ、と思ってる?)。

4.2 写像の定義

定義 11.1 (写像)

X と Y は集合とする。 X の任意の要素 x に対して、 Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、 f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。 $f(x)$ を x の **f による像** (the image of x under f)、あるいは **f の x における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では “ f of x ” と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことができるが、 **$f: x \mapsto y$** と表すこともある。

X を f の**定義域** (the domain of definition of f , the domain of f) と呼ぶ。

この講義では、 Y を **f の終域** と呼ぶことにする (英語では codomain と呼ばれたりするが、定着した訳語がない)。

集合

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$$

を写像 f の**値域** (the range of f)、 **f による X の像** と呼ぶ。

4.2 写像の定義 4.2.1 定義についての注意

注1 以上は実はユルイ定義で、厳密な定義 ($X \times Y$ の部分集合としてグラフを定義して、写像とはグラフである、と定める) は後で行う。

注2 実は Y に名前をつけないテキストが多い。特に和書。教科書 (中島 [1]) では「レンジ」を採用しているが、実はちょっと変わっている。真似をしない方が良いかも。range の訳語のつもりだろうけれど、それは普通「値域」と訳され、後の $f(X)$ の意味であることが多い (高校の数学でもそういう意味である)。

注3 定義域、値域は高校でも出て来たが、値の範囲ということで、答は不等式で書くのが普通であった。上の $X, Y, f(X)$ は集合である！

例 11.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である、とみなせる。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。明記しない場合は、変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を f の定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

$f(x) = x + 2$ の場合、すべての実数 x に対して、 $x + 2$ が意味を持つので、 \mathbb{R} が f の定義域である。

$f(x) = \frac{1}{x}$ の場合は、 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が f の定義域である。

$f(x) = \sqrt{x}$ の場合は、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ が f の定義域である。

例 11.3 (Dirichlet の関数)

写像 $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。例えば $D(1) = 1$, $D(1/2) = 1$, $D(\sqrt{2}) = 0$, $D(\pi) = 0$ 。

D を ディリクレ **Dirichlet の関数** と呼ぶ。(歴史上、関数概念を見直す大きな契機となったことで有名な関数である。)

例 11.4 (多角形の面積)

$X :=$ 平面内の多角形全体の集合, $Y := \mathbb{R}$, $f(A) := A$ の面積, として、 $f: X \rightarrow Y$ が定まる。

$f(A)$ を具体的に式で書けなくても、写像 (関数) とみなす。 □

例 11.5 (\mathbb{R}^2 の1次変換)

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とするとき、 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を以下のように定める。
 $f(x, y) = (x', y')$ として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした f を \mathbb{R}^2 の **1次変換** という。 $ad - bc \neq 0$ のとき、 f は、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に)、平面全体を平面全体に写す。合同な1次変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。

例 11.6 (恒等写像)

X は空集合でない集合とする。写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ を

$$\text{id}_X(x) = x \quad (x \in X)$$

で定める。 id_X を X の**恒等写像** (the identity map of X) と呼ぶ。
恒等写像というのは、集合ごとに1つ定まるものである。

例 11.7 (包含写像)

$X \subset Y$ のとき、 $i: X \rightarrow Y$ を $i(x) = x$ ($x \in X$) で定める。この i を

ほうがんしゃぞう

包含写像 (the inclusion map) と呼ぶ。 i の代わりに ι と書くことも多い
(ギリシャ文字のイオタ)。

例 11.8 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ を $\text{pr}_X((x, y)) = x \ ((x, y) \in X \times Y)$,

$\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ を $\text{pr}_Y((x, y)) = y \ ((x, y) \in X \times Y)$

で定める。

それぞれ X への射影、 Y への射影と呼ぶ。

例 11.9 (定値写像)

X, Y は空でない集合で、 $c \in Y$ とするとき、 $f: X \rightarrow Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。

例 11.10 (特性関数)

X は空でない集合、 $A \subset X$ とするとき、 $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の**特性関数** (the characteristic function of A) または**指示関数** (the indicator function of A) とよぶ。

(**定義関数**と呼ぶ人もいる。確率論では、Fourier 変換のことを特性関数と言うので、特性関数というとそのことと誤解する人が多そう。)

Dirichlet の関数 $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $\chi_{\mathbb{Q}}$ である。

χ はギリシャ文字で、カイ (あるいはキー) と呼ばれる。手で書くとき、英語の x の小文字筆記体と区別しにくい。

例 11.11 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を \mathbb{R} から \mathbb{R} への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。 $X := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D: X \rightarrow Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能である。つまり $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ならば、 $f' \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)

$$D(\sin) = \cos.$$

$$F(x) = x^2, G(x) = 2x \text{ とするとき、 } D(F) = G.$$

例 11.12 (実数列)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(n) = a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) として定まる。

逆に $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、 $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、 \mathbb{N} から \mathbb{R} への写像に他ならない。**

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

4.4 練習 値域を求める (1)

写像 $f: X \rightarrow Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1 以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- Ⓐ 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- Ⓑ 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

$$(1) f_1(x) = x^2 - 3x + 4 \quad (2) f_2(x) = x + \frac{1}{x} \quad (3) f_3(x) = \sin x$$
$$(4) f_4(x) = \sqrt{x}$$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$. (b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \{x^2 - 3x + 4 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (b) $y = f_2(x)$ のグラフは...

$$f_2(X) = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$. (b) $f_3(X) = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. (b) $f_4(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.



4.4 練習 値域を求める (2)

例題 2 次の各写像の値域を求めよ。

- ① Dirichlet の関数 $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
- ② 正則な 1 次変換 $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$)
- ③ 恒等写像 集合 $X (\neq \emptyset)$ に対して、 $\text{id}_X: X \rightarrow X$, $\text{id}_X(x) = x$ ($x \in X$)
- ④ 微分 $D: C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ ($f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$) ただし f' は f の導関数とする。

解答 ((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになるろう。(4) は…)

- ① $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
- ② $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. (\because 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
- ③ $\text{id}_X(X)$ 出来るようになるろう
- ④ $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. (\because 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ に対して、 $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ とおくと、 $F' = f$ かつ F は無限回微分可能 ($F \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$) であるから、 $D(F) = f$. ゆえに $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) \supset C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)

4.5 合成写像 4.5.1 定義

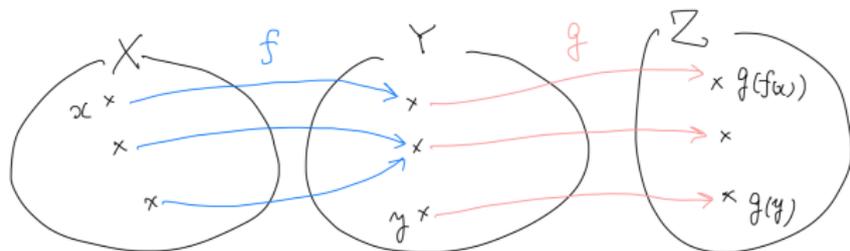
定義 11.13 (合成写像)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とするとき

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で写像 $h: X \rightarrow Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、 $g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (x \in X),$$



4.5.1 定義 細かい注意

実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

定義 11.14 (合成写像の別の定義)

$f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Z, f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h: X \rightarrow Z, \quad h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、 $Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。 $Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、 $g(f(x))$ が意味を持つので h が定義できる。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 11.15 (写像の合成についての結合律)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？ **写像が等しいとはどういうことか。**

証明 $g \circ f: X \rightarrow Z$ で、 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ($x \in X$) である。ゆえに $h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

一方、 $h \circ g: Y \rightarrow W$ で、 $(h \circ g)(y) = h(g(y))$ ($y \in Y$) である。ゆえに $(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

ゆえに、 $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. \square

参考文献

- [1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).