

数理リテラシー 第14回

～写像(4)～

桂田 祐史

2023年7月19日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 写像 (続き)
 - 単射, 全射, 全単射 (続き)
 - 単射, 全射, 全単射の合成
 - 逆写像
 - 逆写像の定義
 - 逆関数の例を思い出す
 - 逆行列の話と比べてみよう
 - 逆写像の一意性
 - 全単射 \Leftrightarrow 逆写像存在
 - $(f^{-1})^{-1} = f, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
 - $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
 - 写像による集合の像と逆像
 - 定義と記号
 - 写像による集合の像と逆像の例
 - 集合の演算との関係
- 3 補足 (注意事項)
 - 写像は式ではない
 - 写像の制限
 - 集合の書き方の間違い

本日の内容&連絡事項

- この授業のアンケートに回答して下さい (Oh-o! Meiji)。改善意見のようなのを書いてくれると嬉しい。
- 期末試験: 7月26日(水曜) 15:00-17:00 (120分)
試験範囲は、本日の授業で到達したところまで。
- 「やむを得ない理由で定期試験を欠席した者」は特別試験の受験申請ができます。
「総合数理学部 2023年度春学期定期試験のお知らせ」を見て下さい。
締切があるので、該当する人は、迅速に行動して下さい。
- 本日の講義内容: まず切りの良いところまで進めて(逆写像まではきれいに終わらせたい。写像による集合の像と逆像の定義は説明したい。例が出来るかどうか…)、それから宿題10(問10)の解説。
宿題は今日中にフィードバックします。また宿題解答PDFも今日中に公開します。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成

次の定理は基本的である。時間がないときは、(6) 以降は後回しで良い (教科書である中島 [1] はとても詳しい)。

定理 13.1 (単射, 全射, 全単射の合成)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とする。

- ① f と g が単射ならば、 $g \circ f$ は単射である。
- ② f と g が全射ならば、 $g \circ f$ は全射である。
- ③ f と g が全単射ならば、 $g \circ f$ は全単射である。

- ④ $g \circ f$ が単射ならば、 f は単射である。
- ⑤ $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射である。

- ⑥ $g \circ f$ が単射でも、 g は単射とは限らない。
- ⑦ $g \circ f$ が全射でも、 f が全射とは限らない。

- ⑧ $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば、 g は単射である。
- ⑨ $g \circ f$ が全射かつ g が単射ならば、 f は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 1

(最初に全般的な注意: 証明のやり方は一通りでない。 $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ と $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ のどちらを示す、とか。)

まず (1), (2) を図に描いて説明する。それから文章で説明する。

- ① f と g が単射と仮定する。 x, x' を X の任意の要素とする。 $x \neq x'$ と仮定すると、 f が単射であるから $f(x) \neq f(x')$ 。 また g が単射であるから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ 。 すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。 ゆえに $g \circ f$ は単射である。
- ② f と g が全射と仮定する。 任意の $z \in Z$ に対して、 g が全射であることから、 $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。 また f が全射であることから、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。 このとき、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

ゆえに $g \circ f$ は全射である。

- ③ f と g が全単射と仮定する。 $g \circ f$ は (1) から単射、 (2) から全射であるので、全単射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 2

- ④ $g \circ f$ が単射と仮定する。 x, x' を X の任意の要素とする。
 $f(x) = f(x')$ と仮定すると、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$$

であるから $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、 $x = x'$.
($f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ が示せたので) ゆえに f は単射である。

- ⑤ $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、 $z = g \circ f(x)$ が成り立つ。このとき、 $y := f(x)$ とおくと、
 $y \in Y$ であり、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに g は全射である。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 3 (おまけ)

- ⑥ $X = \{1\}$, $Y = \{-1, 1\}$, $Z = \{1\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を定めると、 $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(1) = 1$ である。 $g \circ f$ は単射であるが、 g は単射でない。
- ⑦ (6) と同じ写像が反例となる。 $g \circ f$ は全射であるが、 f は全射でない。

4.6.3 単射, 全射, 全単射の合成 証明 パート 4 (おまけ)

(このページは授業ではカットする。教科書 (中島 [1]) にはもっと書いてあるけれど…)

- ⑧ $g \circ f$ が単射かつ f は全射と仮定する。 $y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。 f が全射であるから、 $f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。 $y \neq y'$ であるから、 $x \neq x'$ である。 $g \circ f$ が単射であるから、 $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. これから

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g(f(x')) = g(y').$$

ゆえに g は単射である。

- ⑨ $g \circ f$ が全射かつ g は単射と仮定する。 任意の $y \in Y$ に対して、 $z = g(y)$ とおくと、 $z \in Z$ である。 $g \circ f$ が全射であるから、 $g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。 このとき、 $g(f(x)) = z = g(y)$ であるが、 g が単射であるから、 $f(x) = y$. ゆえに f は全射である。 □

4.7 逆写像 4.7.1 逆写像の定義

逆関数の概念は、写像にも拡張される。まずは定義をしよう。

定義 13.2 (逆写像)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 g が f の逆写像 (the inverse mapping of f) であるとは

$$(1) \quad g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y$$

を満たすことをいう。

逆写像は無条件では存在しない。 f の逆写像が存在するためには、 f が全単射であることが必要十分である (後で証明する)。

4.7.2 逆関数の例を思い出す

X, Y を共に $[0, \infty)$ として、 $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = x^2$ ($x \in X$) で定義する。

f は全射である。すなわち、任意の $y \in Y = [0, \infty)$ に対して、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X = [0, \infty)$ が存在する (証明 (i) ($\sqrt{\quad}$ を知っている場合) $x := \sqrt{y}$ とおくと $x \in X$ かつ $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$. あるいは (ii) ($\sqrt{\quad}$ を知らない場合) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と中間値の定理を用いる。)

また f は単射である。実際、 $f'(x) = 2x > 0$ ($x > 0$) であるから、 f は $X = [0, \infty)$ 全体で狭義単調増加であり、 f は単射である。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ はただ一つ存在する (もちろん $x = \sqrt{y}$ である)。その x を $g(y)$ として、関数 $g: Y \rightarrow X$ が定まる。これを f の逆関数と呼ぶのであった。

この定義から、任意の $y \in Y$ に対して、 $x := g(y)$ とおくと、 $f(x) = y$. ゆえに $f(g(y)) = f(x) = y$. したがって $f \circ g = \text{id}_Y$.

一方、任意の $x \in X$ に対して $y := f(x)$ とおくと、やはり g の定義から $g(y) = x$. ゆえに $g(f(x)) = g(y) = x$. ゆえに $g \circ f = \text{id}_X$.

4.7.2 逆関数の例を思い出す

以上の議論は

- $f(x) = e^x$ と $g(y) = \log y$
- $f(x) = \tan x$ ($x \in (-\pi/2, \pi/2)$) と $g(y) = \tan^{-1} y$ (主値)

について、ほとんど同様に成り立つ。

この議論はさらに一般化できる、という話を以下で見る。

4.7.3 逆行列の話と比べてみよう

これからする話は、線形代数で聞いた話とよく似ている、と思うかもしれない。それで先回りして説明しておく。

n 次実正方行列 A に対して、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^n$) で定義できる。このとき、次のことが成り立つ。

- A の逆行列は存在するならば 1 つしかない。(それを A^{-1} で表す。)
- f が全単射 $\Leftrightarrow A$ の逆行列が存在する。
- A の逆行列が存在するならば $(A^{-1})^{-1} = A$ 。
- A, B がともに逆行列を持つならば $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 。

以上のことは、まだ教わっていないかもしれないけれど、そのうちに教わるはず。この話と同じようなことが逆写像についても成り立つ。

以下 3 枚のスライドで一気に証明する。

4.7.4 逆写像の一意性

命題 13.3 (逆写像の一意性)

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像は存在すれば1つしかない。

証明 $g, g': Y \rightarrow X$ が

$$g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y, \quad g' \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g' = \text{id}_Y$$

を満たすとする。これらのことと、結合法則から

$$g' = g' \circ \text{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

ゆえに $g' = g$. □

定義 13.4 (逆写像の記号)

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 f^{-1} で表す。

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ であり

$$(2) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

4.7.5 全単射 \Leftrightarrow 逆写像存在

命題 13.5 (逆写像が存在 \Leftrightarrow 全単射)

- ① $f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するならば、 f は全単射である。
- ② $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば f の逆写像が存在する。

証明 (1) 宿題にしようかな。

(2) f は全射だから、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$. このような $x \in X$ はただ1つしかない。実際 $x, x' \in X$ かつ $y = f(x)$ かつ $y = f(x')$ とすると、 $f(x) = f(x')$ であり、 f が単射であるから $x = x'$.

$g: Y \rightarrow X$ を $g(y) = x$ (x は $x \in X \wedge f(x) = y$ を満たす) で定めると、 $g = f^{-1}$. 実際

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \wedge \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

が成り立つ。その証明は3枚前の前のスライド「後のために逆関数の例を思い出して予告」の議論と同じである。ゆえに g は f の逆写像である。□

4.7.6 $(f^{-1})^{-1} = f, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

命題 13.6 (逆写像の逆写像は元の写像, 合成写像の逆写像)

- ① $f: X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、 $(f^{-1})^{-1} = f$.
- ② $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ の逆写像がともに存在するならば、 $f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像である: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

証明 (1) $g := f^{-1}$ とおくと、 $g: Y \rightarrow X$ かつ

$$g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y.$$

ゆえに f は g の逆写像である。ゆえに $f = g^{-1} = (f^{-1})^{-1}$.

(2) 逆写像の定義の条件を確かめる。

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= \left((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g \right) \circ f = \left(f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \right) \circ f \\ &= (f^{-1} \circ \text{id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= \left((g \circ f) \circ f^{-1} \right) \circ g^{-1} = \left(g \circ (f \circ f^{-1}) \right) \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \text{id}_X) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z. \end{aligned}$$

ゆえに $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

4.7.7 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

次の関係はしばしば用いる。

命題 13.7

$f: X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するとき、任意の $x \in X$, 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

証明

(\Rightarrow) $y = f(x)$ ならば

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = \text{id}_X(x) = x.$$

(\Leftarrow) $x = f^{-1}(y)$ ならば

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = \text{id}_Y(y) = y. \quad \square$$

Cf. 行列とベクトルの話では、 $y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y$.

定義 13.8 (写像による集合の像と逆像)

$f: X \rightarrow Y$ とする。

- ① $A \subset X$ に対して

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \quad (= \{y \mid (\exists x \in A)y = f(x)\})$$

を f による A の (順) 像 (the (direct) image of A under f) と呼ぶ。

特に f による X の像 $f(X)$ (f の値域とも呼ぶことにしてある) のことは、 f の像 (the image of f) とも呼び、 $\text{Image}(f)$ とも表す。

- ② $B \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を f による B の逆像 (the inverse image of B under f) あるいは原像 (preimage) と呼ぶ。

4.8.1 定義と記号

注意 実は順像、逆像を表す記号には色々ある (そうだ)。

	順像の記号	逆像の記号
この講義	$f(A)$	$f^{-1}(B)$
教科書 ([1])	$f_*(A)$	$f^*(B)$
	$f[A]$	$f^{-1}[B]$
	$f^{\rightarrow}(A),$	$f^{\leftarrow}(B)$

注意 f の逆写像 f^{-1} が存在するとき、 $B \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(B)$ という記号には、次の2つの解釈がある。

- a) f による B の逆像
- b) f^{-1} による B の像

実はどちらの解釈でも同じ集合を表す。

4.8.2 写像による集合の像と逆像の例

例 13.9

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ とするとき

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1\}\} \\ &= \{f(x) \mid x = 1\} \\ &= \{f(1)\} = \{1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{-2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{-2\}\} \\ &= \{f(x) \mid x = -2\} \\ &= \{f(-2)\} = \{4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\{1, -2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1, -2\}\} \\ &= \{f(x) \mid x = 1 \vee x = -2\} \\ &= \{f(1), f(-2)\} = \{1, 4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([-2, 1]) &= \{f(x) \mid x \in [-2, 1]\} \\ &= \{f(x) \mid -2 \leq x \leq 1\} \\ &= \{y \mid 0 \leq y \leq 4\}, \end{aligned}$$

$$f(\emptyset) = \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset.$$

4.8.2 写像による集合の像と逆像の例

例 13.10

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ とするとき

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{3\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\} \\ &= \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2\} \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-2, 3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2, 3\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2 \vee f(x) = 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2 \vee x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([-2, 3]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2, 3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq f(x) \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x^2 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}, \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset.$$

4.8.3 集合の演算との関係

集合の演算 (\cap , \cup , \setminus) と、写像による集合の像・逆像の関係はしばしば必要になる。基本的な定理を紹介する (しかし、これもキリがないので、あまり神経質にならないこと。)。

証明のために以下のことはすぐ思い出せるようにしておこう。

$f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。

$$y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) \quad y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in X \quad \wedge \quad f(x) \in B.$$

逆像に関する公式は覚えるのも、証明するのも簡単である。次のスライドで、それから始めよう。

命題 13.11 (写像による集合の逆像)

$f: X \rightarrow Y$ とする。また $B_1, B_2, B \subset Y$ とするとき、次が成り立つ。

- ① $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- ② $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- ③ $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- ④ $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

証明

- ① $B_1 \subset B_2$ を仮定する。
 $x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、 $x \in X \wedge f(x) \in B_1$.
 仮定より $f(x) \in B_2$.
 ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$.
 ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

再掲

$$(2) f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

$$(3) f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

② 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow ((f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

③ (2) の証明中の \cap を \cup に置き換えれば (3) の証明になる。

4.8.3 集合の演算との関係 逆像についての公式 (続き)

再掲

$$(4) f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2). \text{ 特に } f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

④ 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \wedge (\neg(f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (\neg(x \in f^{-1}(B_2))) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

であるから $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

一般に $f^{-1}(Y) = X$ が成り立つので

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^c.$$

4.8.3 集合の演算との関係 順像についての公式

命題 13.12

$f: X \rightarrow Y$ とする。また $A_1, A_2, A \subset X$ とするとき、次が成り立つ。

- ① $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
- ② $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. (等号は一般には成り立たない。)
- ③ $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- ④ $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$. (等号は一般には成り立たない。)

証明

- ① $A_1 \subset A_2$ を仮定する。 $y \in f(A_1)$ とすると、ある $x \in A_1$ が存在して $y = f(x)$ 。仮定より $x \in A_2$ であるから、 $y \in f(A_2)$ 。ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$ 。
- ② $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $y = f(x)$ 。
 $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ が成り立つ。 $x \in A_1$ より $y \in f(A_1)$ 。また $x \in A_2$ より $y \in f(A_2)$ 。ゆえに $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ 。ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ 。((1) を用いた別証もある。)

4.8.3 集合の演算との関係 順像についての公式 (続き)

再掲 (2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(2) の別証明

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ であるから、(1) を用いて、 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$.

同様に $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.

ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の証明 ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ を用いる)

Ⓐ $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする。ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して、 $y = f(x)$.
 $x \in A_1$ または $x \in A_2$ が成り立つ。

$x \in A_1$ のときは $y \in f(A_1)$. $x \in A_2$ のときは $y \in f(A_2)$.

ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$. すなわち $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

Ⓑ $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ であるから ((1) を用いて)、 $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(a), (b) から $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

4.8.3 集合の演算との関係 順像についての公式 (続き)

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の別証明 ($\exists x P_1(x) \vee P_2(x) \equiv (\exists x P_1(x)) \vee (\exists x P_2(x))$ に気づけば、次のように一気に証明できる。)

$$\begin{aligned}y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x (x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\&\Leftrightarrow \exists x ((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\&\Leftrightarrow \exists x ((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\&\Leftrightarrow (\exists x (x \in A_1 \wedge y = f(x))) \vee (\exists x (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).\end{aligned}$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(4) の証明

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、 $y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$.

$y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1) y = f(x)$.

実は $x \notin A_2$. 実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。

ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、 $y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

5 補足 (注意事項) 5.1 写像は式ではない

写像は式ではない。異なる式で同じ写像が定義されたりする。教科書 [1] の例。

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ のとき、 X から Y への写像をすべて求める。

次の $2^3 = 8$ 個の写像 f_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) がある。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	$f_j(3)$
1	4	4	4
2	4	4	5
3	4	5	4
4	4	5	5
5	5	4	4
6	5	4	5
7	5	5	4
8	5	5	5

X の各要素 1, 2, 3 が Y のどの要素に対応するか決めれば、写像が定まる。

$g(x) = \max\{x + 2, 4\}$, $h(x) = \left\lceil \frac{x+7}{2} \right\rceil$ で $g: X \rightarrow Y$, $h: X \rightarrow Y$ を定めると

$$g(1) = \max\{1 + 2, 4\} = 4, \quad g(2) = \max\{2 + 2, 4\} = 4, \quad g(3) = \max\{3 + 2, 4\} = 5.$$

$$h(1) = \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil = [4] = 4, \quad h(2) = \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = [4.5] = 4, \quad h(3) = \left\lceil \frac{10}{2} \right\rceil = [5] = 5.$$

f_2, g, h はみな等しい: $f_2 = g = h$.

$g(x)$ と $h(x)$ の式は違うが、 $g = h$. f_2 はそもそも $f_2(x)$ を式で与えていない。

5.2 写像の制限

$f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$ とするとき、 $g: A \rightarrow Y$ を $g(x) = f(x)$ ($x \in A$) で定義することがしばしばある。

この g を f の A への**制限**と呼び、 $f|_A$ という記号で表す。

同時に終域の方も $f(A) \subset B \subset Y$ を満たす B で置き換える、つまり $g: A \rightarrow B$, $g(x) = f(x)$ ($x \in A$) とすることが多い。これも f の A への制限と呼ぶ。 $B = f(A)$ とすると、 g は全射になることに注意しよう。

特に g が単射である場合、 g は全単射になり、 g^{-1} が存在する。

5.3 集合の書き方の間違い

f の値域や、 g の定義域、終域を書くときにイエロー (あるいはレッド) カードを出される人が多い。

$(x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0)$ というのがあったけれど、これは $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ のつもりだろう。聞き飽きたかもしれないけれど、集合のカッコは $\{ \}$ である。 $\{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ とする人もいるが、(気持ちは分からないでもないけれど) そういう集合の書き方はない。

基本は $\{x \mid P(x)\}$ や $\{x \in A \mid P(x)\}$ というフォーマットである。

f の値域を求めよ、という問の答えを

$$(＃) \quad Y = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} \quad (\text{これはマズイ})$$

のように書く人が少数いるが、 \mid の左に $f(x)$ のように複雑な式を書くと、意味不明瞭となる、 $[0, \infty)$ という意味にするには、例えば

$$(b) \quad Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

と書くべきである。(b) を意味するつもりで (＃) と書くことはできない。

$\{f(x) \mid P(x)\}$ という書き方はあって、それにちょっと似ているように感じるかもしれないが、違う、と分かってもらいたい。

5.4 量称を含む命題の証明

量称を含む命題の証明については、授業で、

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

という説明をしたけれど、無視したような答案を書く人が結構いた。

例えば、

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Q}) \quad xy = 1$$

の証明で次のような答案がよくある。

—— 真似してはいけない解答例 ——

$y = \frac{1}{x}$ とすると、任意の自然数 x に対して、 $y \in \mathbb{Q}$ であり、かつ

$$xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \therefore \quad xy = 1.$$

次のようにして下さい (まず x の紹介をする, 話はそれから)。

x を任意の自然数とする。 $y = \frac{1}{x}$ とおくと、 $y \in \mathbb{Q}$. また $xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ であるから $xy = 1$. □

参考文献

- [1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).