2019 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2019 年 7 月 24 日 (水曜) 9:30〜11:30 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

1.　次の各文を記号のみで表せ (p, q は命題、e は自然対数の底、A, B は集合、$f\colon X \to Y$ は写像とする)。
(1) -1 は自然数ではないが整数であり、e は有理数ではないが実数である。　(2) 「p ならば q」は「p でないか、または q である」と同値である。　(3) ある複素数 z が存在して、任意の複素数 w に対して $zw = 1$ が成り立つ。　(4) 「A と B の積集合が空集合である」は「A が B の補集合の部分集合である」と同値である。
(5) x が B の f による逆像に含まれれば $f(x)$ は B に含まれる。

2.　(1) 命題論理のド・モルガン律 $\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$, $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p) \land (\neg q)$ を、真理値表を書くことによって証明せよ。　(2) 「$p \Rightarrow q$」の対偶とは何か説明し、「p ならば q」とその対偶が同値であることを示せ。証明の仕方は自分で選んで良い。

3.　次の各命題を日本語で表し (数式の部分は数式のままで良い)、真である場合はそれを証明し、偽である場合はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 論理式で書いて証明せよ。
(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$　(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x \ge y^2$

4.　(1) 以下の言葉 ((d)〜(g) は 2 つの集合に関するもの) の定義を (式を用いて) 述べよ 。
(a) 部分集合　(b) 冪集合　(c) 補集合　(d) 積集合　(e) 和集合　(f) 差集合　(g) 直積集合
(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q, r\}$ とするとき、$A \times B$, 2^A を求めよ (要素を全て書き並べる方法で表せ)。
(3) 次の各命題の真偽を述べよ (証明は不要)。(a) $\emptyset \in \emptyset$　(b) $\emptyset \subset \emptyset$　(c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$　(d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

5.　A, B が全体集合 X の部分集合とするとき、次の (1), (2), (3) を証明せよ。
(1) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$.　(2) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.　(3) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B$.

6.　(1) $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。　(2) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ を満たすとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つことを示せ。　(3) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ を満たすとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ を成り立つことを示せ。

7.　アルキメデスの公理 $(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$ を用いて、以下の各命題を証明せよ。
(1) $(\forall x > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ \dfrac{1}{n} < x$　(2) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$. (ただし $\left[0, \dfrac{1}{n}\right] = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \le y \le \dfrac{1}{n} \right\}$.)

8.　$f\colon X \to Y$ とする。(1) X の部分集合 A の f による像 $f(A)$, Y の部分集合 B の f による逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。　(2) X は空でない集合、$A \subset X$, $Y = \mathbb{R}$ として、次式で f を定めるとき $f(X)$ を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in X \setminus A \text{ のとき}). \end{cases}$$

(3) $X = f^{-1}(Y)$ が成り立つことを示せ。

9.　(1) 写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるとはどういうことか、定義を述べよ。また単射な写像の例をあげ、単射である根拠を述べよ。　(2) 写像 $f\colon X \to Y$ が全射であるとはどういうことか、定義を述べよ。また全射な写像の例をあげ、全射である根拠を述べよ。　(3) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の (a), (b) を証明し、(c) の反例を書け。
(a) f と g が単射であれば、$g \circ f$ は単射である。 (b) $g \circ f$ が単射であれば、 f は単射である。
(c) $g \circ f$ が単射であれば、 g は単射である。

(採点をしているときは、目の前にいない相手に色々言いたくなるのだ。)

言葉を大切にしよう。

理解するため、勘違いを解くために役立つこと、色々伝えようと工夫している。学生は覚えるべきことが多いから、大変だろうと想像するけれど、こちらが何度も繰り返し言っていることは重要だと理解してマスターすべきだ。(本当は、たとえ一度しか言われなくても、「どうもこれは大事そうだ」と自分で感じ取れるようになるべきだ。)

さて、桂田センセが何度も言ったことには、どういうのがあったっけ？

以上は「人の話は聞きなさい」という説教だけれど、言葉というのは、他人との間で情報のやり取りをするための道具というだけでなく、実は自分 (一人) で考えるための道具でもある。

ものすごく大雑把に言うと、思考 ≒ 文章、である。

高校卒業したての人の多くは、数学は式だけ使ってやるものと考えているかもしれない。それは大きな誤解で、それを解かないと先に進めない。式も言葉のうち、文章の構成要素だけれど、式だけを取り出しても文章 (思考) にはならない。

解答と解説

1. (1) $-1 \notin \mathbb{N} \wedge -1 \in \mathbb{Z} \wedge e \notin \mathbb{Q} \wedge e \in \mathbb{R}$ (2) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ (3) $(\exists z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C})\ zw = 1$ (4) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$ (5) $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B$

解説

2.

(1) 真理値表は

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T	T	F	T

となる。(左から) 4 列目と 7 列目の真偽が一致するので、$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$. 8 列目と 10 列目の真偽が一致するので、$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

(2) $p \Rightarrow q$ の対偶とは $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ のことをいう。一般に $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ であるから

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q.$$

ゆえに $(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$. ■

解説 (1) は良く出来ていた。対偶については、証明はともかく、何のことかは高校で習っているので楽勝と考えたけれど、全然そういうことはなかった。非常に驚いた。高校で習っていても出来るとは限らない、ということか。

3.

(1) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」これは真である。

(証明) x を任意の実数とするとき、$y = x - 1$ とおくと、y は実数であり、かつ $x > y$ が成り立つ。■

(2) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x \geq y^2$ が成り立つ。」これは偽である。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x < y^2$. (証明) $x = -1$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ であり、任意の実数 y に対して、$x = -1 < 0 \leq y^2$ であるから $x < y^2$. ■

解説　「$(\forall x)$ で始まる命題の証明は⋯」無視する人多数。「$(\exists x)$ が出て来たら」これはまあまあ。

4.

(1)
- A, B を集合とする。集合 B が集合 A の部分集合であるとは、$\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$ が成り立つことをいい、$B \subset A$ あるいは $A \supset B$ と表す。
- A を集合とする。A の部分集合全体の集合、つまり $2^A := \{B \mid B \subset A\}$ を A の冪集合と呼ぶ。
- A を全体集合 X の部分集合とする。このとき $A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}$ を A の補集合と呼ぶ。
- A, B を集合とする。$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の積集合と呼ぶ。
- A, B を集合とする。$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ を A と B の和集合と呼ぶ。
- A, B を集合とする。$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge \notin B\}$ を A と B の差集合と呼ぶ。
- A, B を集合とする。$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ を A と B の直積集合と呼ぶ。

(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q, r\}$ であるから

$$A \times B = \{(1,p), (1,q), (1,r), (2,p), (2,q), (2,r), (3,p), (3,q), (3,r)\}.$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}.$$

(3) (a) 偽　(b) 真　(c) 真　(d) 真

解説・講評　(1) は、中間試験でもやったわけだけど、出来が良くない人が結構いる。復習しないのかな。

特に (a)「部分集合」の出来が良くない (8 割以上間違えてる — 高校でも習っているはずだが)。「A が B の部分集合であるとは $A \subset B$ であること。」という説明をした人がいて、これは定義になっていないけれど、これに中間点をやりたくなってしまうほど。「$A \subset B$ とはどういうこと？」と聞いたら答えられたかな。証明をするときに使っているように、$(\forall x)$ $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ が成り立つこと、だよね。

例えば (d) で $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ としか書かない人が多いけれど、「を A と B の積集合という」のようなことを書かないと正解にはならない。宿題や中間試験で赤ペン入っているはずだ。特に (c) で「$\{x \mid x \notin A \wedge x \in X\}$」とだけしか書かないと、それが X の補集合なのか、A の補集合なのか分からないよね。(f) で「$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ を A と B の補集合 (何だそれは)」と書いた人もいるし、言わなくてもわかるようなものではなく、きちんと言う必要がある。

集合を表すのに、{ 記号 | 条件 } (もう少し具体的な形で書くと $\{x \mid P(x)\}$) という書き方をすることが多いけれど、それが出来ない人が結構残っている。$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$ とか (もちろん $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ と書くべき)。

特別に $\{f(x) \mid x \in A\}$ のような書き方が許されているせいで (本来は $\{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$ と書くべきもの)、理解が曖昧になってしまうのだろうか。そういえば $f(A) = \{x \in A \mid f(x)\}$ と書いた人もいた (こういうのはすっぱりバツにする)。

5.

(1) 任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c) \cap B^c \end{aligned}$$

であるから $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$.

(2)

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow \neg\,(\exists x(x \in A \cap B)) \Leftrightarrow \neg\,(\exists x(x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow \forall x \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x\,(\neg(x \in A)) \vee (\neg(x \in B)) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg(x \in A)) \vee (x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow A \subset B^c. \end{aligned}$$

(別解) $A\cap B=\emptyset$ を仮定する。任意の $x\in A$ に対して、$x\in B^c$ が成り立つ。($\because$ そうでないとすると、ある x が存在して、$x\in A$ かつ $x\in B$. ゆえに $x\in A\cap B$. これは $A\cap B=\emptyset$ に矛盾する。ゆえに $x\in B^c$.) ゆえに $A\subset B^c$.

逆に $A\subset B^c$ と仮定する。このとき $A\cap B=\emptyset$ が成り立つ。($\because$ そうでないとすると、ある x が存在して、$x\in A\cap B$. すなわち $x\in A$ かつ $x\in B$. $x\in A$ と仮定 $A\subset B^c$ から、$x\in B^c$. これは $x\in B$ と矛盾する。ゆえに $A\cap B=\emptyset$.)

(3) (1), (2) を使うと

$$A\cup B=X\Leftrightarrow(A\cup B)^c=X^c\Leftrightarrow(A^c)\cap(B^c)=\emptyset\Leftrightarrow A^c\subset(B^c)^c\Leftrightarrow A^c\subset B.\blacksquare$$

解説 (1)「集合の等式を証明するには…」というのを何度も言ったけれど、無視する人多数。零点の人多数。その上で、論理のド・モルガン律から、これ (集合のド・モルガン律) が導かれる、というのがこの問題の要点。例年と比べてとても出来が悪くてショックを受けている。$\Leftrightarrow$ の左側が $(A\cup B)^c$ と集合になっていたり、$x\in(\neg A)$ と書いてあったり (集合 A の否定 $\neg A$ とは何だろう)。同じような間違いが多数あると言うのは、おかしな解答が出回ったのかなあ??

この問題 5 は、宿題 7(3) を一歩一歩ていねいに解答するという趣旨の問題である。宿題 7(3) の答案に、上の (3) の解答に書いたようなことを書く人が非常に多くて (20 人近い？)、(2) に相当することを無断で使っているから (「これはなぜ？」というツッコミを赤ペンで書いた)、それを事前に証明するような問題にしてみた。今回 (3) のようなことを書いた人はほとんどいなかった。何で？宿題の復習をしないのかな。

講義ノートでは、(2) と (3) の内容を一つの定理にしていて、(2) を (3) の証明に使う、ということをしている。講義ノートで (3) を見つけて、それを宿題に書いてみた、けどそれは忘れた、ということなのかな。

そうそう。「ゆえに p が成り立つ。すなわち (僕は「ゆえに」の方が好きだけど) q が成り立つ。」というように書くべきところを「$p\Leftrightarrow q$」としか書かない人がいた。これは普通は「p と q は同値」と読むんじゃないの。「ゆえに p が成り立つ。」と言い切らないとダメだ。その上で「p と q は同値だから、q が成り立つ。」と続ける。こちらは分かっているから、「$p\Leftrightarrow q$」の意図を汲むことは出来るけれど、分かっていない人に伝える文章としては非常にまずい。

6.

(1)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{x\mid(\exists n\in\mathbb{N})x\in A_n\},\quad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{x\mid(\forall n\in\mathbb{N})x\in A_n\}.$$

(2) (a) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset A_1$ であること。$x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ とすると、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$x\in A_n$. 特に $n=1$ として $x\in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset A_1$.

(b) $A_1\subset\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ であること。$x\in A_1$ とする。任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、仮定から $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n$. ゆえに $x\in A_n$. ゆえに $x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$. ゆえに $A_1\subset\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$

以上より $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1$.

(3) (a) $A_1\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ であること。$x\in A_1$ とすると、$n=1$ に対して $x\in A_n$ かつ $n\in\mathbb{N}$ であるから $x\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. ゆえに $A_1\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset A_1$ であること。$x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ とすると、ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $x\in A_n$. 仮定より $A_n\subset A_{n-1}\subset\cdots\subset A_1$ であるから、$x\in A_1$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset A_1$.

以上より $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1$. $\blacksquare$

7.

(1) 任意の正の数 x に対して、アルキメデスの公理より ($a = x$, $b = 1$ として)、ある自然数 n が存在して、$nx > 1$. $n > 0$ であるから $x > \frac{1}{n}$.

(2) $x \in \{0\}$ とすると、$x = 0$. 任意の自然数 n に対して、$\frac{1}{n} > 0$ であるから、$0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. すなわち $x \in [0, 1/n]$. ゆえに $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1/n]$.

逆に、$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right]$ とすると、任意の自然数 n に対して、$x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. すなわち $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. したがって、まず $x \geq 0$ であることが分かる。$x = 0$ を証明するため、背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$x > 0$. (1) から、ある自然数 n^* が存在して $x > \frac{1}{n^*}$. これは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ であることに矛盾する。ゆえに $x = 0$. ゆえに $x \in \{0\}$.

以上より $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1/n] = \{0\}$. ■

解説 「量称記号を使って書かれた命題の証明をするには…」という教えを無視する人が結構残っている。

8.

(1) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (あるいは $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$).
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

(2) $A = \emptyset$ のとき $f(X) = \{0\}$, $A = X$ のとき $f(X) = \{1\}$, そのどちらでもないとき $f(X) = \{0, 1\}$.

(3) $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ である。ゆえに $x \in f^{-1}(Y)$ ならば $x \in X$ が成り立つ。一方、$x \in X$ とするとき、$f(x) \in Y$ であるから $x \in f^{-1}(Y)$. 以上から $f^{-1}(Y) = X$.

9.

(1) f が単射とは $(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. 単射な写像の例として、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. この f は狭義単調増加であるから単射である。

(2) f が全射とは $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$. 全射な写像の例として、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して、$x = y$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ かつ $f(x) = x = y$ であるから、f は全射である。

(3) (i) f と g が単射と仮定する。$x, x' \in X$ かつ $x \neq x'$ のとき、f が単射であるから、$f(x) \neq f(x')$. g が単射であるから $g\left(f(x)\right) \neq g\left(f(x')\right)$. すなわち $g \circ f(x) \neq g\left(f(x')\right)$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

(ii) $g \circ f$ が単射とする。$x, x' \in X$ かつ $f(x) = f(x')$ とすると、$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから $x = x'$. ゆえに f は単射である。

(iii) $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, \infty))$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^2$ $(y \in \mathbb{R})$ とすると、$g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$. これは競技単調増加関数であるから、$g \circ f$ は単射であるが、g は単射ではない ($x = -1$, $x' = 1$ とすると、$x, x' \in \mathbb{R}$ かつ $x = x'$ かつ $f(x) = f(x')$ が成り立つから)。

解説