# 数理リテラシー練習帳 (工事中)

桂田 祐史

2016 年 8 月 9 日, 2023 年 4 月 3 日

過去問やこれまでの宿題からまとめた。まだ問題の並べ方などおかしな所がある。解答の公開法については思案中。

## 1　良く使う集合

**問 1.** 次の各集合は何を表すか答えよ。
(1) $\mathbb{N}$　(2) $\mathbb{Z}$　(3) $\mathbb{Q}$　(4) $\mathbb{R}$　(5) $\mathbb{C}$

**問 2.** 次の命題の真偽を答えよ。ただし $i$ は虚数単位とする。
(1) $-1 \in \mathbb{N}$　(2) $0 \in \mathbb{Z}$　(3) $\dfrac{1}{7} \in \mathbb{Q}$　(4) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$　(5) $\pi^2 \in \mathbb{R}$　(6) $(1+i)^4 \in \mathbb{R}$

## 2　論理

**問 3.** 次の (1)〜(5) の命題について、その否定を書け。(6) の命題については対偶を書け。
(1) 「(私は) ステレオかテレビを買う」　(2) 「(私は) 学校に行って講義を聞く」　(3) 「夏には雪が降らない」　(4) 「明日晴れたら遠足に行く」　(5) 「砂糖は甘い」　(6) 「のび太は叱られないと勉強しない」

**問 4.** 次の命題の真理値表を書け。
(1) $p \land q$　(2) $p \lor q$　(3) $p \Rightarrow q$　(4) $(\neg p) \lor q$　(5) $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$　(6) $(p \land q) \lor r$　(7) $(p \lor q) \land r$

注意: 実際に解答してもらうと、時々分かり辛い真理値の並べ方をする人がいる。辞書式順序などがお勧め (普通に樹形図を書くとそうなるはずである)。

**問 5.** 真理値表を書くことにより証明せよ。
(1) $(p \land q) \lor r \equiv (p \lor r) \land (q \lor r)$　(2) $(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$　(3) $\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$
(4) $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p) \land (\neg q)$

**問 6.** 次の真理値表を書け。
(1) $p \Rightarrow q$　(2) $\neg(p \Rightarrow q)$

**問 7.** 「$p$ ならば $q$」の否定が「$p$ であるが、$q$ でない」と同値であることを示せ。

(「ならば」の否定は完璧にマスターすること。)

**問 8.** 同値変形を用いて次式を証明せよ。

(1) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

(2) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

**問 9.** (1) 真理値表を用いて $(p\vee q)\wedge r \equiv (p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ を示せ。 (2) $p\wedge(q\vee r) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ を示せ。 (3) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を示せ。

**問 10.** 次の連立方程式, 連立不等式を解け。方程式は複素数の範囲で考える。方程式を解いた結果は複号 ($\pm$ や $\mp$ のこと) を用いず、1 つ 1 つ書くこと。

(1) $\begin{cases} x(x^2+4y+y^2)=0 \\ (y+2)(y+x^2)=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (3x^2-1)(y^3-y)=0 \\ (3y^2-1)(x^3-x)=0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^3+3xy^2-x=0 \\ y^3+3x^2y-y=0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x(x^2+y^2-2)=0 \\ (y+1)(y-x^2)=0 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} (x-1)(x-3)>0 \\ x(x-2)>0 \end{cases}$

**問 11.** 次の各命題を記号で表せ。

(1) すべての実数 $x$ は $x^2 \geq 1$ を満たす。

(2) $x^2-3x+2=0$ を満たす実数 $x$ が存在する。

(3) 任意の整数 $x$ に対して、$x+y=0$ を満たすような整数 $y$ が存在する。

(4) ある実数 $L$ が存在して、任意の実数 $x$ に対して $x^4-4x^3-2x^2+12x \geq L$ が成り立つ。

**問 12.** 次の各命題を文 (または文章) で表せ。

(1) 任意の実数 $x$ に対して、ある実数 $y$ が存在して、$x>y$ が成り立つ。

(2) ある実数 $x$ が存在して、任意の実数 $y$ に対して、$x+y=y+x=y$ が成り立つ。

**問 13.** 次の命題を証明せよ。

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+x+1>0$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x^2+y^2 \geq 2xy$

(3) $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2-3x+2=0$

(4) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y>x$

(5) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y^2>x$

(6) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y^2+2y>x$

(7) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ e^y>x$

(8) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x+y=y$

(9) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x+y=0$

(10) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x \cdot y=y$

(11) $(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists M > 0)\ Ma > b$

(12) $(\forall x > 0)\ (\exists y \in \mathbb{R})\ e^y = x$

**問 14.** 次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を証明せよ。

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y^2 = x$　　(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y > 0)\ \log y > x$

**問 15.** 真である命題はそれを証明し、偽である命題はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 書いて証明せよ。

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y > x^2$　(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x \geq y^2$

**問 16.** 次の各命題の否定命題を書いて、その否定命題を証明せよ。

(1) 任意の実数 $x$ に対して、ある実数 $y$ が存在して、$xy = 1$ が成り立つ。

**問 17.** $A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合、$S$ を実数とする。次の命題の否定を、$\neg$ を用いずに式で表せ。

$$((\forall x \in A)\ x \leq S) \land ((\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)\ S - \varepsilon < y)\,.$$

**問 18.** $p \Rightarrow q$ とその対偶の真偽は一致することを示せ。

**9.**　命題論理のド・モルガン律 $\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$, $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p) \land (\neg q)$ を、真理値表を用いて証明せよ。

**問 19.** 次の論理式の否定を作れ。ただし、(a) では $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は数列, $a \in \mathbb{R}$. (b)〜(d) で $A \subset \mathbb{R}^n$, $|x|$ は $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の長さ $(= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$, $B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \varepsilon\}$, (c) では $a \in \mathbb{R}^n$ とする。(説明を書いたけれど、問題を解くのにこれらの情報はほとんど必要がない。)

(a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |x_n - a| \leq \varepsilon.$

(b) $(\forall a \in A)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(a;\varepsilon) \subset A.$

(c) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in B(a;\delta))\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$

(d) $(\exists R \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ |x| \leq R.$

**問 20.** 「$x$ が 2 より大きいならば $f(x)$ は 3 より小さい」の否定を書け。ただし、$x \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。

**問 21.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に関する次の条件の否定を書け。

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ (\forall m \in \mathbb{N}\colon\ m \geq N)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$

**問 22.** $(a, b)$ を数直線上の区間、$f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ とするとき、次の条件の否定を書け 。

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in (a, b))\ (\forall y \in (a, b)\colon\ |x - y| < \delta)\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

**問 23.** アルキメデスの公理「$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」の否定を書け。

**問 24.** 実数 $x$ が任意の自然数 $n$ に対して、$-\dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{n}$ を満たすならば、$x = 0$ であることを示せ。

# 3　集合

**問 25.**

(1) 2 つの集合が等しいとはどういうことか、定義を述べよ。

(2) 部分集合の定義を述べよ。

(3) 2 つの集合に関して、以下の言葉の定義を述べよ。またどういう記号で表すかを答えよ。
(a) 和集合 (合併集合)　(b) 積集合 (共通部分)　(c) 差集合　(d) 直積集合

(4) 1 つの集合に関して、以下の言葉の定義を述べよ。またどういう記号で表すかを答えよ。
(a) 補集合 (ただし全体集合を $X$ で表す)　(b) ベキ集合

**問 26.** 次の各命題の真偽を述べよ。
(1) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$　(2) $\{1,2,2,3,3,3\} = \{1,2,3\}$　(3) $1 \in \{1\}$　(4) $\{1\} \in \{1\}$　(5) $\{1\} \subset \{1\}$　(6) 任意の $a$ と $A$ に対して、$\{a\} \subset A \Leftrightarrow a \in A$.

**問 27.** (1) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 6\}$ を要素を並べる書き方 (外延的表現) で表せ。
(2) $B = \{1,2,3,4\}$ を条件を示す書き方 (内包的表現) で表せ (答は無数にあるが一つでよい)。
(3) $C = \{3,6,9,12,15\}$, $D = \{2,4,6\}$ とするとき、$C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ を求めよ。
(4) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$ の部分集合を全て求めよ (結果は外延的表現で表わせ)。

**問 28.** 次の各文の内容を記号で表せ。ただし $A$, $B$, $X$ は集合とする。
(1) $\pi$ は有理数全体の集合に属さない。　(2) $A$ と $B$ の和集合は実数全体の集合である。
(3) $A$ の補集合は、$X$ と $A$ の差集合に等しい。　(4) $x$ が $A$ と $B$ の共通部分の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であり、かつ $x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。
(5) $A$ と $B$ が等しいためには、$A$ が $B$ の部分集合であり、かつ $B$ が $A$ の部分集合であることが必要十分である。

**問 29.** $A = \{n(n+1)(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6m \mid m \in \mathbb{N}\}$ とするとき、$A \subset B$, $A \neq B$ であることを示せ。

**問 30.** $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4n^2 - 4n - 9 < 0\}$ を求めよ (外延的な表現をせよ)。

**問 31.** (1) $A = \{a\}$ のとき、$B := 2^A$, $C := 2^B$ を求めよ。　(2) $A = \{\emptyset\}$ のとき、$B := 2^A$, $C := 2^B$ を求めよ。

**問 32.** $A = \{a, b\}$ のベキ集合 $B$ を求めよ。また $B$ のベキ集合の要素の個数を求めよ。

**問 33.** 次の各場合に、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^c$, $A \times B$, $2^A$ を求めよ (要素をすべて書き並べる方法で表せ)

(1) 全体集合 $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A = \{1,2,4\}$, $B = \{1,2,3,6\}$ のとき。

(2) $A = \{b,c,d\}$, $B = \{a,b,c\}$ のとき。(注意: $A \setminus B$ については場合分けが必要である。)

(3) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ のとき。

**問 34.** $A, B, C$ を集合とするとき、

$$A \subset B \cup C \Rightarrow (A \subset B) \vee (A \subset C)$$

はつねに成り立つか？つねに成り立つならば証明し、そうでないならば反例をあげよ。

**問 35.** 任意の集合 $A, B$ に対して、次式が成り立つことを証明せよ。
(1) $A \cap B \subset A$　(2) $(A \cup B) \cap A = A$

**問 36.** $X$ を全体集合、$A$ と $B$ を $X$ の部分集合とするとき、以下の命題を証明せよ。
(1) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$　(2) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B$　(3) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$

**問 37.** $A, B, C$ が全体集合 $X$ の部分集合とするとき、次の (1), (2) を証明せよ。
(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$　(2) $A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$

**問 38.** 全体集合 $X$ の部分集合 $A, B$ に対して、$A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$ であることを示せ。

**問 39.** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall y \in \mathbb{R}) x > y\}$ とおくとき、$A = \emptyset$ であることを示せ。

**問 40.** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ |x| < \varepsilon\}$ のとき、$A = \{0\}$ であることを示せ。

**問 41.** (1) 集合族の定義を述べよ。　(2) 集合族の例をあげよ。

**問 42.** 集合族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について、次の (i), (ii) を証明せよ。
(i) 条件 $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ n < m \Rightarrow A_n \subset A_m$ を満たすならば $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$.
(ii) 条件 $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ n < m \Rightarrow A_n \supset A_m$ を満たすならば $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$.

**問 43.** (1) 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、合併集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ と共通部分 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の定義を書け。
(2) 集合族 $\mathcal{A}$ について、合併集合 $\bigcup \mathcal{A}$ と共通部分 $\bigcap \mathcal{A}$ の定義を書け。

**問 44.** 次の各場合に $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ。

(1) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

(2) $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

(3) $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$.

(4) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, n\right)$

(5) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)$.

(6) $A_n := \left[-1 + \dfrac{1}{2n}, 1 - \dfrac{1}{2n}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 + \dfrac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{2n}\right\}$.

(7) $A_n := \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$

(8)

$$A_n := \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}, 1\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \text{ または } \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \leq x < 1\right\}.$$

(9) $A_n = \left\{x \;\middle|\; -\frac{1}{n} \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}\right\}$.

(10) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{n} \leq x \leq 2n\right\}$.

**問 45.** 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、次の命題を証明せよ。

(1) $\displaystyle\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda^c)$ (2) $\displaystyle\left(\bigcap_{\lambda\in\mathbb{N}} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda^c)$

**問 46.** $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ のとき、$2^{A\times B}$ を求めよ。

**問 47.** (1) $A$ と $B$ を集合とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ の定義を書け。また、それぞれ何と呼ぶか。 (2) $A$ を集合とするとき、$A^c$, $2^A$ の定義を書け (全体集合は $X$ とする)。また、それぞれ何と呼ぶか。
(3) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $2^A$, $2^{(2^A)}$ を求めよ。

# 4 写像

**問 48.** 写像について次の言葉の定義を述べよ。 (1) 単射 (2) 全射 (3) 全単射

**問 49.** $f\colon X \to Y$ について、以下の問に答えよ。

(1) $f$ が単射でないとはどういうことか、論理式で書け。

(2) $f$ が全射でないとはどういうことか、論理式で書け。

**問 50.** (写像に関する) 次の言葉の定義を述べよ。
(a) 値域 (b) 合成写像 (c) 逆写像 (d) 集合の (順) 像 (e) 集合の逆像

**問 51.** 以下の各写像の値域を求めよ。

(1) $X$ を空でない集合とするとき、恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$.

(2) $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$ で定めた $D$.

(3) $X, Y$ が空でない集合のとき、$\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X((x, y)) = x$ $(x \in X)$ で定めた $\mathrm{pr}_X$.

(4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ で定めた $f$.

(5) $X =$ 平面内の多角形全体の集合 として、$f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(A) = A$ の面積 $(A \in X)$ で定めた、$f$.

(6) $X = Y = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$, $D(f) = f'$ $(f \in X)$ で定めた $D$. ただし $f'$ は $f$ の導関数である。

(7) $X$ を空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$ で定めた $\chi_A$.

(8) $X, Y$ は集合で、$\emptyset \neq X \subset Y$ を満たすとするとき、$i\colon X \to Y$, $i(x) = x$ $(x \in X)$ で定めた $i$.

**問 52.** $I$ は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon I \to \mathbb{R}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $f$ が狭義単調増加とはどういうことか、定義を述べよ。

(2) $f$ が狭義単調増加ならば $f$ は単射であることを示せ。

**問 53.** $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は狭義単調かつ連続とするとき、$g\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$, $g(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$ で定義される $g$ は全単射であることを示せ。

**問 54.** 集合 $X$ の恒等写像 $\mathrm{id}_X$ とは何か、説明せよ。

**問 55.** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の各命題を証明せよ。

(1) $f$ と $g$ が単射ならば $g \circ f$ は単射である。

(2) $f$ と $g$ が全射ならば $g \circ f$ は全射である。

(3) $f$ と $g$ が全単射ならば $g \circ f$ は全単射である。

(4) $g \circ f$ が単射ならば $f$ は単射である。

(5) $g \circ f$ が全射ならば $g$ は全射である。

(6) $g \circ f$ が単射であっても $g$ が単射とは限らない。

(7) $g \circ f$ が全射であっても $f$ が全射とは限らない。

(8) $g \circ f$ が単射でかつ $f$ が全射ならば $g$ は単射である。

(9) $g \circ f$ が全射でかつ $f$ が単射ならば $f$ は全射である。

**問 56.** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき、$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ であることを示せ。

**問 57.** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ が全単射とするとき、$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であることを示せ。

**問 58.** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、以下の各命題の反例を書け。(1) $g \circ f$ が単射であれば、 $g$ は単射である。(2) $g \circ f$ が全射であれば、 $f$ は全射である。

**問 59.** $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ とするとき、$X$ から $Y$ への写像をすべて求めよ。そのうち全射であるもの、単射であるものはどれか。

**問 60.** 次の (1)〜(3) について、集合 $A$ から集合 $B$ への写像全体の個数、そのうち全射であるもの、単射であるもの、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。ただし $a, b, c$ は相異なるものであるとする $(a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a)$。

(1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ (2) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ (3) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

**問 61.** $N$ を自然数として、$N$ 本の平行線からなるあみだくじを作り、あみだくじの出発地点と到着地点のそれぞれ 1 から $N$ までの番号を振る。$X = Y = \{1, \dots, N\}$ とおき、$x \in X$ から出発してあみだくじをたどって (引いて)、$y \in Y$ に到着するとき、$f(x) = y$ と定めることで、写像 $f\colon X \to Y$ が得られる。任意のあみだくじに対して、$f$ が全単射であることを示せ。

**問 62.**

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とするとき、以下のものを求めよ。

(a) $f(\{1\})$ (b) $f(\{-2\})$ (c) $f(\{-2,1\})$ (d) $f([-2,1])$ (e) $f^{-1}(\{3\})$ (f) $f^{-1}(\{-2\})$ (g) $f^{-1}([-1,3])$

(2) $f\colon [0,2\pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ とするとき、以下のものを求めよ。

(a) $f(\emptyset)$ (b) $f(\{\pi/6\})$ (c) $f^{-1}(\{-2\})$ (d) $f^{-1}(\{0\})$ (e) $f^{-1}([-2,0])$ (f) $f([-2,1])$

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$ の定義域 $X$ を高校数学ルールで定めるとき (終域は $\mathbb{R}$, つまり $f\colon X \to \mathbb{R}$ とする)、$f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{0\})$, $f(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{2\})$ を求めよ。

(4) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ で定めるとき、以下の問に答えよ。$f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{1\})$, $f([1/2,3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}((0,3])$ を求めよ。

**問 63.** $f\colon X \to Y$ が全単射で、$B \subset Y$ であるとき、$f^{-1}(B)$ には、次の (a), (b) 2 つの解釈が可能である。どちらで解釈しても同じ集合を表すことを示せ。

(a) $f$ による集合 $B$ の逆像 （教科書の記号では $f^*(B)$

(b) $f$ の逆写像 $f^{-1}$ による $B$ の像（教科書の記号では $\left(f^{-1}\right)_*(B)$

(つまり $f^*(B) = \left(f^{-1}\right)_*(B)$ を示せ、ということである。)

**問 64.** $f\colon X \to Y$ とする。$A \subset X$, $B \subset Y$ に対して、

$$f(A) := \{y \mid \exists x(x \in A \land y = f(x))\}, \quad f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $A_1 \subset A_2 \subset X$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(2) $B_1 \subset B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

(3) $A_1, A_2 \subset X$ ならば $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(4) $A_1, A_2 \subset X$ とするとき、$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ は一般には成り立たない。反例をあげよ。

(5) $A_1, A_2 \subset X$ ならば $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(6) $f^{-1}(Y) = X$ であることを示せ。

(7) $B_1, B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

(8) $B_1, B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

(9) $B_1, B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

**問 65.** (1) $f$ が単射であれば $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ であることを示せ。

**問 66.** $(\forall A \in 2^X)\ A \subset f^{-1}(f(A))$ と $(\forall A \in 2^X)\ A \supset f^{-1}(f(A))$ のうち正しい方を証明せよ。

**問 67.** $A \subset X, B \subset Y$ とするとき、$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$ を証明せよ。

**問 68.** $f\colon X \to Y$ とするとき、以下の命題を証明せよ。

(1) $(\forall x \in X)\ f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

(2) $(\forall y \in Y)\ f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

(3) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(4) $f^{-1}(Y) = X$.

**問 69.** 授業で説明したように、高校数学では暗黙のルールで関数の定義域を定める。そのルールを採用するとき、次の関数の定義域 $X$ と値域 $f(X)$ は何か (集合の形で答えよ)。
(1) $f(x) = \log x$　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

**問 70.** 次の各関数 $f$ について、全射であるかどうか、単射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由をつけて答えよ。全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)\ (x \in X)$ で定まる関数 $g$ が全単射であるようにせよ。ただし $X$ はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす $X, Y$ が一通りに定まらない場合もあるが、どれか一つ答えれば良い。(念のため: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$)
　(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x\ (x \in \mathbb{R})$　(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x\ (x \in \mathbb{R})$　(3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x\ (x \in \mathbb{R})$　(4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x\ (x \in \mathbb{R})$

## 5　和文式訳

**問 71.** 次の各文を記号を使って表せ。

(1) (a) 「$p$ かつ $q$」の否定は、「$p$ でないか、または $q$ でない」である。
(b) $\sqrt{2}$ は有理数全体の集合に属さない。　(c) $A$ と $B$ の共通部分は空集合である。
(d) $A$ の補集合は、$X$ と $A$ の差集合に等しい。　(e) $f$ は $A$ から $B$ への写像である。
(f) $x$ が $A$ と $B$ の和集合の要素であるためには, $x$ が $A$ の要素であるか、または $x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。

(2) (a) 「$p$ ならば $q$」の否定は、「$p$ であるのに $q$ でない」である。　(b) $i$ は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属する。　(c) $A$ と $B$ の共通部分の補集合は、$A$ の補集合と $B$ の補集合の和集合に等しい。　(d) 写像 $f$ の $x$ での値は $y$ である。　(e) $x$ が $A$ と $B$ の共通部分の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であり、かつ $x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。

(3) (a) 「$p$ ならば $q$」の否定は、「$p$ であるが $q$ でない」である。　(b) $\sqrt{3}$ は、実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属する。　(c) 写像 $f$ による $a$ の像は $b$ である。　(d) $A$ と $B$ の合併集合 (和集合) は、$A$ を含む。　(e) $x$ が $A$ と $B$ の共通部分の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であり、かつ $x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。　(f) $\tan x = 1$ を満たす $x$ が $0 < x < \pi/2$ の範囲に存在する。

(4) (a)「$p$ ならば $q$」の否定は、「$p$ であるが $q$ でない」である。 (b) $i$ は複素数であり、実数ではない。 (c) $A$ と $B$ の共通部分が $A$ に等しければ、$B$ は $A$ を含む。 (d) $x$ が $A$ と $B$ の合併集合 (和集合) の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であるか、または、$x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。 (e) どんな実数 $x$ よりも大きいような実数 $y$ は存在しない。

(5) (a)「$p$ ならば $q$」は、「$p$ でないか、または $q$ である」と同値である。 (b) $\dfrac{1}{2}$ は自然数全体の集合に属さないが、有理数全体の集合に属する。 (c) $A$ と $B$ の合併集合 (和集合) が $B$ に等しいならば、$A$ は $B$ に含まれる。 (d) 任意の実数 $x$ に対して、ある実数 $y$ が存在して、$x+y=y+x=0$ が成り立つ。(e) 空集合の補集合は $X$ であり、$X$ の補集合は空集合である。

(6) (a)「$p$ ならば $q$」は、「$q$ でないならば $p$ でない」と同値である。(b) $-1$ は自然数でないが、整数である。(c) $A$ と $B$ の和集合の補集合は、$A$ の補集合と $B$ の補集合の共通部分に等しい。(d) $x$ が $A$ から $B$ を除いた差集合の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であり、かつ $x$ が $B$ の要素でないことが必要十分である。
(e) ある複素数 $w$ が存在して、任意の複素数 $z$ に対して、$z+w=w+z=0$ が成り立つ。

(7) (a)「$p$ ならば $q$」は、「$p$ でないか、または $q$ である」と同値である。 (b) $-1$ は自然数でないが整数であり、$\frac{1}{2}$ は整数でないが有理数であり、$\sqrt{3}$ は有理数でないが実数であり、$4i$ は実数でないが複素数である。 (c) $A$ と $B$ の合併集合 (和集合) が $B$ に等しいならば、$A$ は $B$ に含まれる。
(d) ある実数 $x$ が存在して、任意の実数 $y$ に対して、$x+y=y$ が成り立つ。(e) 空集合の補集合は $X$ であり、$X$ の補集合は空集合である。

(8) (a) $i$ は複素数であるが実数ではなく、$\pi$ は実数であるが有理数ではなく、$\frac{1}{2}$ は有理数であるが整数ではなく、$-2$ は整数であるが自然数ではない。 (b)「$p$ ならば $q$」は「$q$ でないならば $p$ でない」と同値である。 (c) $A$ と $B$ の共通部分が空集合ならば、$A$ は $B$ の補集合に含まれる。 (d) ある実数 $x$ が存在して、任意の実数 $y$ に対して $xy=y$ が成り立つ。 (e) $x$ が $A$ と $B$ の合併集合の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であるか、または $x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。

(9) $A, B, X, Y$ は集合、$f\colon X\to Y$ は写像、$x\in X, y\in Y$ とする。
(a)「$p$ ならば $q$」は、「$p$ でないか、または $q$ である」と同値である。 (b) $i$ は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属し、$\sqrt{2}$ は実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属し、$-1$ は整数全体の集合と自然数全体の集合の差集合に属する。 (c) $A$ と $B$ の共通部分の補集合は、$A$ の補集合と $B$ の補集合の合併集合に等しい。 (d) 写像 $f$ による $x$ の像は $y$ である。 (e) $x$ が $A$ と $B$ の共通部分の要素であるためには, $x$ が $A$ の要素であり、かつ $x$ が $B$ の要素であることが必要十分である。

(1) $A$ と $B$ は共通の元を持たない。

(2) $x+y$ が無理数ならば、$x$ か $y$ のどちらか一方は無理数である。

# 6 同値関係

**問 72.** (1) 空でない集合 $X$ 上の 2 項関係 $\sim$ が同値関係であるとは、次の (i), (ii), (iii) が成り立つことをいう。$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$ に当てはまるものを答えよ。

(i) (反射律) $\forall x \in X$ に対して $\boxed{\text{あ}}$

(ii) (対称律) $\forall x \in X, \forall y \in X$ に対して $\boxed{\text{い}}$

(iii) (推移律) $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$ に対して $\boxed{\text{う}}$

(2) $\sim$ が空でない集合 $X$ 上の同値関係であるとき、$X$ の要素 $x$ の属する同値類 $C(x)$ の定義を書け。任意の $x \in X$ に対して $C(x) \neq \emptyset$ である。なぜか答えよ。
(3) ある人が「対称律があれば、$x \sim y$ とするとき $y \sim x$. 推移律を用いると $x \sim x$ が導かれる。だから同値関係の定義で反射律は実は余分である。」と言った。正しいだろうか？

**問 73.** (1) $\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\sim$ を、$a \sim b \Leftrightarrow a - b$ は 3 の倍数, と定めるとき、$\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。
(2) 空でない集合 $X$ 上の同値関係 $\sim$ があるとき、$x \in X$ の ($\sim$ に関する) 同値類を $C(x)$ を書くことにする。(a) $C(x)$ の定義を書け。(b) $x, y \in X$ とするとき、$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow C(x) = C(y)$ を示せ。

**問 74.** 空でない集合 $U$ の部分集合のうち空集合でないもの全体を $X$ とおき、$X$ に属する $A$, $B$ に対して、

$$A \sim B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$$

と定義する。このとき以下の問に答えよ。
(1) $U = \{1, 2, 3\}$ とするとき、$X$ を求めよ。　(2) $\sim$ が $X$ 上の同値関係であることを示せ。

**問 75.** $\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を $a \sim b \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists m \in \mathbb{Z})\ a - b = 5m$ で定義し、$a \in \mathbb{Z}$ に対して $[a] := \{b \in \mathbb{Z} \mid b \sim a\}$ とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。商集合 $\mathbb{Z}/_\sim$ はいくつの元からなるか。

(2) $[7] = [2]$, $[-1] = [4]$ であることを示せ。

(3) $\mathbb{Z}/_\sim$ で、$[a][b] := [ab]$ により積が定義できる (これは証明しなくても良い)。$[a][b] = [1]$ が成り立つとき、$[b]$ は $[a]$ の逆元と呼ぶことにする。$[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ の逆元をすべて求めよ。

**問 76.** $X := \mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(m, n) \mid m$ は自然数でありかつ $n$ は整数 $\}$ とおき、$(a, b), (c, d) \in X$ に対して、

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad ad - bc = 0$$

と定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) $\sim$ は $X$ 上の同値関係であることを示せ。

(2) $(a, b) \in X$ の属する同値類を $C(a, b)$ と書く。$X$ の $\sim$ による商集合 $X/_\sim$ の任意の 2 元 $\alpha, \beta$ に対して、代表元 $(a, b), (c, d)$ を取ったとき、$C(ac, bc + ad)$ は代表元の取り方によらずに定まることを示せ。