$(\forall x > 0)\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ の証明

桂田 祐史

2023 年 6 月 1 日, 2023 年 6 月 14 日

宿題 4 (1)(a) のフィードバックで、不等式の証明にたくさんツッコミを入れたのだけれど、「もしかして不等式の証明自体をあまり習っていないのかな？」と思い至ったので、説明を補足します。

もちろん、

相加平均と相乗平均の関係

$a \geq 0$, $b \geq 0$ ならば

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

ここで、等号が成り立つ $\Leftrightarrow a = b$.

を知っているでしょうから、それを使えば次のような解答が得られます。

解答 0 x を任意の正の数とする。$x > 0$ であるから $\dfrac{1}{x} > 0$. ゆえに相加平均と相乗平均の関係から

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2. \quad \text{ゆえに} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2. \blacksquare$$

簡単なことを尋ねられているので (不等式を見ただけで「知っている」と思う人が多いでしょう)、相加平均と相乗平均の関係は使わない (あるいはそれ自体を証明する) 証明を書くのかも、という判断もあるでしょう。実際にそうした人も多かったけれど、その答案にはツッコミどころがあるのが少なくなかった、ということでした。

私が高校生のときは、不等式の証明は、左辺 − 右辺を計算してみなさい、と言われたものです。この場合もそれに従うと書きやすいと思います[1]。

解答 1 x を任意の正の数とする。$x > 0$ であるから $x = (\sqrt{x})^2$ であるので、

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0 \quad (\because \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ は実数だから}).$$

ゆえに

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \blacksquare$$

[1] 等式の証明でも同じです。コンピューターを使う場合も、差が 0 になるか確認するのは簡単にできることが多い。

解答 2　x を任意の正の数とする。

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$$

($\because$ 分母 $x>0$. また $x-1$ は実数なので、分子 $=(x-1)^2\geq 0$.) ゆえに

$$x+\frac{1}{x}\geq 2.\blacksquare$$

ところが、答案には、証明すべき式を変形していくものが多かったです。それらには以下のような問題が生じやすい。

(i) 変形が同値変形であることを明記していない。「ゆえに」はダメです。
(「ゆえに」すら書かない、式の羅列という答案もありました。論外です。)

(ii) 証明すべき不等式が (例えば) $(x-1)^2\geq 0$ と同値であることを書いて、そこで終わりにしている。$(x-1)^2\geq 0$ がつねに成り立つことを書いてない (頭の中で「これは成り立つよね」と思っているのだろうけれど、書きましょう)。

$\forall x \quad (p(x)\Leftrightarrow q(x))$ と書いただけで、$\forall x\ q(x)$ を主張していなければ、$\forall x\ p(x)$ を主張したことにはならない。

これを解決するために、計算用紙に式変形を書いて、後からそれを逆順に書くというやり方を見せました。

解答 3(あまり勧めない)

x を任意の正の数とする。$x+\frac{1}{x}\geq 2$ は 、$x>0$ であるので、$x^2+1\geq 2x$ と同値である。これは $(x-1)^2\geq 0$ と同値であるが、$x-1$ は実数であるから、つねに成り立つ。ゆえに $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

$\rightarrow$

解答 4(解答 3 よりはマシだけどあまり勧めない)

x を任意の正の数とする。$x-1$ は実数であるから $(x-1)^2\geq 0$. ゆえに $x^2+1\geq 2x$. $x>0$ であるから (x で割っても不等号の向きは変わらず) $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

私としては、解答 1 または解答 2 がオススメです。