

\_\_年\_\_組\_\_番 氏名\_\_\_\_\_ (解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出)

問 10 一部の問題を後回しにするかもしれない。授業中の解答指示に従うこと。

(1) 次の各関数  $f$  について、全射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由 (簡単で良い) をつけて答えよ (注: (a), (b) は単射、(c) は単射でない、と宿題9で分かった)。全単射でない場合、定義域  $X(\subset \mathbb{R})$  と終域  $Y(\subset \mathbb{R})$  を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) := f(x)$  ( $x \in X$ ) で定まる関数  $g$  が全単射であるようにせよ。ただし  $X$  はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす  $X, Y$  が一通りに定まらない場合は、どれか1つ見つけて答えれば良い。

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) (b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tanh x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) (c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

(2)  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  とする。  $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$  であれば、 $f$  と  $g$  は全単射であることを示せ。