

微分方程式期末試験問題 (1年G・S組)

2008年1月24日(木) 16:00

担当 桂田

教科書ノート等持ち込み不可

解答用紙のみ提出

1.

(1) $\frac{dy}{dx} = xy(y+1)$ の一般解を求めよ。また、 $x=0$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

(2) $y' = x(y^2 + 1)$ の一般解を求めよ。 $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

2.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}y$ の一般解を求めよ。

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}y + 1$ の一般解を求めよ。

3. 微分方程式

$$() \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right)$$

について以下の問に答えよ。

(1) y が () の解であるとき、 $u = \frac{y}{x}$ とおくと、 u はどのような微分方程式を満たすか。

(2) 微分方程式 () の一般解を求めよ。

4. 次の各微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 8y = x + 1 \quad (2) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{2x}$$

5. 微分方程式の初期値問題

$$x''(t) + x(t) = \sin \omega t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

について以下の問に答えよ (ただし ω は正定数とする)。

(1) $\omega \neq 1$ のとき、解を求めよ。

(2) $\omega = 1$ のとき、解を求めよ。

(3) (1) で得た解は、 $\omega \rightarrow 1$ とするとき、(2) で得た解に収束することを確かめよ。

解答

1.

(1) $\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int x dx$ となるが、

$$\text{左辺} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log \left| \frac{y}{y+1} \right|, \quad \text{右辺} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

これから

$$\frac{y}{y+1} = \pm e^C e^{x^2/2} = C' e^{x^2/2} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$y = \frac{C' e^{x^2/2}}{1 - C' e^{x^2/2}}.$$

$x = 0$ のとき $y = 1$ ならば $1 = \frac{C'}{1 - C'}$. これから $C' = \frac{1}{2}$. このとき

$$y = \frac{e^{x^2/2}}{2 - e^{x^2/2}}.$$

(2) $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int x dx$ から $\tan^{-1} y = \frac{x^2}{2} + C$. これから $y = \tan \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$. $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ のとき $y = 1$ ならば、 $1 = \tan \left(\frac{\pi}{4} + C \right)$. これから $C = n\pi$ (n は整数). このとき $y = \tan \frac{x^2}{2}$.

2.

(1) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+1} dx$ より、 $\log |y| = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \log C = \log C \sqrt{x^2+1}$. これから $y = \pm C \sqrt{x^2+1} = C' \sqrt{x^2+1}$.

(2) 定数変化法を用いる。 $y = C(x) \sqrt{x^2+1}$ とおくと、

$$y' = C'(x) \sqrt{x^2+1} + C(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x) \cdot (x^2+1)^{-1/2} = C'(x) \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} y.$$

ゆえに y が与えられた微分方程式の解であるには、

$$C'(x) \sqrt{x^2+1} = 1.$$

これから

$$C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ゆえに

$$C(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + \tilde{C} \quad (\tilde{C} \text{ は積分定数}).$$

ゆえに

$$y = \sqrt{x^2+1} \log \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + \tilde{C} \sqrt{x^2+1}. \blacksquare$$

3.

(1) $u = \frac{y}{x}$ より $y = xu$. ゆえに $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$. これを微分方程式の左辺に代入して

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) = \frac{u^2 + 1}{2u}.$$

移項して

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 1}{2u} - u = \frac{u^2 + 1 - 2u^2}{2u} = \frac{1 - u^2}{2u}.$$

整理して

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2xu}.$$

(2) 微分方程式から $\frac{dx}{x} = -\frac{2u}{u^2 - 1} du$ であるから、

$$\int \frac{dx}{x} = -2 \int \frac{u}{u^2 - 1} du = -\int \left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\log |(u+1)(u-1)| = \log \frac{1}{|u^2 - 1|}.$$

左辺は $\log |x| + \log C = \log C|x|$ ($\log C$ は積分定数) と変形できるので、

$$C|x| = \frac{1}{|u^2 - 1|} \quad \text{すなわち} \quad u^2 - 1 = \frac{C'}{x} \quad \text{すなわち} \quad u = \sqrt{1 + \frac{C'}{x}}.$$

$$y = xu = x \sqrt{1 + \frac{C'}{x}}.$$

(この結果は検算済み。)

4.

(1) $z'' + 2z' - 8z = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ の根は $\lambda = 2, -4$. ゆえに一般解は $z = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$ (C_1, C_2 は任意定数). $u'' + 2u' - 8u = x + 1$ の特解を求めるため、 $u = ax + b$ (a, b は定数) とおくと、

$$u'' + 2u' - 8u = 0 + 2 \cdot a - 8(ax + b) = -8ax + (2a - 8b).$$

これが $x + 1$ に等しくなるには、 $-8a = 1, 2a - 8b = 1$. すなわち $a = -\frac{1}{8}, b = -\frac{5}{32}$. ゆ

えに $u = -\frac{x}{8} - \frac{5}{32}$. 求める一般解は $y = z + u = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - \frac{x}{8} - \frac{5}{32}$.

(2) $z'' + 2z' + z = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ の根は $\lambda = -1$ (重根). ゆえに一般解は $z = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数). $u'' + 2u' + u = e^{2x}$ の特解を求めるため、 $u = a e^{2x}$ (a は定数) とおくと、

$$u'' + 2u' + u = (4a + 2 \cdot 2a + a) e^{2x} = 9a e^{2x}.$$

これが e^{2x} に等しくなるには、 $9a = 1$. すなわち $a = \frac{1}{9}$. ゆえに $u = \frac{e^{2x}}{9}$. 求める一般解は

$$y = z + u = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{e^{2x}}{9}.$$

5.

対応する同次方程式 $z''(t) + z(t) = 0$ の一般解は $z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (C_1, C_2 は任意定数) である。

(1) $u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ とおくと、 $u''(t) = -\omega^2 u(t)$ 。ゆえに

$$u''(t) + u(t) = (1 - \omega^2)u(t) = (1 - \omega^2)(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

これが $\sin \omega t$ と一致するには、 $A = 0, (1 - \omega^2)B = 1$ 。ゆえに $u(t) = \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2}$ 。ゆえに一般解は

$$x(t) = z(t) + u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2}.$$

$x(0) = 1, x'(0) = 0$ を満たすように C_1, C_2 を定めると $C_1 = 1, C_2 = -\frac{\omega}{1 - \omega^2}$ 。

$$x(t) = \cos t - \frac{\omega}{1 - \omega^2} \sin t + \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2}.$$

(2) $u(t) = t(A \cos t + B \sin t)$ とおくと、

$$u'(t) = A \cos t + B \sin t + t(-A \sin t + B \cos t), \quad u''(t) = -2A \sin t + 2B \cos t + t(-A \cos t - B \sin t).$$

ゆえに $u''(t) + u(t) = -2A \sin t + 2B \cos t$ 。これが $\sin t$ に等しくなるためには、 $-2A = 1, B = 0$ 。すなわち $A = -\frac{1}{2}, B = 0$ 。これから $u(t) = -\frac{t}{2} \cos t$ 。ゆえに

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{2} \cos t.$$

$x(0) = 1, x'(0) = 0$ を満たすように C_1, C_2 を定めると $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{2}$ 。ゆえに

$$x(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{t}{2} \cos t.$$

(3) 省略。

この問題は、物理では「強制振動」と呼ばれて良く取り上げられますが、(1) に相当する計算を詳しい説明抜きに示してあるだけのことが多いようです (解は求まるんだし、文句言うなよ、ということかな)。せっかく勉強したのだから、きちんとやってみよう、という問題です (数学の本に載っていることはあまりないみたい)。

講評

信じられないことだが、

$$\int x dx = \log x$$

とした人が少なくなかった (もちろん $\frac{x^2}{2} + C$ とすべき)。それ以外にも、1次方程式を解けない人 (同じような問題を連続して解き間違える)、2次方程式を解き間違える人、指数関数が微分できない人、対数関数の処理を間違える人 (極めつけは $\log A + \log B = \log(A + B)$, $\log A - \log B = \frac{\log A}{\log B}, \dots$) ...高校までに学んだ数学をおろそかにしていると、大学の数学でまともな成績を取ることはかなり難しいので (≡ 数学的議論をすることが難しい)、真剣に高校数学の復習をするべきである。

それから

$$\int \frac{du}{1-u} = \log|1-u| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

とした人が多かったのだが、正しくは

$$\int \frac{du}{1-u} = -\int \frac{du}{u-1} = -\log|u-1| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり、符号が異なり、まったくの別物であることに注意。これは他がしっかりしている人も結構間違えていた。

指数・対数に弱い人が多いが、そのままでは、自然現象の数理的な取り扱いに非常な困難を覚えることになる (私は数学屋で理科詳しくないけれど、身近なところでも、音や光の強さ、気圧の高度変化、地震の強さ、pH, ...色々ある)。文部科学省の方針で、高校までの理科と数学はなるべく独立に勉強できるようになっていて、理科では数学を極力使わず、数学でも理科の話題は出さないことになっているのだが、その乏しい経験から、両者が関係ないと勘違いしたりしないように。まあ、数学以外の分野で、すべての人が数学に堪能である必要はなくて、少数の人間が数学を使いこなして、他の大部分の人達に「これはこうすればOK」とやり方だけ伝えれば何とかなる、ということはあるかもしれない。そういう意味で処世術としては「(自分に) 数学は必要ない」というのは本当かもしれない。しかし「なぜ?」を突き詰めると数学は避けて通れない。

1. (1) $\frac{y}{y+1} = Ce^{x^2/2}$ とか、 $y = Ce^{x^2/2}(y+1)$ のような答案が結構あった。1次方程式くらい解こう。

(2) $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ で、 $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ のとき $y = 1$ となることから、 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + C\right) = 1$ が導かれるが、この解は

$$C = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である。これが全然解けなかったり、 $C = 2n\pi$ (n は整数) としたり (\tan は周期 π の周期関数であることを思い出そう)、 $C = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) としたり、ちょっと情けない。今の場合、 n がなんであっても、 $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ は同じになってしまうので、 $y = \tan\frac{x^2}{2}$ を解とすればよい。

2. (1) はまあまあの出来。(2) 「 $y = C(x)\sqrt{x^2+1}$ とおく」が書けない人が、 $C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ まで出来たが、後は実に様々な迷計算をしてくれる人が多かった。この授業の最初に時間を取って、積分形算を復習したのに...分からないことを責める気はないが、間違っただけを書く態度は猛省をうながしたい。
3. (1) u に関する微分方程式が導けた人は多かったが、余計なことまで書いてあったり、逆に (2) の中に紛れ込んでしまったり、問の答え方としては変な答案がかなり多かった。
4. (1) で e^{2x}, e^{-4x} が出て来るのが分かったとして、結果を $y = e^{2x} + e^{-4x} - \frac{1}{8}x - \frac{5}{32}$ とした人が何人かいた。もちろん正しくは、 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{8}x - \frac{5}{32}$ (C_1, C_2 は任意定数) である。 C_1, C_2 を両方とも 1 とする理由なんかない。
5. この問題は良い問題であると信じている。テキストを改訂する機会があれば例題または演習問題に含めるであろう。変数が x でなく t になっていることに惑わされている人がちらほらいた(うーん...)。ともあれ、非同次方程式の特解を求めることが出来た人は多く、ほっとしました。なぜか初期値問題の解を求められなかった人が多いのは時間切れかなあ...