

微分方程式 演習 No.1 (2007年9月27日, 10月4日)

高校で習った多項式(整式)、三角関数、指数関数、対数関数は当然として、有理関数(=多項式/多項式)の積分(必ず出来る)と $\sqrt{2}$ 次式を含む簡単な積分を出来るようにしておいて欲しい。

2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log|x + \sqrt{x^2+k}|$  を用いて、 $\int \sqrt{x^2+k} dx$  を求めよ。

解説  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$  の公式は覚えておいて、念のため右辺を微分して、 $\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$  になることを確認するのが私のお勧め。問題の  $I := \int \sqrt{x^2+k} dx$  については、部分積分して、

$$\begin{aligned} I &= \int x \cdot \sqrt{x^2+k} dx = x\sqrt{x^2+k} - \int x \cdot [(x^2+k)^{\frac{1}{2}}]' dx = x\sqrt{x^2+k} - \int x \cdot \frac{1}{2} (x^2+k)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}} dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{(x^2+k) - k}{\sqrt{x^2+k}} dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k} dx + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = x\sqrt{x^2+k} - I + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} \end{aligned}$$

となるから ( $\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} = \sqrt{x^2+k}$  に注意)、右辺の  $I$  を左辺に移項して 2 で割って、

$$I = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2+k} + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} \right) = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2+k} + k \log|x + \sqrt{x^2+k}| \right).$$

余談  $\sqrt{2}$ 次式は平方完成して  $\sqrt{a^2-x^2}$ ,  $\sqrt{x^2+k}$  の形にする(どちらのタイプになるかは、 $x^2$ の係数の符号で決まる)。

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  は、(i)  $x = au$  として  $I = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とするか<sup>1</sup>、(ii)  $x = a \sin \theta$  ( $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ) として  $I = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とする。 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2-x^2} + \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$  は、上と同様に部分積分で導出する。

3. 次の積分を求めよ。(1)  $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$  (2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$  (3)  $\int \sqrt{x^2+4x} dx$

(4)  $\int \frac{x^3+2x^1-1}{x(x-1)} dx$  (5)  $\int \frac{x+2}{x^2(x^2+1)} dx$

(1)  $I = \int \frac{dx}{x^2-6x+13}$  は有理関数の積分なので、部分分数分解を考えるが、分母は判別式  $D$  が  $D/4 = (-3)^2 - 1 \cdot 13 = 9 - 14 = -4 < 0$  であるから、実係数の範囲では因数分解できない。平方完成をすることになる。

$$x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 - 9 + 13 = (x-3)^2 + 4$$

であるから、 $x-3 = 2u$  とおくと、 $dx = 2du$ ,  $x^2 - 6x + 13 = (2u)^2 + 4 = 4(1+u^2)$  となり、

$$I = \int \frac{2du}{4(1+u^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} u = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x-3}{2}.$$

(2)  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$  は、 $\sqrt{2}$ 次式があるので、2次式の平方完成をする。

$$-x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x) - 3 = -(x-2)^2 + 4 - 3 = 1 - (x-2)^2.$$

<sup>1</sup>  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$  は覚えられそう...自信がなければ  $x = a \sin \theta$  の道を選ぶ。

$x - 2 = u$  とおくと、 $dx = du$ ,  $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{1 - u^2}$  となり、

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sin^{-1} u = \sin^{-1}(x - 2).$$

(3)  $I = \int \sqrt{x^2 + 4x} dx$  は、 $\sqrt{2}$  次式があるので、2 次式の平方完成をする。

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

であるから、 $x + 2 = u$  とおくと、 $dx = du$ ,  $\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{u^2 - 4}$  となり、

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{u^2 - 4} du = \frac{1}{2} \left( u\sqrt{u^2 - 4} + (-4) \log \left| u + \sqrt{u^2 - 4} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x} - 4 \log \left| (x + 2) + \sqrt{x^2 + 4x} \right| \right). \end{aligned}$$

(4)  $I = \int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x(x - 1)} dx$  は有理関数の積分なので、部分分数分解を考える。分子の次数が分母の次数よりも高いのでまず割り算から。

$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x^2 - x)(x + 3) + 3x - 1$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x(x - 1)} &= x + 3 + \frac{3x - 1}{x(x - 1)}. \\ \frac{3x - 1}{x(x - 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \end{aligned}$$

を満たす  $A, B$  があるはずである。分母を払って  $3x - 1 = A(x - 1) + Bx$ 。これから (例えば  $x = 1$  や  $x = 0$  を代入する)  $B = 2, A = 1$ 。ゆえに

$$I = \int \left( x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \log |x| + 2 \log |x - 1|.$$

(5)  $I = \int \frac{x + 2}{x^2(x^2 + 1)} dx$  は有理関数の積分なので、部分分数分解を考える。 $x^2$  と  $x^2 + 1$  は互いに素なので、

$$\frac{x + 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{\text{分母より次数の低い式}}{x^2} + \frac{\text{分母より次数の低い式}}{x^2 + 1}$$

とできるはずなので、

$$\frac{x + 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

を満たす定数があるはずである。分母を払って

$$x + 2 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B.$$

係数を比較して、 $B = 2, A = 1, D = -B = -2, C = -A = -1$ 。ゆえに

$$I = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{x + 2}{x^2 + 1} \right) dx.$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

に注意すると、

$$I = \log |x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - 2 \tan^{-1} x.$$