応用数値解析特論 第3回

〜Ritz-Galerkin 法〜

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2022/

2022年10月10日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回は、菊地 [1] の第 2 章「微分方程式と変分原理」の内容のうち、Poisson 方程式の境界値問題 (P) とその弱定式化 (W) を説明した。
- 前回説明しそこねた変分問題 (V) を駆け足で紹介した後、[1] の第 3 章「Ritz-Galerkin 法」の内容を解説する。

2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (思い出し)

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

$$-\triangle u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1a}$$

$$u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \tag{1c}$$

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X). \tag{2}$$

ただし

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}.$$

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (u, v) := \int_\Omega u(x)\, v(x) dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x)\, v(x)\, d\sigma.$$

2.4 変分原理

(「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明しておく。)

2.4 変分原理

(「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明しておく。)
任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2}\|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎函数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $\quad I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w].$

(すなわち汎関数 $I \colon X_{g_1} \to \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

2.4 変分原理

(「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明しておく。)
任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2}\|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎函数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $\quad I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w].$

(すなわち汎関数 $I \colon X_{g_1} \to \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

定理 3.1 ((W)⇔(V))

u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解.

2.4 変分原理

（「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明しておく。）
任意の $u \in X_{g_1}$ に対して、

$$I[u] := \frac{1}{2}\|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎函数の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $\quad I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w].$

(すなわち汎関数 $I \colon X_{g_1} \to \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

定理 3.1 ((W)⇔(V))

u が (W) の解 ⇔ u が (V) の解.

微分方程式の解が、変分問題の解になることがある。それが成り立つ時、**変分原理**が成り立つという。平凡社「世界大百科事典」によると、「一般的に，物理的な現象を法則として述べるのに関与するある基本スカラー量があって，これを最小にするという条件から法則が導かれる場合，この法則の記述の仕方を変分原理と呼んでいる。」

ここまでのまとめ

Poisson 方程式の境界値問題 (P) を解こうとしているが、それと “ほぼ同値な” 2 つの問題 (W), (V) を導出した。

- 問題 (W) と問題 (V) は厳密に同値である。
- 問題 (P) の解であれば、問題 (W), (V) の解となる。
  逆に問題 (W), (V) の解が滑らかならば、問題 (P) の解になる。
  滑らかさの問題に目をつむると

  3 つの問題 (P), (W), (V) は互いに同値である。
- 有限要素法では (W) にある弱形式を用いる。
- 初回に Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題に対する Dirichlet 原理の話をした。前者が (P), 後者が (V) に対応している ($f = 0$, $\Gamma_2 = \emptyset$ とすると、問題 (P) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題になり、$I[u]$ は Dirichlet 積分 $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ の 1/2 である)。つまり初回にした話の一般化、詳細化をしたことになっている。

2.4 変分原理

定理の証明のための準備として、一つ公式を導いておく。

補題 3.2

$u \in X_{g_1}$, $v \in X$ とするとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$I[u+tv] = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + t\{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

特に ($t = 1$ として)

$$I[u+v] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

2.4 変分原理

定理の証明のための準備として、一つ公式を導いておく。

補題 3.2

$u \in X_{g_1}$, $v \in X$ とするとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$I[u+tv] = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + t\{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

特に ($t=1$ として)

$$I[u+v] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

証明は単純な計算である (ある種の内積計算, 二次関数の整理)。少し後に書いておく。

(2022/10/10 午後補筆) 2022/10/10 の授業では、この補題から定理 3.1 が得られることを軽く説明した後、スライド 12 までスキップしました。補題については「証明は単なる計算なので省略します。知りたい場合はスライドを読んでください。」と言いました。

定理 3.1 の証明

($\Leftarrow$) u を (V) の解とし、任意の $v \in X$ を取る。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに $u + tv \in X_{g_1}$. それゆえ

$$f(t) := I[u + tv] \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が定義されるが、仮定よりこれは $t = 0$ で最小値を取る。補題 3.2 により

$$f(t) = I[u + tv] = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + t\{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

この 2 次関数が $t = 0$ で最小となるには、1 次の項の係数が 0 でなければならない:

$$\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

これは弱形式 (2) に他ならない。ゆえに u は問題 (W) の解である。

($\Rightarrow$) u が (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、$v := w - u$ とおくと

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに $v \in X$. 補題3.2 により

$$I[w] - I[u] = I[u+v] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

u が弱形式 (2) を満たすという仮定から $\{\cdot\} = 0$ となることに注意すると

$$I[w] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 = \frac{1}{2}\|w-u\|^2 \geq 0.$$

ゆえに $I[u]$ は I の最小値である。すなわち u は問題 (V) の解である。 $\square$

余談 1

要は 2 次関数 $I[u]$ の最小化である。I の定義域は無限次元の空間であるが、そのような汎関数に対しても、(普通の微分を拡張した) Fréchet 微分というものが定義される。実は、I の Fréchet 微分は

$$I'[u] = \langle u, \cdot \rangle - (f, \cdot) - [g_2, \cdot].$$

(Cf. $i(u) = \frac{1}{2}u^2 - fu - g_2 u$ のとき、$i'(u) = u - f - g_2$)

そして、$I'[u] = 0$ は

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0 \qquad (v \in X)$$

となる。つまり、

弱形式は、変分問題の汎関数の Fréchet 微分係数 $= 0$ という条件

である。 □

2.4.1 補題 3.2 の証明

(1) $u \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ とするとき、Γ_1 上で

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1$$

であるから $u + tv \in X_{g_1}$.

$$\begin{aligned}
I[u+tv] &= \frac{1}{2}\|u+tv\|^2 - (f, u+tv) - [g_2, u+tv] \\
&= \frac{1}{2}\langle u+tv, u+tv\rangle - (f,u) - t(f,v) - [g_2,u] - t[g_2,v] \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + \|tv\|^2\right) - t(f,v) - [g_2,u] - t[g_2,v] \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - (f,u) - [g_2,u] + t\left\{\langle u,v\rangle - (f,v) - [g_2,v]\right\} + \frac{t^2}{2}\|v\|^2 \\
&= I[u] + t\left\{\langle u,v\rangle - (f,v) - [g_2,v]\right\} + \frac{t^2}{2}\|v\|^2.
\end{aligned}$$

(2) $u, w \in X_{g_1}$ とするとき、$v := w - u$ とおくと、$w = u + 1 \cdot v$. また Γ_1 上で

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0.$$

ゆえに $v \in X$. (1) を用いて

$$\begin{aligned} I[w] - I[u] &= I[u + 1 \cdot v] - I[u] = \frac{1^2}{2} \|v\|^2 + 1 \cdot \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} \\ &= \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}. \end{aligned}$$

$\square$

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、**Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一種である、といえる。

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、**Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一種である、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、**Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一種である、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

Ritz-Galerkin 法は、前回解説した弱解の方法の応用であると言える。
弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。
Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 $(\widehat{\text{V}})$, $(\widehat{\text{W}})$ の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、**Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一種である、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

Ritz-Galerkin 法は、前回解説した弱解の方法の応用であると言える。
弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。
Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 $(\widehat{\mathrm{V}})$, $(\widehat{\mathrm{W}})$ の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

変分問題の近似解法として、有名な Rayleigh (レイリー) などの研究 (“Theory of Sound” [2], [3]) もあったが、完成したのは Ritz である (**Ritz の方法**, Ritz [4])。

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、**Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一種である、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

Ritz-Galerkin 法は、前回解説した弱解の方法の応用であると言える。
弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。
Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 $(\widehat{\mathrm{V}})$, $(\widehat{\mathrm{W}})$ の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

変分問題の近似解法として、有名な Rayleigh (レイリー) などの研究 (“Theory of Sound” [2], [3]) もあったが、完成したのは Ritz である (**Ritz の方法**, Ritz [4])。

余談　私が勉強しはじめの頃は、Rayleigh-Ritz の方法とか、Rayleigh のみの名前がついたりしていた。Rayleigh 卿 (John William Strutt, “third Baron Rayleigh”, “Lord Rayleigh”, 1842–1919) は長生きした大物理学者、Ritz (Walter Ritz, 1878–1909) は若くしてなくなったという事情もあって、Ritz の名前は軽んじられ、そしてそれが孫引きされていたような気配が感じられる。

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法**である。

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法**である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で u や v の近似関数を作る。

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法**である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で u や v の近似関数を作る。より具体的には関数空間 X_{g_1}, X の有限次元近似 $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を作るため

(3) $$\hat{g}_1 \fallingdotseq g_1 \quad \text{on } \Gamma_1$$

(4) $$\psi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

となる $\hat{g}_1$ と、1 次独立な $\psi_i \in X$ $(i = 1, \cdots, m)$ を適当に選び、

(5) $$\hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

(6) $$\hat{X} := \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく。以下 $\{\psi_i\}$ のことを基底関数 (basis functions) と呼ぶ。

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解 u を $\hat{X}_{g_1}$ の要素 $\hat{u}$ で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 $(\widehat{\mathbf{W}})$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{7}$$

という問題を考える。

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解 u を $\hat{X}_{g_1}$ の要素 $\hat{u}$ で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 ($\widehat{\mathrm{W}}$)

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{7}$$

という問題を考える。

ちなみに、この分野の言葉遣いでは、$\hat{u}$ を**試行関数 (trial function)**, $\hat{v}$ を**試験関数 (test function)** と呼ぶ。

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解 u を $\hat{X}_{g_1}$ の要素 $\hat{u}$ で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 $(\widehat{\mathbf{W}})$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{7}$$

という問題を考える。

ちなみに、この分野の言葉遣いでは、$\hat{u}$ を**試行関数 (trial function)**, $\hat{v}$ を**試験関数 (test function)** と呼ぶ。

余談 2 (重み付き残差法)

ここでは試験関数の空間 $\hat{X}$ として、試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$ とよく似たもの (ともに ψ_i で張られている) を採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々なものが使われている (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法** (method of weighted residuals, weighted residual methods) と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、と言うことが出来る。

問題 $(\widehat{\mathrm{W}})$ の方程式 (7) が $\hat{v} \in \hat{X}$ につき線形で、$\hat{X}$ が $\{\psi\}_{i=1,2,\cdots,m}$ で張られることから、$(\widehat{\mathrm{W}})$ は、次の問題 $(\widehat{\mathrm{W}}')$ と同値であることが分かる。

問題 $(\widehat{\mathbf{W}}')$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{8}$$

問題 $(\widehat{\mathrm{W}})$ の方程式 (7) が $\hat{v} \in \hat{X}$ につき線形で、$\hat{X}$ が $\{\psi\}_{i=1,2,\cdots,m}$ で張られることから、$(\widehat{\mathrm{W}})$ は、次の問題 $(\widehat{\mathrm{W}}')$ と同値であることが分かる。

問題 $(\widehat{\mathbf{W}}')$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{8}$$

実際、$\psi_i \in \hat{X}$ であるから、$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が、(7) を満たすならば、(8) を満たす。

問題 $(\widehat{\mathrm{W}})$ の方程式 (7) が $\hat{v} \in \hat{X}$ につき線形で、$\hat{X}$ が $\{\psi\}_{i=1,2,\cdots,m}$ で張られることから、$(\widehat{\mathrm{W}})$ は、次の問題 $(\widehat{\mathrm{W}}')$ と同値であることが分かる。

問題 $(\widehat{\mathbf{W}}')$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{8}$$

実際、$\psi_i \in \hat{X}$ であるから、$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が、(7) を満たすならば、(8) を満たす。
逆に $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が (8) を満たすならば、任意の a_i をかけて i について加えることで

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i (f, \psi_i) + \sum_{i=1}^{m} a_i [g_2, \psi_i].$$

内積の線形性から

$$\langle \hat{u}, \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \rangle = \left(f, \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \right) + \left[g_2, \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \right].$$

これは (7) が成り立つことを意味する。 □

方程式 (8) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。

方程式 (8) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j $(j = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j$$

と表せる。

方程式 (8) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j $(j = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j$$

と表せる。これを (8) に代入すると

$$\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

方程式 (8) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j $(j = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j$$

と表せる。これを (8) に代入すると

$$\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

すなわち

$$\langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{9}$$

方程式 (8) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j $(j = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j$$

と表せる。これを (8) に代入すると

$$\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

すなわち

$$\langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{9}$$

この (9) を行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

3.1.4 連立 1 次方程式の導出

ゆえに

$$Aa = f, \tag{10}$$

ただし、

$$A := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = \left(\langle \psi_j, \psi_i \rangle \right),$$

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = \left((f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] - \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle \right).$$

3.1.4 連立 1 次方程式の導出

ゆえに

$$Aa = f, \tag{10}$$

ただし、

$$A := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = \left(\langle \psi_j, \psi_i \rangle \right),$$

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = \left((f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] - \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle \right).$$

f, g_2, $\hat{g}_1$, $\{\psi_i\}$ が与えられれば A, $\boldsymbol{f}$ は定まる。$\boldsymbol{u}$ は未知ベクトルである。

3.1.4 連立１次方程式の導出

ゆえに

$$Aa = f, \tag{10}$$

ただし、

$$A := \begin{pmatrix} \langle\psi_1,\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\psi_1,\psi_m\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_m\rangle \end{pmatrix} = (\langle\psi_j,\psi_i\rangle),$$

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} (f,\psi_1) + [g_2,\psi_1] - \langle\hat{g}_1,\psi_1\rangle \\ \vdots \\ (f,\psi_m) + [g_2,\psi_m] - \langle\hat{g}_1,\psi_m\rangle \end{pmatrix} = ((f,\psi_i) + [g_2,\psi_i] - \langle\hat{g}_1,\psi_i\rangle).$$

f, g_2, $\hat{g}_1$, $\{\psi_i\}$ が与えられれば A, $\boldsymbol{f}$ は定まる。$\boldsymbol{u}$ は未知ベクトルである。
この連立１次方程式 (10) が解を持つかどうか、次の命題で一般的に解決する。

補題 3.3 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (10) は一意可解である。

補題 3.3 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (10) は一意可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\})\ \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

補題 3.3 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (10) は一意可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

補題 3.3 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (10) は一意可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$) $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明 A の対称性 ($\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$) は明らかである。

補題 3.3 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (10) は一意可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$) $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明 A の対称性 ($\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$) は明らかである。$A$ の正値性を示す。任意の $\boldsymbol{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ に対して

$$\hat{v} := \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j$$

とおくと、ψ_j の 1 次独立性から $\hat{v} \neq 0$ であり、実は $\|\hat{v}\| > 0$ である。
($\because$ もしも $\|\hat{v}\| = 0$ ならば、$\|\cdot\|$ の定義から、$\hat{v}$ は定数関数であるが、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ から、$\hat{v}$ は少なくとも 1 点 (Γ_1 の任意の点) で 0 に等しく、$\hat{v} \equiv 0$ が導かれ、矛盾が生じる。)

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j, \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \boldsymbol{b}^\top A \boldsymbol{b}$$

となる。従って A は正値である。 □

注意 3.4 (記号 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$)

ここで $\boldsymbol{b}^\top$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ を転置して出来る横ベクトルである。

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j, \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \boldsymbol{b}^\top A \boldsymbol{b}$$

となる。従って A は正値である。 □

注意 3.4 (記号 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$)

ここで $\boldsymbol{b}^\top$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$ は、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ の内積に他ならない。

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j, \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \boldsymbol{b}^\top A \boldsymbol{b}$$

となる。従って A は正値である。 □

注意 3.4 (記号 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$)

ここで $\boldsymbol{b}^\top$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$ は、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に $\mathbb{C}^m$ において、$\boldsymbol{b}^* \boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積である。

10 月 10 日の授業では、次の §3.2 は省略して、§3.3 を説明し、そこで時間切れとなりました。§3.4 以降は、次回の授業に回します。

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法**である。具体的には次の問題を考える。

問題 $(\widehat{\mathrm{V}})$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t. $I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}]$.

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法**である。具体的には次の問題を考える。

問題 ($\widehat{\mathbf{V}}$)

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t. $I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}]$.

前回証明した (W) と (V) の同値性と同様に、($\widehat{\mathrm{W}}$) と ($\widehat{\mathrm{V}}$) も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める連立 1 次方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法**と呼ばれる。

ちなみに ($\sum$ や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$
\begin{aligned}
I[\hat{u}] = \frac{1}{2}\|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i\langle \hat{g}_1, \psi_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j\rangle - (f, \hat{g}_1) \\
- \sum_{i=1}^{m} a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^{m} a_i [g_2, \psi_i]
\end{aligned}
$$

となる。

[1] $\dfrac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$ に注意。一般に $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とするとき、$\nabla f(x) = \dfrac{1}{2}(A + A^\top)x + b$ となる。特に A が対称ならば $\nabla f(x) = Ax + b$. 1 変数の $\left(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c\right)' = ax + b$ の拡張。

ちなみに ($\sum$ や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$I[\hat{u}] = \frac{1}{2}\|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i\langle \hat{g}_1, \psi_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j\rangle - (f, \hat{g}_1) - \sum_{i=1}^{m} a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^{m} a_i [g_2, \psi_i]$$

となる。これから極値の条件は [1]

$$0 = \frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_i} = \langle \hat{g}_1, \psi_i\rangle + \sum_{j=1}^{m} a_j \langle \psi_j, \psi_i\rangle - (f, \psi_i) - [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

これは、もちろん Galerkin 法で得た (9) と同じである。

---

[1] $\dfrac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$ に注意。一般に $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とするとき、$\nabla f(x) = \dfrac{1}{2}(A + A^\top)x + b$ となる。特に A が対称ならば $\nabla f(x) = Ax + b$. 1 変数の $\left(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c\right)' = ax + b$ の拡張。

やってみよう　$\nabla(\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c)=\frac{1}{2}(A^\top+A)x+b$

微積分の授業などで聴いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数 2 次関数の微分をやってみることを勧める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}x_kx_j+\sum_{k=1}^{n} b_kx_k+c.\end{aligned}$$

これを x_i で偏微分すると？

やってみよう　$\nabla(\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c)=\frac{1}{2}(A^\top+A)x+b$

微積分の授業などで聴いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数 2 次関数の微分をやってみることを勧める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c.\end{aligned}$$

これを x_i で偏微分すると？ (スライド PDF の末尾を見よ。)

定理 3.5 (誤差最小の原理)

Ritz–Galerkin 解 $\hat{u}$ は $\hat{X}_{g_1}$ の中で（ある意味で）最も u に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、u から超平面 $\hat{X}_{g_1}$ への射影 $\hat{u}$ の図を板書する。)

3.3 誤差最小の原理

証明　まず $\hat{u}$ は、u から $\hat{X}_{g_1}$ に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。
弱形式

$$\langle u, v\rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$
$$\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

証明　まず $\hat{u}$ は、u から $\hat{X}_{g_1}$ に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。
弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

3.3 誤差最小の原理

証明　まず $\hat{u}$ は、u から $\hat{X}_{g_1}$ に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。
弱形式

$$\langle u, v\rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v}\rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$ に対して、$\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$ ゆえ、$\hat{v}$ のところに $\hat{u} - \hat{w}$ を代入して

$$(\hat{u}\ \text{は垂線の足}) \qquad \langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w}\rangle = 0.$$

証明　まず $\hat{u}$ は、u から $\hat{X}_{g_1}$ に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。
弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$
$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$ に対して、$\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$ ゆえ、$\hat{v}$ のところに $\hat{u} - \hat{w}$ を代入して

$$(\hat{u} \text{ は垂線の足}) \qquad \langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w} \rangle = 0.$$

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。

3.3 誤差最小の原理

証明　まず $\hat{u}$ は、u から $\hat{X}_{g_1}$ に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。弱形式

$$\langle u, v\rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$
$$\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v}\rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$ に対して、$\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$ ゆえ、$\hat{v}$ のところに $\hat{u} - \hat{w}$ を代入して

($\hat{u}$ は垂線の足)　$\langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w}\rangle = 0.$

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。これから

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。 □

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、$\{\psi_i\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、$\{\psi_i\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 3.6 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式？) の境界値問題を考えよう。

$$
\left\{\begin{array}{ll} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{array}\right. \tag{11}
$$

ここで f は開区間 $(0,1)$ 上定義された既知関数である。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、$\{\psi_i\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 3.6 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式？) の境界値問題を考えよう。

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{cases}$$

ここで f は開区間 $(0,1)$ 上定義された既知関数である。

$\Omega = (0,1)$, $\Gamma_1 = \Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 = 0$ である。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、$\{\psi_i\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 3.6 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式？) の境界値問題を考えよう。

$$\begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

ここで f は開区間 $(0,1)$ 上定義された既知関数である。

$\Omega = (0,1)$, $\Gamma_1 = \Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 = 0$ である。

$\hat{g}_1 = 0$ とするのが自然である。$\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \mathrm{Span}\{\psi_1, \cdots, \psi_m\}$ となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \le j \le m)$$

とおくと $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$ すなわち $\psi_j = 0$ on Γ_1 $(1 \le j \le m)$ であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。

$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ は、次のように表せる。

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j(x). \tag{12}$$

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、$[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、$[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = \left(\psi_j', \psi_i'\right) = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x)\cos(i\pi x)dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2=\emptyset$ であるから、$[g_2,\cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat u, \hat v\rangle = (f, \hat v) \quad (\hat v \in \hat X).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i\rangle = (\psi_j', \psi_i') = ij\pi^2\int_0^1 \cos(j\pi x)\cos(i\pi x)dx = \frac{1}{2}ij\pi^2\delta_{ij}$$

であるから

$$A = (\langle \psi_j, \psi_i\rangle) = \frac{\pi^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、$[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = \left(\psi_j', \psi_i'\right) = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x) \cos(i\pi x) dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Huge 0} \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Huge 0} & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Huge 0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Huge 0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

ゆえに

$$\boldsymbol{a} = A^{-1}\boldsymbol{f} = \frac{2}{\pi^2}\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (f,\psi_1) \\ (f,\psi_2) \\ (f,\psi_2) \\ \vdots \\ (f,\psi_m) \end{pmatrix},$$

$$(f,\psi_i) = \int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx.$$

ゆえに

$$a_i = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{i^2}\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{13}$$

念のためもう一度書いておく。

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \sin(j\pi x). \tag{再掲 12}$$

(12), (13) で定まる $\hat{u}$ が問題 (11) の Ritz-Galerkin 解である。

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (12), (13) を導くのは簡単である (やってみよう)。

例 3.6 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (12), (13) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- ψ_j は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ の固有関数である。これは "対称な作用素" であるため、直交性

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\psi_i, \psi_j) = 0$$

が成り立つ。さらに

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

が成り立ち、係数行列 A が対角行列となって、計算が簡単になっている。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば (同じことだから)。

例 3.7 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ において、Poisson 方程式 $-\triangle u=f$ に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ($\Gamma_1=\Gamma$, $g_1=0$ である)。このとき $\{\psi_k\}$ として

$$\varphi_{ij}(x,y)=\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)\quad(1\le i,j\le m)$$

を採用するのが便利である (ここで $m\in\mathbb{N}$)。弱形式は上の例と同様に

$$\langle\hat u,\hat v\rangle=(f,\hat v)\quad(\hat v\in\hat X:=\mathrm{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle\varphi_{k\ell},\varphi_{ij}\rangle=\frac{\pi^2}{4}(ki+\ell j)\delta_{ki}\delta_{\ell j}\quad(1\le i,j,k,\ell\le m)$$

さて

$$\hat u=\sum_{k=1}^m\sum_{\ell=1}^m a_{k\ell}\varphi_{k\ell}$$

とおくと、

例 3.7 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\langle \hat{u}, \varphi_{ij}\rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell}\langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij}\rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}\langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij}\rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2(i^2+j^2)}(f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m).$$

例えば $f \equiv 1$ (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1\int_0^1 \sin(i\pi x)\sin(j\pi y)dxdy = \frac{\left[(-1)^{i+1}+1\right]\left[(-1)^{j+1}+1\right]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{ij} & (i,\ j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{16}{ij(i^2+j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \cdots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

1. 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
2. Neumann 境界条件の処理が楽。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

1. 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
2. Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

3. 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

1. 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
2. Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

3. 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

余談 3 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が加藤 [5] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「*I* 君の固有値問題」　*(1992/11)*

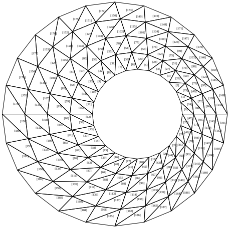
そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次回から有限要素法の話に突入する。
有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

- 領域を
  - *1 次元の場合* 区間
  - *2 次元の場合* 三角形, 四角形
  - *3 次元の場合* 三角錐, 四面体

  などの簡単な図形 — **有限要素 (finite element)** と呼ぶ — に分割する:



$$\overline{\Omega} \fallingdotseq \widehat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{m} e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ($\widehat{\Omega}$ で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

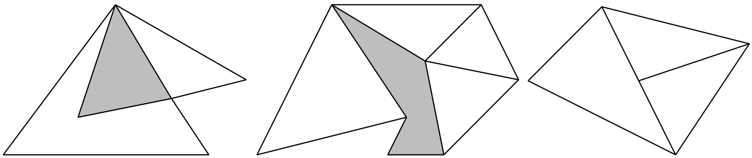


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかまで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

やってみよう の解答

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_k \cdot x_j + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_k + \frac{\partial}{\partial x_i} c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(\delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \delta_{ik} + 0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ik} + \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\delta_{ij}\right) + b_i \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k\right) + b_i \\
&= \frac{1}{2}\left(Ax \text{ の第 } i \text{ 成分} + A^{\top} x \text{ の第 } i \text{ 成分}\right) + b \text{ の第 } i \text{ 成分} \\
&= \frac{1}{2}(A + A^{\top})x + b \text{ の第 } i \text{ 成分}.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\nabla\left(\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c\right) = \frac{1}{2}(A + A^{\top})x + b.
$$

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

[2] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 1*, London, Macmillan and co. (1877).

[3] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 2*, London, Macmillan and co. (1878).

[4] Walter Ritz, von : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik Volume 333, Issue 4*, pp. 737–786, (1909), Ritz の方法が述べられている.

[5] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).