応用数値解析特論 第 4 回

〜1 次元 Poisson 方程式に対する有限要素法〜

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2022/

2022 年 10 月 17 日

目次

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

Ritz-Galerkin 法で実際に問題を解くとき、基底関数 $\{\psi_i\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 4.1 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式？) の境界値問題を考えよう。

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで f は開区間 $(0,1)$ 上定義された既知関数である。

$\Omega = (0,1)$, $\Gamma_1 = \Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 = 0$ である。

$\hat{g}_1 = 0$ とするのが自然である。$\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \mathrm{Span}\{\psi_1, \cdots, \psi_m\}$ となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \le j \le m)$$

とおくと $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$ すなわち $\psi_j = 0$ on Γ_1 $(1 \le j \le m)$ であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。

$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ は、次のように表せる。

$$(2) \qquad \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j(x).$$

例 4.1 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、$[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = \left(\psi_j', \psi_i'\right) = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x)\cos(i\pi x)dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$

例 4.1 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

ゆえに $A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}$ の解は

$$\boldsymbol{a}=A^{-1}\boldsymbol{f}=\frac{2}{\pi^2}\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}(f,\psi_1)\\(f,\psi_2)\\(f,\psi_2)\\ \vdots \\ (f,\psi_m)\end{pmatrix},$$

$$(f,\psi_i)=\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx.$$

ゆえに

$$a_i=\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{i^2}\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx \quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{3}$$

念のためもう一度書いておく。

(再掲 2)
$$\hat{u}(x)=\sum_{j=1}^m a_j\sin(j\pi x).$$

例 4.1 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (2), (3) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- ψ_j は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ の固有関数である。これは "対称な作用素" であるため、直交性

  $$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\psi_i, \psi_j) = 0$$

  が成り立つ。さらに

  $$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

  が成り立ち、係数行列 A が対角行列となって、計算が簡単になっている。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

(授業中に書いたことをメモ その 1)

u は $u(0) = u(1) = 0$ を満たすので

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(j\pi x)$$

と Fourier 級数展開できるはず。これから次が期待できる (収束は弱くなるかも)。

$$-u''(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (j\pi)^2 \sin(j\pi x).$$

f も (境界条件がないので強い意味の収束とはならないが)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \sin(j\pi x), \quad f_j := 2\int_0^1 f(x)\sin(j\pi x)dx$$

と展開できることが期待できる。$-u'' = f$ より

$$a_j = \frac{1}{(j\pi)^2} f_j.$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

(授業中に書いたことをメモ その 2) Fourier 級数の入門講義では、sin と cos, 複素指数関数 e^{inx} による展開を学ぶが、より一般に対称 (正確には自己共役) 微分作用素の固有関数による展開というのが成り立つ。

その観点からは $i \neq j \Rightarrow (\psi_i, \psi_j) = 0$ は偶然ではない (「異なる固有値に属する固有関数は互いに直交する」)。

さらに部分積分 (Green の公式) により、$i \neq j$ ならば

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = (\psi_i', \psi_j') = -(\psi_i'', \psi_j) = (i\pi)^2 (\psi_i, \psi_j) = (i\pi)^2 \cdot 0 = 0.$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば説明する (同じだから省略しても良いだろう)。

例 4.2 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ において、Poisson 方程式 $-\triangle u = f$ に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ($\Gamma_1 = \Gamma$, $g_1 = 0$ である)。このとき $\{\psi_k\}$ として

$$\varphi_{ij}(x,y) = \sin(i\pi x)\sin(j\pi y) \quad (1 \le i,j \le m)$$

を採用するのが便利である (ここで $m \in \mathbb{N}$)。弱形式は上の例と同様に

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \mathrm{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = \frac{\pi^2}{4}(ki + \ell j)\delta_{ki}\delta_{\ell j} \quad (1 \le i,j,k,\ell \le m)$$

さて

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell}\varphi_{k\ell}$$

とおくと、

例 4.2 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i,j \le m) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i,j \le m)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i,j \le m)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2(i^2+j^2)}(f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i,j \le m).$$

例えば $f \equiv 1$ (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x)\sin(j\pi y)dxdy = \frac{\left[(-1)^{i+1}+1\right]\left[(-1)^{j+1}+1\right]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{ij} & (i,\ j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{16}{ij(i^2+j^2)\pi^4} & (i,j = 1,3,5,7,\cdots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を述べておこう。

1. 基底関数として固有関数を使うことが多い。その場合適用範囲が狭い。
2. Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

3. 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

余談 1 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が変分法のテキストである加藤 [2] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「*I* 君の固有値問題」 *(1992/11)*

そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

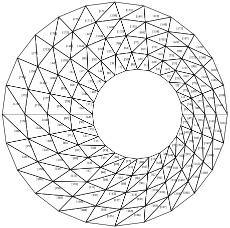
この計算では固有関数は使っていない。必ずしも固有関数が要るわけではない。

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次節 (§4) から有限要素法の話に突入する。
有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

- 領域を
  - *1 次元の場合* 区間
  - *2 次元の場合* 三角形, 四角形
  - *3 次元の場合* 三角錐, 四面体

  などの簡単な図形 — **有限要素 (finite element)** と呼ぶ — に分割する:



$$\overline{\Omega} \fallingdotseq \widehat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{m} e_k \quad (e_k \text{ は有限要素 — ここでは三角形}).$$

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ($\widehat{\Omega}$ で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

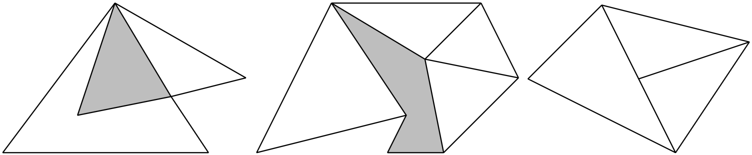


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかまで考える場合がある。その辺の “言葉の使い方” について言及すべきかも。)

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間 2 次元, 3 次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に直接剛性法) を理解するために、1 次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

このすぐ後に説明する 2 次元の場合を分かりやすくするためという趣旨である (いきなり全部やると大変)。

以上は、菊地 [1] を踏襲したものだが、私自身の経験から「分かりやすい」と思っている。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

(4)
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0,1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで f は $(0,1)$ 上定義された既知の関数、α と β は既知の実定数である。(要するに $n = 1$, $\Omega = (0,1)$, $\Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ である。)

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(I) \mid w(0) = \alpha \right\}, \quad X := \left\{ v \in H^1(I) \mid v(0) = 0 \right\},$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx, \quad (f, v) := \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

とおくと、(4) の弱解とは、弱形式

(5)
$$\langle u, v \rangle = (f, v) + \beta v(1) \quad (v \in X)$$

を満たす $u \in X_{g_1}$ のことである。

4.2 有限要素解の定義　要点

要点はすでに予告してある。

有限要素法は区分的多項式を試行関数、試験関数に用いる Ritz-Galerkin 法である。

一般に、X_{g_1}, X の有限次元近似 $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を定めて、(1 つの) Ritz-Galerkin 解が定義される。

区分的多項式というものを定義して、それを用いて適切に $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を定めることで有限要素解が定義できる。

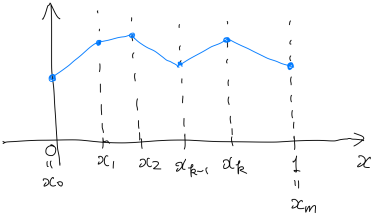
4.2.1 有限要素, 区分 1 次多項式

区間 $[0,1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i $(0 \le i \le m)$ を**節点** (**node**) と呼ぶ。
区間 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \cdots, m)$ を**有限要素** (**finite element**) と呼ぶ。

区間 $[0,1]$ 全体で連続で、各要素 e_k 上で 1 次関数に等しい関数を**区分的 1 次多項式**と呼び、区分的 1 次多項式の全体を $\widetilde{X}$ と表す。$\dim \widetilde{X} = m+1$ である。



試行関数 (近似解) $\hat{u}$, 試験関数 $\hat{v}$ として、区分的 1 次多項式を採用しよう。言い換えると、試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$, 試験関数の空間 $\hat{X}$ は、$\hat{X}_{g_1} \subset \widetilde{X}$, $\hat{X} \subset \widetilde{X}$ を満たすよう定める。

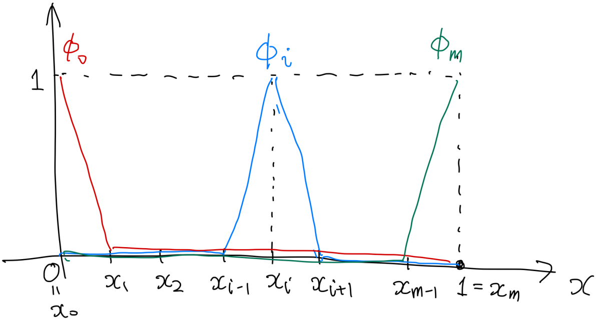
4.2.2 区分的 1 次多項式の空間の基底関数

$\tilde{X}$ の 基底関数として、以下に定義する $\{\phi_i\}_{i=0}^m$ を採用できる。

ϕ_i の定義

ϕ_i は区分的 1 次多項式で、x_i では 1, 他の節点 x_j $(j \neq i)$ では 0 という値を取る:

1. $\phi_i \in C[0,1]$
2. $(\forall k \in \{1, \cdots, m\})\ (\exists p, q \in \mathbb{R})\ (\forall x \in e_k)\ \phi_i(x) = px + q$
3. $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$.



4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

次の性質が基本的である。

補題 4.3 (基底関数 ϕ_i の性質)

$w_i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le m)$ に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x)$$

とおくと

$$\hat{w}(x_j) = w_j \quad (0 \le j \le m).$$

すなわち ϕ_j の係数 w_j は、節点 x_j における関数値である。

証明.

任意の $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$ に対して

$$\hat{w}(x_j) = \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^{m} w_i \delta_{ij} = w_j \delta_{jj} = w_j.$$

□

4.2.3 有限要素空間, 有限要素解

試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$ と試験関数の空間 $\hat{X}$ として、次のものを採用する。

$$\hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{w} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{w}(0) = \alpha \right\}, \quad \hat{X} := \left\{ \hat{v} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{v}(0) = 0 \right\}.$$

基底関数を用いて表すと

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}, \tag{6}$$

$$\hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}. \tag{7}$$

このとき定まる Ritz-Galerkin 解を $\hat{u}$ とする。すなわち $\hat{u}$ は

$$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}, \tag{8a}$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{8b}$$

を満たす。この $\hat{u}$ を区分的 1 次要素 (P1 要素) を用いた **有限要素解** と呼ぶ。

4.2.4 蛇足の話

(実は必要がないのだけれど) 式で書くと、$1 \le i \le m-1$ に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = 0$ に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$ に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このように式で書けるけれど、そうしてもほとんど使いみちがない。

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ **を満たす連続な区分的 1 次関数**ということと、**グラフのイメージ**を覚えた方がよい。

4.3 有限要素解を求めるアルゴリズム

前項までに有限要素解 $\hat{u}$ は定義された。$\hat{u}$ は

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i\phi_i$$

と表すことができるが、u_i を並べた

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^\top$$

について、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}^*$ が得られることは原理的に分かっている。

しかし、$A = (\langle\phi_j, \phi_i\rangle)$ や $\boldsymbol{f}^*$ を実際に計算するのは、やり方を知らないと案外難しい。有限要素法ではこのあたりが良く整備されていて、明快なアルゴリズムが確立されている。

有限要素 e_k ごとに、要素係数行列、要素自由項ベクトルというものを求め、それから A と $\boldsymbol{f}$ を "組み立てる"。後半の操作を構造力学の用語にちなみ直接剛性法と呼ぶ (直接合成法ではない)。 …… 少し長い込み入った話になる。

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$\begin{aligned} L_0(x_{k-1}) &= 1, \quad L_0(x_k) = 0,\\ L_1(x_{k-1}) &= 0, \quad L_1(x_k) = 1 \end{aligned}$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の**長さ座標**と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

$$L_0 + L_1 \equiv 1 \tag{9}$$

が成り立つ。

また節点の座標 x_{k-1}, x_k を用いて

$$L_0(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \tag{10}$$

と具体的に表わせる (こちらは ϕ_i と違って、後でちょっと用いる)。

$\hat{w} \in \widetilde{X}$ に対して $w_i := \hat{w}(x_i)$ とおくと、次式が成り立つ:

$$\hat{w}(x) = w_{k-1}L_0(x) + w_k L_1(x) = \sum_{j=0}^{1} w_{k+j-1}L_j \quad (x \in e_k). \tag{11}$$

(たった 2 項なのに $\sum$ を使うのは大げさなようだけれど$\cdots$)

4.3.2 弱形式の分割

各要素 e_k について

(12) $$\langle u, v\rangle_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x)v'(x)dx, \qquad (f, v)_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)v(x)dx$$

とおくと、Galerkin 法の弱形式

(再掲 5) $$\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = (f, \hat{v}) + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

は

(13) $$\sum_{k=1}^{m} \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{m} (f, \hat{v})_{e_k} + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

と書き直せる ($\because \int_0^1 = \sum_{k=1}^{m} \int_{e_k}$)。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

このスライドの目標: $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k}$, $(f, \hat{v})_{e_k}$, $\hat{v}(1)$ を成分で表す。

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \left\langle \sum_{j=0}^{1} u_{k+j-1} L_j, \sum_{i=0}^{1} v_{k+i-1} L_i \right\rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{1} u_{k+j-1} v_{k+i-1} \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} v_{k+i-1} A_{ij}^{(k)} u_{k+j-1},$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}.$$

一方、

$$(f, \hat{v})_{e_k} = \left(f, \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} L_j \right)_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} (f, L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^{1} v_{k+j-1} f_j^{(k)},$$

ただし

$$f_j^{(k)} := (f, L_j)_{e_k}.$$

また $\widehat{v}(1) = v_m$ より

$$\beta \hat{v}(1) = \beta v_m.$$

2 次形式と行列を用いた表記

$x_1, \cdots, x_m$ に対する "純粋の 2 次式"

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \tag{14}$$

を 2 次形式とよぶ

$A := (a_{ij})$ とおくと、A は m 次正方行列であるが

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \right) = Ax \text{ と } x \text{ の内積} = x^\top Ax.$$

ここで $^\top$ は転置 (transpose) を表す。$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ である。

A を 2 次形式 (14) の係数行列とよぶ。普通は対称行列を選ぶ。

((14) という書き方には冗長性があるので、$a_{ij} = a_{ji}$ という条件を課すことができる。例えば $3x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_1x_2 + 2x_2x_1$ と書き直せる。)

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

このスライドの目標: $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k}$, $(f, \hat{v})_{e_k}$, $\hat{v}(1)$ をベクトル、行列で表す。

そこで

$$\text{(15a)} \qquad \boldsymbol{u}_k := \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_k := \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\text{(15b)} \qquad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\text{(15c)} \qquad \boldsymbol{g}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

とおくと、次式が得られる。

$$\text{(16)} \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k \quad (k = 1, \cdots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \boldsymbol{v}_m^\top \boldsymbol{g}_m.$$

$\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{v}_k$ は**要素節点パラメーター・ベクトル**、$\boldsymbol{f}_k$ は**要素自由項ベクトル**、A_k は**要素係数行列**と呼ばれる。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

プログラムを読み書きするときのために、実際に A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求めよう。

$$\langle L_i, L_j \rangle_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_i'(x) L_j'(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{(x_k - x_{k-1})^2} dx = \frac{\varepsilon}{x_k - x_{k-1}},$$

$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -1 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

一方

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) L_j(x) dx \quad (j = 0, 1).$$

この右辺の積分は、f に応じて何らかの手段 (例えば数値積分) で計算しておく。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

(このスライドはスキップしても良い。)

f が複雑な関数の場合は、$f_j^{(k)}$ は厳密に計算できないかもしれないが、節点での値さえ分かれば近似計算 (数値積分) は難しくない。例えば

$$f \fallingdotseq f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1 \quad (\text{on } e_k)$$

と 1 次補間近似を利用して

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} \fallingdotseq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

$x = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})t$ $(0 \le t \le 1)$ と変数変換して

$$(L_0, L_0)_{e_k} = (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t^2\, dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{3},$$

$$(L_0, L_1)_{e_k} = (L_0, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t(1-t)\, dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f}_k \fallingdotseq \frac{(x_k - x_{k-1})}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

以下の話で必要になる式を再掲しておく。

弱形式は次のように書き直される。

(19) $$\sum_{k=1}^{m} \langle \hat u, \hat v \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{m} (f, \hat v)_{e_k} + \beta \hat v(1) \quad (\hat v \in \hat X)$$

$\boldsymbol{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}$, さらに $\boldsymbol{f}_k$, A_k, $\boldsymbol{g}_m$ を適当に定義すると

(20) $$\langle \hat u, \hat v \rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k, \quad (f, \hat v)_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k \quad (k = 1, \cdots, m),$$

(21) $$\beta \hat v(1) = \boldsymbol{v}_m^\top \boldsymbol{g}_m.$$

(19) に代入して

(22) $$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{f}_k + \boldsymbol{v}_m^\top \boldsymbol{g}_m.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(15a), (15b), (15c) で与えたベクトル、行列を $m+1$ 次元に拡大する。まず

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。繰り返しになるが、$u_i = \hat{u}(x_i)$, $v_i = \hat{v}(x_i)$.

$\boldsymbol{f}_k$, A_k, $\boldsymbol{g}_m^*$ については、0 を補って、$\mathbb{R}^{m+1}$ や $M(m+1;\mathbb{R})$ の元に拡大する:

$$\boldsymbol{f}_k^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^* := \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & 0 \\ & A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \quad (k=1,\cdots,m), \quad \boldsymbol{g}_m^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

これらを用いると ($\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top A_k \boldsymbol{u}_k$, $(f,\hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_k^\top f_k$, $\beta\hat{v}(1) = \boldsymbol{v}_m^\top \boldsymbol{g}_m$ であるから)

(23) $\quad \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{e_k} = \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u}, \quad (f,\hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}^\top f_k^* \quad (k=1,2,\cdots,m), \quad \beta\hat{v}(1) = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^*.$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(23) を用いると、弱形式を書き直した (22) はさらに次のように書き直される。

(24) $$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{g}_m^* \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

ここで Y は、$\hat{v} = \sum_{i=0}^{m} v_i \phi_i$ が $\hat{X}$ に属するような $\boldsymbol{v} = (v_0, \cdots, v_m)^\top$ の全体、すなわち

$$Y := \left\{ (v_0, v_1, \cdots, v_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; v_0 = 0 \right\}.$$

(24) は

$$\boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{m} A_k^* \right) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^* \right) \quad (\boldsymbol{v} \in Y)$$

と書き直せる。ゆえに

(25) $$\boldsymbol{A}^* := \sum_{k=1}^{m} A_k^*, \quad \boldsymbol{f}^* := \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^*$$

とおけば

(26) $$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^*) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in Y).$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 26)
$$\boldsymbol{v}^\top(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}^*)=0 \quad (\boldsymbol{v}\in Y).$$

これは次と同値である。

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}\in Y^\perp=\left\{(\lambda,0,\cdots,0)^\top\in\mathbb{R}^{m+1}\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

つまりは

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}^*)\text{ の最初の成分以外}=0.$$

すなわち

(27)
$$A^{**}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}^{**}.$$

ここで

$$A^{**}:=\boldsymbol{A}^*\text{ の第 0 行を除いた } m\times(m+1)\text{ 行列},$$
$$\boldsymbol{f}^{**}:=\boldsymbol{f}^*\text{ の第 0 成分を除いた } m\text{ 次元縦ベクトル}.$$

部分配列を表すための MATLAB 風の記法を使うと、$A^{**}=A^*(1:m,0:m)$, $\boldsymbol{f}^{**}=\boldsymbol{f}^*(1:m)$ と書ける。この記法は便利なので以下でも使うことにする。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

A^{**} は正方行列ではない。しかし $\boldsymbol{u}$ の成分のうち u_0 は未知ではない: $u_0 = \hat{u}(0) = \alpha$.
その部分を右辺に移項しよう。

$$\boldsymbol{u}^* := \boldsymbol{u} \text{ の第 0 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル} = (u_1, \cdots, u_m)^\top$$

$$\text{i.e.} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{u}^* \end{pmatrix},$$

$$A := A^{**} \text{ の第 0 列を除いた } m \text{ 次正方行列}$$

$$\text{i.e.} \quad A^{**} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array} \right), \quad A := \begin{pmatrix} A^*_{11} & \cdots & A^*_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A^*_{m1} & \cdots & A^*_{mm} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$A^{**}\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{10} & \\ \vdots & A \\ A^*_{m0} & \end{array} \right) \left(\frac{\alpha}{\boldsymbol{u}^*} \right) = \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{m0} \end{pmatrix} \alpha + A\boldsymbol{u}^* = \alpha \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{m0} \end{pmatrix} + A\boldsymbol{u}^*.$$

$\boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A^*_{10} \\ \vdots \\ A^*_{mn} \end{pmatrix}$ とおけば、(27) $A^{**}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{**}$ は、$A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}$ に書き換えられる。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

以上のように、局所的な (要素の) 情報から方程式を組み立てる操作を**直接剛性法** (direct stiffness method) という。

(参考情報: 「直接剛性法」は、有限要素法の直接のルーツである**構造力学**に由来する用語である。構造力学の問題において、A は剛性行列という名前が付いている。)

次のことを覚えておくとよい。

- 係数行列は Dirichlet 境界条件を課す節点の節点番号の行と列を除いたもの
- Dirichlet 境界条件の情報は右辺のベクトルに組み込む
- 未知数は節点パラメーターであり、基底関数は節点に対応して作る

4.3.5 具体的にすることのまとめ (1 枚で十分)

第 1 段　各要素 e_k $(k = 1, 2, \dots, m)$ について、A_k, $\boldsymbol{f}_k$ を求める:

$$A_k = \begin{pmatrix} \langle L_0, L_0\rangle_{e_k} & \langle L_1, L_0\rangle_{e_k} \\ \langle L_0, L_1\rangle_{e_k} & \langle L_1, L_1\rangle_{e_k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} f(x_{k-1})(L_0, L_0)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_0)_{e_k} \\ f(x_{k-1})(L_0, L_1)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_1)_{e_k} \end{pmatrix},$$

$$\langle L_j, L_i\rangle_{e_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i = j) \\ -\dfrac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i \neq j), \end{cases} \qquad (L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} \dfrac{x_k - x_{k-1}}{3} & (i = j) \\ \dfrac{x_k - x_{k-1}}{6} & (i \neq j) \end{cases}$$

を計算して、それを $m+1$ 次正方行列 A_k^*, $m+1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{f}_k^*$ に拡大して、

$$A^* := \sum_{k=1}^m A_k^*, \quad \boldsymbol{f}^* := \sum_{k=1}^m \boldsymbol{f}_k^* + \boldsymbol{g}_m^*,$$

それから $A := A^*(1:m, 1:m), \quad \boldsymbol{f}^{**} := \boldsymbol{f}^*(1:m), \quad \boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A_{10} \\ \vdots \\ A_{m0} \end{pmatrix}.$

第 2 段　連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}$ を解いて $u_1, \cdots, u_m$ を求めて

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^m u_i \psi_i.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

$\overline{\Omega} = \overline{(0,1)} = [0,1]$ を 4 等分して、各小区間を有限要素と考える。つまり $m=4$ で

$$x_i := ih \quad (i = 0,1,2,3,4),$$

ただし $h = 1/4$. そして

$$e_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1,2,3,4).$$

すると

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix}, \quad f_j^{(k)} = \int_{e_k} f(x) L_j(x)\, dx \quad (L_j \text{ は } k \text{ によるので記号が変}),$$

$$\boldsymbol{g}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

特に (簡単のため) $f(x) \equiv \overline{f}$ (定数関数) とすると、

$$f_j^{(k)} = \frac{\overline{f}h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

$$
\begin{aligned}
A^* &= A_1^* + A_2^* + A_3^* + A_4^* \\
&= \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^* &= \boldsymbol{f}_1^* + \boldsymbol{f}_2^* + \boldsymbol{f}_3^* + \boldsymbol{f}_4^* + \boldsymbol{g}_4^* \\
&= \frac{\overline{f}h}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\overline{f}h}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\overline{f}h}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\overline{f}h}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \overline{f}h\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

最後に $u_0 = u(0) = \alpha$ を代入して u_0 を消去すると

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \overline{f} h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この最後の方程式は、(仮想格子点を導入して、Neumann 境界条件を中心差分近似した) 差分法で得られる連立 1 次方程式と同じである。つまり

- 規則的な有限要素分割をしたとき、有限要素法は差分法と近い。
- 差分法で自明でない工夫 (仮想格子点の導入) をして得られた Neumann 境界条件の近似に相当することが、有限要素法ではごく自然に得られる。有限要素法は Neumann 境界条件の近似に強い。

4.4 連立 1 次方程式の具体形

(おまけ) 最後に、境界条件を $(u(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta$ から)

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

に替えた、Dirichlet 境界値問題を調べておこう。この場合は、次の連立 1 次方程式が得られる。

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overline{f}h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \beta/h \end{pmatrix}.$$

以下に紹介する C プログラム `fem1d.c` は

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/fem1d.c`

に置いてある。現象数理学科 Mac ならば、ターミナルから

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/fem1d.c
```

で入手できる。コンパイル、実行の仕方はプログラムの先頭部分に注釈として書いてある。

このプログラムが対象としている問題は、$f \equiv 1$ で、境界条件は同次、すなわち $\alpha = \beta = 0$ の場合である。具体的に書き下すと

$$-u'' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0. \tag{28}$$

この問題の厳密解は $u(x) = x(2-x)/2$ である。

4.5.2 プログラムの解説

- `main()` を読むと分かるように、最初に
  - `nnode` 総節点数 (the number of nodes)
  - `nelmt` 総要素数 (the number of elements)
  - `nbc` ディリクレ境界にある接点の個数 (1 または 2)
  - `x[]` 節点の座標
  - `ibc` ディリクレ境界にある接点の節点番号

  を決めている。
- 連立 1 次方程式を構成するのは、関数 `assem()` で行っている (assemblage)。作業内容は 3 つに分かれる。
  1. `am`, `fm` を 0 クリアする。
  2. すべての有限要素について、要素係数行列 `ae`, 要素自由ベクトル `fe` を関数 `ecm()` で計算して (element coefficient matrix)、それぞれ全体係数行列 `am`、全体自由項ベクトル `fm` に算入する。
  3. ディリクレ境界上にある節点に対応する部分を修正する。

4.5.2 プログラムの解説

- 関数 `ecm()` で必要となる事項の復習。$e_k = [x_{k-1}, x_k]$ とすると、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} (f, L_0)_{e_k} \\ (f, L_1)_{e_k} \end{pmatrix}$$

であったが、f を

$$f(x) \fallingdotseq f(x_{k-1})L_0(x) + f(x_k)L_1(x) \quad (x \in e_k)$$

と 1 次近似することにすれば、

$$\boldsymbol{f}_k \fallingdotseq \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}.$$

4.5.3 実験

fem1d.c のコンパイル＆実行＆ gnuplot によるグラフ描画

```
$ cc -o fem1d fem1d.c
$ ./fem1d
nodal values of u (節点での u の値)
   i      u         i      u         i      u
   0   0.000e+00    1   9.500e-02    2   1.800e-01
   3   2.550e-01    4   3.200e-01    5   3.750e-01
   6   4.200e-01    7   4.550e-01    8   4.800e-01
   9   4.950e-01   10   5.000e-01
$ cat fem1d.out
0.000000 0.000000
0.100000 0.095000
0.200000 0.180000
0.300000 0.255000
0.400000 0.320000
0.500000 0.375000
0.600000 0.420000
0.700000 0.455000
0.800000 0.480000
0.900000 0.495000
1.000000 0.500000
$ gnuplot
gnuplot> plot "fem1d.out" with lp, x*(2-x)/2
```

4.5.3 実験

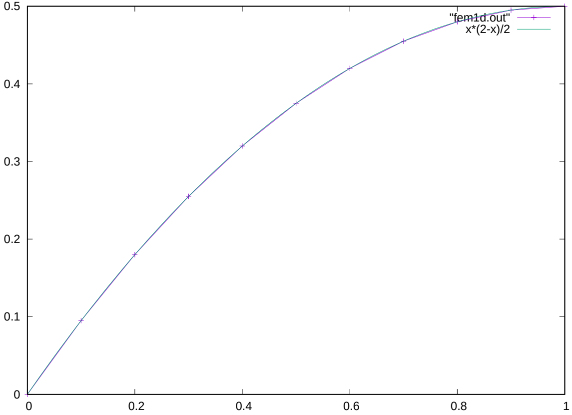


図 2: fem1d.c の計算結果 (m=10) と厳密解 $\frac{x(2-x)}{2}$ のグラフを重ね書き

4.5.4 参考: 昔の練習問題

FreeFem++ がまだなかった頃、有限要素法のプログラムを、C 言語や Fortran のようなプログラミング言語で書いていました。

そのときは (アルゴリズムの理解する助けになると考えて) 以下のような練習問題を出していました。参考まで。

1. 両側ディリクレ条件 $u(0) = u(1) = 0$ の問題を解く。
2. 非同次ディリクレ条件 $u(0) = \alpha$ の問題を解く。
3. 非同次 Neumann 条件 $u'(1) = \beta$ の問題を解く。
4. $-(pu')' = f$ という一般の楕円型方程式の問題を解く。
   (p は $\min_x p(x) > 0$ を満たす既知の関数)

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

[2] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).