応用数値解析特論 第3回

～Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (続き), Ritz-Galerkin 法～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2024/

2024年4月30日

目次

本日の内容・連絡事項

- これまで詳しく説明しなかった変分法の基本補題について説明する。試験関数の空間として良く現れる $C_0^\infty(\Omega)$ についても説明する。
- 変分問題 (V) を導入し、(W) と同値であることを説明する。
- [?] の第 3 章「Ritz-Galerkin 法」の内容の解説を始める。

2.1.2 変分法の基本補題

変分法の基本補題 (fundamental lemma of calculs of variations) とは、大まかに言うと、Ω で定義された関数 u が、“任意の” φ に対して

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$$

を満たすならば、Ω で $u = 0$ が成り立つ、という定理 (の総称) である。

u が連続関数であれば、(微積分レベルの) 比較的簡単な証明があるが、後のことを考えると、より一般的な状況設定で定理を述べて証明したい。

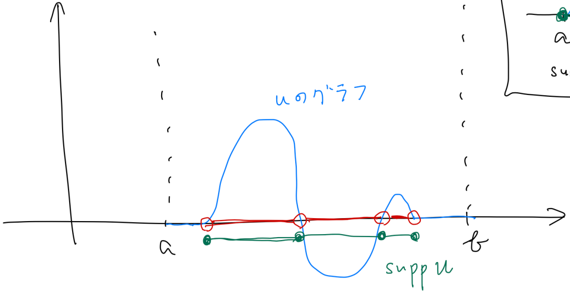
u については、なるべく弱い条件 (多くの関数を許す) で、φ についてはなるべく強い条件 (より少ない φ しか要求しない) で示すのが良い。そういう観点から、いくつかあるバージョンのうち、定理 3.1 を紹介する。

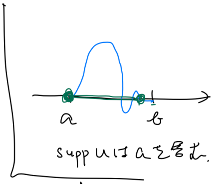
2.1.2 変分法の基本補題　用語の紹介　$C_0^\infty(\Omega)$, 局所可積分

変分法の基本補題の 1 バージョンとして、定理 3.1 を紹介する。それを説明するのに、$C_0^\infty(\Omega)$ と言う記号と、局所可積分と言う言葉が必要である。

- $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K について、K が**コンパクト** $\Leftrightarrow$ K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合.
- $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、A の閉包 $\overline{A}$ を次式で定める。
$$\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$
直観的に言うと、A に A の縁を付け加えた集合が $\overline{A}$ である。
- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とするとき、u の**台** (support) $\operatorname{supp} u$ を次式で定める。
$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$
- Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。$C_0^\infty(\Omega)$ という関数空間を次式で定める ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)。
$$C_0^\infty(\Omega) := \left\{u \;\middle|\; u\colon \Omega \to \mathbb{K}\ C^\infty \text{ 級, } \operatorname{supp} u \text{ はコンパクト集合, } \operatorname{supp} u \subset \Omega\right\}.$$
(粗く言って、Ω の境界の十分近くでは 0 となるような C^∞ 級の関数の全体。)
- $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (f が Ω で**局所可積分**) とは、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が可測であり、Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して $\displaystyle\int_K |f(x)|\,dx < +\infty$ が成り立つことを言う。
Ω で連続な関数は局所可積分である: $C(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
ex. $f(x) = \frac{1}{x}$ は $(0,\infty)$ で可積分ではないが、局所可積分。

$$\Omega = (a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$





supp u は a を含む.

$\therefore u \notin C_0^\infty(\Omega)$

$$\mathrm{supp}\, u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$$

点の

このuは $C_0^\infty(\Omega)$ に属している.

2.1.2 変分法の基本補題

定理 3.1 (変分法の基本補題　割と強いバージョン)

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

を満たすならば、u は Ω 上ほとんどいたるところ 0 に等しい: $u = 0$ a.e. in Ω.

系 3.2 (変分法の基本補題 (連続関数バージョン, 分かりやすい))

$u \in C(\Omega)$ が

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

を満たすならば、u は Ω 上いたるところ 0 に等しい:

$$(\forall x \in \Omega) \quad u(x) = 0.$$

Cf. L^2 ですべての要素と直交する元は 0 (これはこれで分かりやすい)

$u \in L^2(\Omega)$ が $(\forall \varphi \in L^2(\Omega))$ $(u, \varphi) = 0$ を満たすならば、$u = 0$ ($L^2(\Omega)$ の要素として)。

用語の紹介　$L^p(\Omega)$

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$1 \le p \le \infty$ とする。

$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が可測関数であるとき、$\|f\|_{L^p}$ を

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \operatorname{ess.sup}_{x\in\Omega} |f(x)| & (p = \infty). \end{cases}$$

で定める。

$\|f\|_{L^p} < \infty$ を満たす f を Ω で p 乗可積分であるといい、Ω で p 乗可積分な関数全体の集合を $L^p(\Omega)$ で表す。$\|f\|_{L^p}$ を f の L^p ノルムとよぶ。

特に $p = 2$ のとき、

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f, f)_{L^2}}.$$

ここで $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ は L^2 内積である:

$$(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

$\|f\|_{L^p}$ を $\|f\|_p$, $(f, g)_{L^2}$ を $(f, g)_2$ と書くことも多い。

2.1.3 広義導関数、超関数微分、Sobolev 空間

(今年度はここはカットすることにします。)

今回の話をきちんとするには、微分の意味を拡張して議論することが重要となる。

定義 3.3 (広義導関数)

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f \in L^2(\Omega)$ とする。$g \in L^2(\Omega)$ が f の x_j に関する**広義導関数** (超関数微分, Sobolev(ソボレフ)の意味での導関数) であるとは

(1) $$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx.$$

が成り立つことをいう。

f が C^1 級のとき、$g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ につき (1) は部分積分 (Gauss の発散定理) で証明できる。つまり、普通の導関数は広義導関数である。

誤解が生じる恐れがないとき、g のことを $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ と表す (記号の濫用)。

$f \in L^2(\Omega)$ のうちで、各 x_j について広義導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ が存在するもの全体を $H^1(\Omega)$ と表す。$H^1(\Omega)$ を (1 階の) **Sobolev 空間**と呼ぶ。

実は後で出て来る X_{g_1}, X は、本当は次のように定義するのが正確である。

(2) $$X_{g_1} = \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X = \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}.$$

2.2 Poisson 方程式の境界値問題 (再出)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で、その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする。また Γ_1, Γ_2 は条件

$$\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ が与えられた時、Poisson 方程式の境界値問題

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

$$-\triangle u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{3a}$$

$$u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1, \tag{3b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \tag{3c}$$

を考える。ここで $\boldsymbol{n}$ は Γ 上の点における外向き単位法線ベクトルを表す。

念のため　(3a) を Poisson 方程式, (3b) を Dirichlet 境界条件, (3c) を Neumann 境界条件と呼ぶ。

2.3 弱定式化 (続き) 記号の導入と思い出し

記述の簡略化のために記号をいくつか定義しよう。

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx, \quad (u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x)v(x)\,d\sigma,$$

$$|||u||| := \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad \|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

これらを用いて、前回の授業で分かったことをまとめると、

定理 3.4 ((P) $\Rightarrow$ (W))

u が境界値問題 (P) の解ならば、u は次の問題 (W) の解である。

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(4) $$\langle u, v\rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

- (W) の解を (P) の**弱解** (**weak solution**)
- 問題 (P) に対して問題 (W) を設定することを**弱定式化** (**weak formulation**)
- (4) を**弱形式** (**weak form**)

と呼ぶ。

2.3 弱定式化 (続き) 記号の導入と思い出し

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 3.5 ((W)$+\alpha$ $\Rightarrow$ (P))

u が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

細かい注意　$-\triangle u = f$ が成り立つとき、u が滑らかなほど、f も滑らかになる。これは当たり前だが、Ω が十分滑らかであれば (直観的には $\partial\Omega$ が滑らかな曲線ならば)、弱形式が成り立つとき、f が滑らかなほど、u も滑らかになることが証明できる。そういう場合は、定理の条件「なおかつ十分滑らかであれば」はチェックする必要がなくなる。**しかし**、有限要素法では、問題とする領域を三角形や四面体の合併領域で近似することが多く、そのような領域は十分滑らかとは言えないので、難しい問題が生じる場合がある。

2.4 変分原理

(「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明する。… ここをはしょった年度もあったが、どうもそれは良くないようで、反省した。)

任意の $u \in X_{g_1}$ に対して

$$I[u] := \frac{1}{2}\|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎関数 I の最小問題) を考える。

問題 (V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t. $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$. ($I \colon X_{g_1} \to \mathbb{R}$ の最小点を求めよ。)

定理 3.6 ((W)⇔(V))

u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解.

微分方程式の解が、変分問題の解になるとき、**変分原理**が成り立つという。平凡社「世界大百科事典」によると、「一般的に，物理的な現象を法則として述べるのに関与するある基本スカラー量があって，これを最小にするという条件から法則が導かれる場合，この法則の記述の仕方を変分原理と呼んでいる。」

2.4 変分原理

定理 3.6 の証明のための準備として、一つ公式を導いておく。

補題 3.7

$u \in X_{g_1}$, $v \in X$ とするとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$I[u+tv] = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + t\{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

特に ($t = 1$ として)

$$I[u+v] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

証明は単純な計算である (ある種の内積計算, 二次関数の整理) ので、授業では認めることにする (少し後のスライドに書いておく)。

定理 3.6 の証明　($\Leftarrow$) u を (V) の解とし、任意の $v \in X$ を取る。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに $u + tv \in X_{g_1}$. それゆえ

$$f(t) := I[u + tv] \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が定義されるが、仮定よりこれは $t = 0$ で最小値を取る。補題 3.7 により

$$f(t) = I[u + tv] = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + t\{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

この 2 次関数が $t = 0$ で最小となるには、1 次の項の係数が 0 でなければならない:

$$\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

これは弱形式 (4) に他ならない。ゆえに u は問題 (W) の解である。

($\Rightarrow$) u が (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、$v := w - u$ とおくと

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに $v \in X$. 補題 3.7 により

$$I[w] - I[u] = I[u+v] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \left\{\langle u, v\rangle - (f, v) - [g_2, v]\right\}.$$

u が弱形式 (4) を満たすという仮定から $\{\cdot\} = 0$ となることに注意すると

$$I[w] - I[u] = \frac{1}{2}\|v\|^2 = \frac{1}{2}\|w - u\|^2 \geq 0.$$

ゆえに $I[u]$ は I の最小値である。すなわち u は問題 (V) の解である。 $\square$

2.4 変分原理

(ここは授業ではカットかな？余談だし。ちょろっとしゃべるくらいか。)

余談 3.8

要は 2 次関数 $I[u]$ の最小化である。I の定義域は無限次元の空間であるが、そのような汎関数に対しても、(普通の微分を拡張した) Fréchet 微分というものが定義される。実は、I の Fréchet 微分は

$$I'[u] = \langle u, \cdot \rangle - (f, \cdot) - [g_2, \cdot].$$

(Cf. $i(u) = \frac{1}{2}u^2 - fu - g_2 u$ のとき、$i'(u) = u - f - g_2$)

そして、$I'[u] = 0$ は

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0 \qquad (v \in X)$$

となる。つまり、

弱形式は、変分問題の汎関数の Fréchet 微分係数 $= 0$ という条件

である。 $\square$

2.4.1 補題 3.7 の証明

(単なる計算である。)

$u \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ とするとき、Γ_1 上で

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1$$

であるから $u + tv \in X_{g_1}$.

$$\begin{aligned}
I[u+tv] &= \frac{1}{2}\|u+tv\|^2 - (f, u+tv) - [g_2, u+tv] \\
&= \frac{1}{2}\langle u+tv, u+tv\rangle - (f,u) - t(f,v) - [g_2,u] - t[g_2,v] \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + \|tv\|^2\right) - t(f,v) - [g_2,u] - t[g_2,v] \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - (f,u) - [g_2,u] + t\left\{\langle u,v\rangle - (f,v) - [g_2,v]\right\} + \frac{t^2}{2}\|v\|^2 \\
&= I[u] + t\left\{\langle u,v\rangle - (f,v) - [g_2,v]\right\} + \frac{t^2}{2}\|v\|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

これまでの講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、同じ問題を題材に、**Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一種である、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

前節で解説した弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。

Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 ($\widehat{\mathrm{V}}$), ($\widehat{\mathrm{W}}$) の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

変分問題の近似解法として、有名な Rayleigh (レイリー) などの研究 ("Theory of Sound" [?], [?]) もあったが、完成したのは Ritz である (**Ritz の方法**, Ritz [?])。

余談 3.9

私が勉強しはじめの頃は、Rayleigh-Ritz の方法とか、Rayleigh のみの名前がついたりしていた。Rayleigh 卿 (John William Strutt, "third Baron Rayleigh", "Lord Rayleigh", 1842–1919) は長生きした大物理学者、Ritz (Walter Ritz, 1878–1909) は若くしてなくなったという事情もあって、Ritz の名前は軽んじられ、そしてそれが孫引きされていたような気配が感じられる。

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法**である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で u や v の近似関数を作る。より具体的には関数空間 X_{g_1}, X の有限次元近似 $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を作るため

$$\hat{g}_1 \fallingdotseq g_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \tag{5}$$

$$\psi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{6}$$

となる $\hat{g}_1$ と、1 次独立な $\psi_i \in X$ $(i = 1, \cdots, m)$ を適当に選び、

$$\hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}, \tag{7}$$

$$\hat{X} := \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\} \tag{8}$$

とおく。以下 $\{\psi_i\}$ のことを基底関数 (basis functions) と呼ぶ。

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解 u を $\hat{X}_{g_1}$ の要素 $\hat{u}$ で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 $(\widehat{\mathrm{W}})$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{9}$$

という問題を考える。

ちなみに、この分野の言葉遣いでは、$\hat{u}$ を**試行関数** (**trial function**), $\hat{v}$ を**試験関数** (**test function**) と呼ぶ。

余談 3.10 (重み付き残差法)

ここでは試験関数の空間 $\hat{X}$ として、試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$ とよく似たもの (ともに ψ_i で張られている) を採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々なものが使われている (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法** (method of weighted residuals, weighted residual methods) と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、と言うことが出来る。

問題 $(\widehat{\mathrm{W}})$ の方程式 (9) が $\hat{v} \in \hat{X}$ につき線形で、$\hat{X}$ が $\{\psi\}_{i=1,2,\cdots,m}$ で張られることから、$(\widehat{\mathrm{W}})$ は、次の問題 $(\widehat{\mathrm{W}}')$ と同値であることが分かる。

問題 $(\widehat{\mathbf{W}}')$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{10}$$

実際、$\psi_i \in \hat{X}$ であるから、$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が、(9) を満たすならば、(10) を満たす。
逆に $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が (10) を満たすならば、任意の a_i をかけて i について加えることで

$$\sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) + \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i].$$

内積の線形性から

$$\left\langle \hat{u}, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right\rangle = \left(f, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right) + \left[g_2, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right].$$

これは (9) が成り立つことを意味する。 □

方程式 (10) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j $(j = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j$$

と表せる。これを (10) に代入すると

$$\left\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j, \psi_i \right\rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

すなわち

$$\langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{11}$$

この (11) を行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

3.1.4 連立 1 次方程式の導出

ゆえに

$$Aa = f, \tag{12}$$

ただし、

$$A := \begin{pmatrix} \langle\psi_1,\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\psi_1,\psi_m\rangle & \cdots & \langle\psi_m,\psi_m\rangle \end{pmatrix} = (\langle\psi_j,\psi_i\rangle),$$

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} (f,\psi_1) + [g_2,\psi_1] - \langle\hat{g}_1,\psi_1\rangle \\ \vdots \\ (f,\psi_m) + [g_2,\psi_m] - \langle\hat{g}_1,\psi_m\rangle \end{pmatrix} = ((f,\psi_i) + [g_2,\psi_i] - \langle\hat{g}_1,\psi_i\rangle).$$

f, g_2, $\hat{g}_1$, $\{\psi_i\}$ が与えられれば A, $\boldsymbol{f}$ は定まる。$\boldsymbol{u}$ は未知ベクトルである。
この連立 1 次方程式 (12) が解を持つかどうか、次の命題で一般的に解決する。

補題 3.11 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (12) は一意可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$) $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明 A の対称性 ($\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$) は明らかである。$A$ の正値性を示す。任意の $\boldsymbol{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ に対して

$$\hat{v} := \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j$$

とおくと、ψ_j の 1 次独立性から $\hat{v} \neq 0$ であり、実は $\|\hat{v}\| > 0$ である。
($\because$ もしも $\|\hat{v}\| = 0$ ならば、$\|\cdot\|$ の定義から、$\hat{v}$ は定数関数であるが、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ から、$\hat{v}$ は少なくとも 1 点 (Γ_1 の任意の点) で 0 に等しく、$\hat{v} \equiv 0$ が導かれ、矛盾が生じる。)

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} b_j\psi_j, \sum_{i=1}^{m} b_i\psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, \psi_i \rangle\, b_j \right) = \boldsymbol{b}^\top A \boldsymbol{b}$$

となる。従って A は正値である。 □

注意 3.12 (記号 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$)

ここで $\boldsymbol{b}^\top$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$ は、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に $\mathbb{C}^m$ において、$\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積である。

参考文献