応用数値解析特論 第 4 回
〜Poisson 方程式に対する Ritz-Galerkin 法 (2), 1 次元有限要素法 (1) 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2024/

2024 年 5 月 7 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今日は Ritz-Galerkin 法の続き。Ritz 法から。Ritz-Galerkin 法が終わると、FreeFem++ のプログラムがとりあえず理解できる…かな？？
- 前回の最後の部分のスライドをつけておく。$\Gamma_1 \neq \emptyset$ という条件について補足するため。
- 1 次元有限要素法に入る。直接剛性法の説明をするのが主な目的である。

補題 4.1 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、$\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに Galerkin 法の連立 1 次方程式は一意可解である。

復習　実対称行列 A に対して、A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$) $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明　A の対称性 ($\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$) は明らかである。$A$ の正値性を示す。任意の $\boldsymbol{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ に対して

$$\hat{v} := \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j$$

とおくと、ψ_j の 1 次独立性から $\hat{v} \neq 0$ であり、実は $\|\hat{v}\| > 0$ である。

($\because$ もしも $\|\hat{v}\| = 0$ ならば、$\|\cdot\|$ の定義から、$\hat{v}$ は定数関数であるが、$\Gamma_1 \neq \emptyset$ から、$\hat{v}$ は少なくとも 1 点 (Γ_1 の任意の点) で 0 に等しく、$\hat{v} \equiv 0$ が導かれ、矛盾が生じる。)

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j, \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, \psi_i \rangle \, b_j \right) = \boldsymbol{b}^\top A \boldsymbol{b}$$

となる。従って A は正値である。 □

注意 4.2 (記号 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$)

ここで $\boldsymbol{b}^\top$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}$ は、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に $\mathbb{C}^m$ において、$\boldsymbol{b}^* \boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積である。ここで $\boldsymbol{b}^* = \overline{\boldsymbol{b}^\top}$.

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法**である。具体的には次の問題を考える。

問題 $(\widehat{\mathbf{V}})$

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t. $I[\hat{u}] = \min_{\hat{w}\in\hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}]$.

前回証明した (W) と (V) の同値性と同様に、$(\widehat{\mathrm{W}})$ と $(\widehat{\mathrm{V}})$ も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める連立 1 次方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法**と呼ばれる。

ちなみに ($\sum$ や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$I[\hat{u}] = \frac{1}{2}\|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle - (f, \hat{g}_1)$$
$$- \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i]$$

となる。これから極値の条件は [1]

$$0 = \frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_i} = \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle - (f, \psi_i) - [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

これは、もちろん (?) Galerkin 法で得た連立 1 次方程式と同じである。

[1] $\dfrac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$ に注意。一般に $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とするとき、$\nabla f(x) = \dfrac{1}{2}(A + A^\top)x + b$ となる。特に A が対称ならば $\nabla f(x) = Ax + b$. 1 変数の $\left(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c\right)' = ax + b$ の拡張。

やってみよう　$\nabla(\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c)=\frac{1}{2}(A^\top+A)x+b$

微積分の授業などで聴いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数 2 次関数の微分をやってみることを勧める。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c.
\end{aligned}
$$

これを x_i で偏微分すると？ (スライド PDF の末尾を見よ。)

3.3 誤差最小の原理

定理 4.3 (誤差最小の原理)

Ritz–Galerkin 解 $\hat{u}$ は $\hat{X}_{g_1}$ の中で（ある意味で）最も u に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、u から超平面 $\hat{X}_{g_1}$ への射影 $\hat{u}$ の図を板書する。)

3.3 誤差最小の原理

証明　まず $\hat{u}$ は、u から $\hat{X}_{g_1}$ に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。弱形式

$$\langle u, v\rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$
$$\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v}\rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$ に対して、$\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$ ゆえ、$\hat{v}$ のところに $\hat{u} - \hat{w}$ を代入して

($\hat{u}$ は垂線の足)　　$\langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w}\rangle = 0.$

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。これから

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。 □

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、$\{\psi_i\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 4.4 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式？) の境界値問題を考えよう。

$$\begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで f は開区間 $(0,1)$ 上定義された既知関数である。
$\Omega = (0,1)$, $\Gamma_1 = \Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 = 0$ である。
$\hat{g}_1 = 0$ とするのが自然である。$\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \mathrm{Span}\{\psi_1, \cdots, \psi_m\}$ となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \le j \le m)$$

とおくと $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$ すなわち $\psi_j = 0$ on Γ_1 $(1 \le j \le m)$ であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。
$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ は、次のように表せる。

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j(x). \tag{2}$$

例 4.4 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、$[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = \left(\psi_j', \psi_i'\right) = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x)\cos(i\pi x)dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Huge 0} \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Huge 0} & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Huge 0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Huge 0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$

例 4.4 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

ゆえに

$$\boldsymbol{a} = A^{-1}\boldsymbol{f} = \frac{2}{\pi^2}\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\Large 0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (f,\psi_1) \\ (f,\psi_2) \\ (f,\psi_2) \\ \vdots \\ (f,\psi_m) \end{pmatrix},$$

$$(f,\psi_i) = \int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx.$$

ゆえに

(3)
$$a_i = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{i^2}\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

念のためもう一度書いておく。

(再掲 2)
$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(j\pi x).$$

(2), (3) で定まる $\hat{u}$ が問題 (1) の Ritz-Galerkin 解である。

例 4.4 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (2), (3) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- ψ_j は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ の固有関数である。これは "対称な作用素" であるため、直交性

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\psi_i, \psi_j) = 0$$

が成り立つ。さらに

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

が成り立ち、係数行列 A が対角行列となって、計算が簡単になっている。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば (同じことだから)。

例 4.5 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ において、Poisson 方程式 $-\triangle u=f$ に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ($\Gamma_1=\Gamma$, $g_1=0$ である)。このとき $\{\psi_k\}$ として

$$\varphi_{ij}(x,y)=\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)\quad(1\le i,j\le m)$$

を採用するのが便利である (ここで $m\in\mathbb{N}$)。弱形式は上の例と同様に

$$\langle\hat u,\hat v\rangle=(f,\hat v)\quad(\hat v\in\hat X:=\mathrm{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle\varphi_{k\ell},\varphi_{ij}\rangle=\frac{\pi^2}{4}(ki+\ell j)\delta_{ki}\delta_{\ell j}\quad(1\le i,j,k,\ell\le m)$$

さて

$$\hat u=\sum_{k=1}^m\sum_{\ell=1}^m a_{k\ell}\varphi_{k\ell}$$

とおくと、

例 4.5 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2 (i^2 + j^2)} (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \le i, j \le m).$$

例えば $f \equiv 1$ (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) dxdy = \frac{\left[(-1)^{i+1} + 1\right] \left[(-1)^{j+1} + 1\right]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{ij} & (i, j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{16}{ij(i^2 + j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \cdots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

1. 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
2. Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

3. 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

余談 4.6 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が加藤 [2] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「*I* 君の固有値問題」 *(1992/11)*

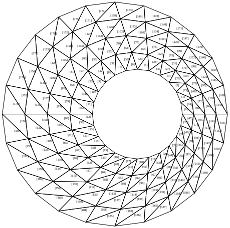
そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次回から有限要素法の話に突入する。
有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

- 領域を
  - *1 次元の場合* 区間
  - *2 次元の場合* 三角形, 四角形
  - *3 次元の場合* 三角錐, 四面体

  などの簡単な図形 — **有限要素 (finite element)** と呼ぶ — に分割する:



$$\overline{\Omega} \fallingdotseq \widehat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{m} e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ($\widehat{\Omega}$ で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

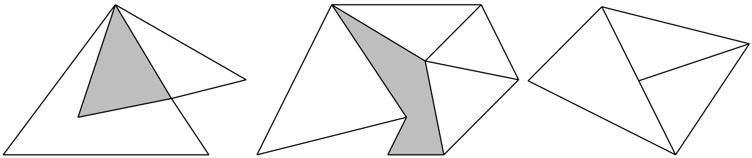


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかまで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

やってみよう の解答

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}x_k \cdot x_j + x_k \frac{\partial}{\partial x_i}x_j = \delta_{ik}x_j + x_k\delta_{ij}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial x_i}x_k + \frac{\partial}{\partial x_i}c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(\delta_{ik}x_j + x_k\delta_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k\delta_{ik} + 0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ik} + \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\delta_{ij}\right) + b_i \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{n} a_{ki}x_k\right) + b_i \\
&= \frac{1}{2}\left(Ax \text{ の第 } i \text{ 成分} + A^\top x \text{ の第 } i \text{ 成分}\right) + b \text{ の第 } i \text{ 成分} \\
&= \frac{1}{2}(A+A^\top)x + b \text{ の第 } i \text{ 成分}.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\nabla\left(\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c\right) = \frac{1}{2}(A+A^\top)x + b.
$$

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間 2 次元, 3 次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に直接剛性法) を理解するために、1 次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

このすぐ後に説明する 2 次元の場合を分かりやすくするためという趣旨である (いきなり全部やると大変)。

以上は、菊地 [1] を踏襲したものだが、私自身の経験から「分かりやすい」と思っている。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

(4)
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0,1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで f は $(0,1)$ 上定義された既知の関数、α と β は既知の実定数である。(要するに $n = 1$, $\Omega = (0,1)$, $\Gamma = \{0,1\}$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ である。)

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(I) \,\middle|\, w(0) = \alpha \right\}, \quad X := \left\{ v \in H^1(I) \,\middle|\, v(0) = 0 \right\},$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx, \quad (f, v) := \int_0^1 f(x) v(x)\, dx$$

とおくと、(4) の弱解とは、弱形式

(5)
$$\langle u, v \rangle = (f, v) + \beta v(1) \quad (v \in X)$$

を満たす $u \in X_{g_1}$ のことである。

4.2 有限要素解の定義　要点

要点はすでに予告してある。

有限要素法は区分的多項式を試行関数、試験関数に用いる Ritz-Galerkin 法である。

一般に、X_{g_1}, X の有限次元近似 $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を定めて、(1 つの) Ritz-Galerkin 解が定義される。

区分的多項式というものを定義して、それを用いて適切に $\hat{X}_{g_1}$, $\hat{X}$ を定めることで有限要素解が定義できる。

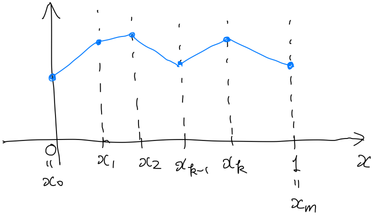
4.2.1 有限要素, 区分 1 次多項式

区間 $[0,1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i $(0 \le i \le m)$ を**節点** (**node**) と呼ぶ。
区間 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \cdots, m)$ を**有限要素** (**finite element**) と呼ぶ。

区間 $[0,1]$ 全体で連続で、各要素 e_k 上で 1 次関数に等しい関数を**区分的 1 次多項式**と呼び、区分的 1 次多項式の全体を $\widetilde{X}$ と表す。$\dim \widetilde{X} = m+1$ である。



試行関数 (近似解) $\hat{u}$, 試験関数 $\hat{v}$ として、区分的 1 次多項式を採用しよう。言い換えると、試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$, 試験関数の空間 $\hat{X}$ は、$\hat{X}_{g_1} \subset \widetilde{X}$, $\hat{X} \subset \widetilde{X}$ を満たすよう定める。

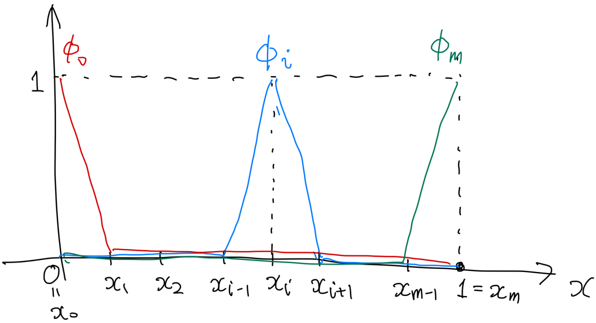
4.2.2 区分的 1 次多項式の空間の基底関数

$\tilde{X}$ の 基底関数として、以下に定義する $\{\phi_i\}_{i=0}^m$ を採用できる。

ϕ_i の定義

ϕ_i は区分的 1 次多項式で、x_i では 1, 他の節点 x_j $(j \neq i)$ では 0 という値を取る:

1. $\phi_i \in C[0,1]$
2. $(\forall k \in \{1, \cdots, m\})\ (\exists p, q \in \mathbb{R})\ (\forall x \in e_k)\ \phi_i(x) = px + q$
3. $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$.



4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

次の性質が基本的である。

補題 4.7 (基底関数 ϕ_i の性質)

$w_i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le m)$ に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x)$$

とおくと

$$\hat{w}(x_j) = w_j \quad (0 \le j \le m).$$

すなわち ϕ_j の係数 w_j は、節点 x_j における関数値である。

証明.

任意の $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$ に対して

$$\hat{w}(x_j) = \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^{m} w_i \delta_{ij} = w_j \delta_{jj} = w_j.$$

□

4.2.3 有限要素空間, 有限要素解

試行関数の空間 $\hat{X}_{g_1}$ と試験関数の空間 $\hat{X}$ として、次のものを採用する。

$$\hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{w} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{w}(0) = \alpha \right\}, \quad \hat{X} := \left\{ \hat{v} \in \widetilde{X} \;\middle|\; \hat{v}(0) = 0 \right\}.$$

基底関数を用いて表すと

$$\hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}, \tag{6}$$

$$\hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \right\}. \tag{7}$$

このとき定まる Ritz-Galerkin 解を $\hat{u}$ とする。すなわち $\hat{u}$ は

$$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}, \tag{8a}$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X}). \tag{8b}$$

を満たす。この $\hat{u}$ を区分的 1 次要素 (P1 要素) を用いた **有限要素解**と呼ぶ。

4.2.4 蛇足の話

(実は必要がないのだけれど)　式で書くと、$1 \le i \le m-1$ に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = 0$ に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$ に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このように式で書けるけれど、そうしてもほとんど使いみちがない。

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ **を満たす連続な区分的 1 次関数**ということと、**グラフのイメージ**を覚えた方がよい。

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

[2] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).